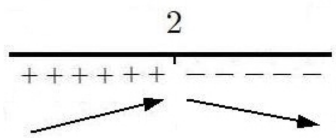
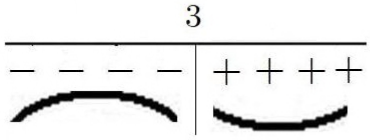
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 18/3/2026

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x-1) \cdot e^{1-x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) \cdot e^{1-x} = (\to\ -\infty) \cdot (\to\ +\infty) =\ -\infty$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) \cdot e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{e^{x-1}} = 0^+$
in quanto $(x-1) = o\big(e^{x-1}\big)$ per $x \to\ +\infty$.
Quindi abbiamo un asintoto orizzontale sulla destra di equazione $y = 0$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1) \cdot e^{1-x}}{x} =\ +\infty$: non ci sono asintoti obliqui.
$f(x) = (x-1) \cdot e^{1-x} \geq 0\ \Rightarrow x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$.
Funzione negativa per $x < 1$, positiva per $x > 1$. $f(1) = 0$, $f(0) =\ -e$.
$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x} + (x-1) \cdot (-1) \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (2-x) \geq 0$ per $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$.

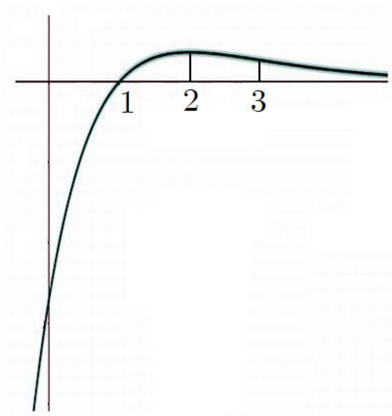


La funzione è crescente per $x < 2$, decrescente per $2 < x$.
Quindi in $x = 2$ abbiamo un punto di massimo, con $f(2) = \dfrac{1}{e}$.
Da $f'(x) = e^{1-x} \cdot (2-x)$ avremo poi :
$f''(x) = (-1) \cdot e^{1-x} \cdot (2-x) + e^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x} \cdot (x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.



Quindi $f(x)$ è funzione concava per $x \leq 3$, è funzione convessa per $x \geq 3$.
Nel punto $F_1 : x = 3$ abbiamo un punto di flesso con $f(3) = \dfrac{2}{e^2}$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(e^x - 1)}{\operatorname{sen} 2x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1+x}{3+x^2}\right)^{1-x}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(e^x-1)}{\operatorname{sen}2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(e^x-1)}{e^x-1}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}\cdot\dfrac{2x}{\operatorname{sen}2x}\cdot\dfrac{1}{2}=1\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$
da $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ e da $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x^2}\right)^{1-x}=(\to 0^+)^{(\to-\infty)}=e^{(\to-\infty)\cdot(\to-\infty)}=e^{(\to+\infty)}=+\infty$
da $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{g(x)\cdot\log f(x)}=e^{(\to-\infty)\cdot\log(\to 0^+)}$.

3) Dopo aver calcolato il limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(1+e^{1-x}\right)$, si enunci per esso la definizione di limite in forma metrica.

Da $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(1+e^{1-x}\right)\Rightarrow\log\left(1+e^{(\to-\infty)}\right)\Rightarrow\log\left(1+(\to 0^+)\right)\Rightarrow\log(\to 1^+)\Rightarrow 0^+$
avremo $\lim\limits_{x\to+\infty}\log\left(1+e^{1-x}\right)=0^+$ per cui:
$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta(\varepsilon):x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow 0<f(x)<0+\varepsilon$ ovvero $0<f(x)<\varepsilon$.

4) Date le funzioni $f(x)=1-3x$, $g(x)=1+\dfrac{1}{x}$ e $h(x)=2^{1-x}$, determinare l'espressione della funzione composta $F(x)=h(g(f(x)))$ e di questa $F(x)$ determinare poi l'espressione della sua funzione inversa.

Sarà $F(x)=h(g(f(x)))=h(g(1-3x))=h\left(1+\dfrac{1}{1-3x}\right)=h\left(\dfrac{2-3x}{1-3x}\right)\Rightarrow$
$F(x)=2^{1-\frac{2-3x}{1-3x}}=2^{\frac{1-3x-2+3x}{1-3x}}=2^{\frac{-1}{1-3x}}=2^{\frac{1}{3x-1}}$. Per cui, posto $2^{\frac{1}{3x-1}}=y$ avremo:
$\dfrac{1}{3x-1}=\log_2 y\Rightarrow 3x-1=\dfrac{1}{\log_2 y}\Rightarrow 3x=\dfrac{1}{\log_2 y}+1\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\log_2 y}+1\right)\Rightarrow$
$x=\dfrac{1}{3}\left(\log_y 2+1\right)$ e quindi l'inversa $F^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\log_2 x}+1\right)=\dfrac{1}{3}(\log_x 2+1)$.

5) Determinare il valore del parametro k per il quale $\displaystyle\int_0^k\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=1$.

Determinata una primitiva $(c=0)$, avremo:
$\displaystyle\int_0^k\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=(\log(x+1)|_0^k=\log(k+1)-\log(1)=\log(k+1)=1\Rightarrow k+1=e\Rightarrow$
$\Rightarrow k=e-1$.

6) Data $f(x,y)=x^3-2x^2+y^2-2xy$, si determini la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y)=\left(f'_x,f'_y\right)=\left(3x^2-4x-2y;2y-2x\right)$ per cui:
$\begin{cases}3x^2-4x-2y=0\\2y-2x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-6x=3x\,(x-2)=0\\y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\cup\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$.
Abbiamo quindi due punti stazionari: $(0,0)$ e $(2,2)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}6x-4 & -2\\-2 & 2\end{matrix}\right\|$, avremo:

$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -8-4<0$ per cui $(0,0)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}(2,2) = \begin{Vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 8>0 \\ |\mathbb{H}_2| = 16-4>0 \end{cases}$ per cui $(2,2)$ è un punto di minimo.

7) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{C} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$, si determini il modulo del vettore $\mathbb{Y} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{C}$.

Risulta:

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1-0 \\ 2+1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 2+3 \\ 1-6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ -5 \end{Vmatrix}.$$ Per cui $||(5,\,-5)|| = \sqrt{25+25} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$.

8) Data la funzione $f(x) = x^2 - 2x$, si determini il valore del parametro k per il quale alla funzione data risulta applicabile il Teorema di Rolle nell'intervallo $[0;k]$, determinando poi il punto x_0 risultante dall'applicazione del Teorema.

La funzione è un polinomio e quindi risulta continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.
Per poter applicare il Teorema di Rolle nell'intervallo $[0;k]$ dovrà poi essere $f(0) = f(k)$ ovvero $f(k) = k^2 - 2k = f(0) = 0 \Rightarrow k^2 - 2k = k\,(k-2) = 0 \Rightarrow k = 2$.
Quindi $[0;k] = [0;2]$. Infine, da $f'(x_0) = 2x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$.

9) Determinare verità o falsità delle tre proposizioni semplici $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, sapendo che le proposizioni composte $P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow non\,\mathbb{B}$, e $P_2 : (\mathbb{A}\; e\; \mathbb{B}) \Leftrightarrow non\,\mathbb{C}$ sono entrambe false.

Costruita la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$non\mathbb{B}$	$P_1{:}\mathbb{A}\Rightarrow non\mathbb{B}$	$\mathbb{A}e\mathbb{B}$	$non\mathbb{C}$	$P_2{:}(\mathbb{A}e\mathbb{B})\Leftrightarrow non\mathbb{C}$
1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0

come si vede dalla tavola, le proposizioni $P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow non\,\mathbb{B}$ e $P_2 : (\mathbb{A}\; e\; \mathbb{B}) \Leftrightarrow non\,\mathbb{C}$ sono entrambe false solo nella prima riga, dove le proposizioni semplici $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono tutte vere.

10) Data la funzione $f(x) = x \cdot \log x$, determinare il punto nel quale la retta tangente al grafico della funzione risulta parallela alla retta di equazione $y = 2x - 3$.

C.E.: $\mathbb{R}^*_+$, la funzione è continua e derivabile $\forall\, x > 0$.
Per avere la retta tangente parallela alla retta di equazione $y = 2x - 3$ la retta tangente deve avere coefficiente angolare uguale a 2, e quindi la derivata nel punto deve essere uguale a 2.
Da $f(x) = x \cdot \log x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \log x + 1 \Rightarrow \log x + 1 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = e$.