

## COMPITO di MATEMATICA GENERALE 4/6/2026

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $f(x) = e^{x-x^2}$ .

C.E.:  $\mathbb{R}$ , la funzione è continua  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

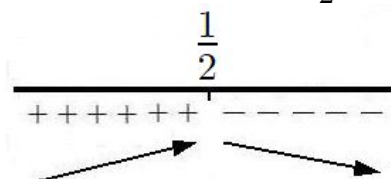
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-x^2} = e^{(-\infty)} = 0^+.$$

Quindi abbiamo asintoto orizzontale sulla sinistra e sulla destra di equazione  $y = 0$ .

Non ci sono asintoti obliqui.

$$f(x) = e^{x-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 1.$$

$$f'(x) = (1 - 2x) \cdot e^{x-x^2} \geq 0 \text{ per } 1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$



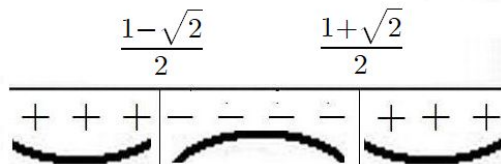
La funzione è crescente per  $x < \frac{1}{2}$ , decrescente per  $\frac{1}{2} < x$ .

Quindi in  $x = \frac{1}{2}$  abbiamo un punto di massimo, con  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[4]{e}$ .

Da  $f'(x) = (1 - 2x) \cdot e^{x-x^2}$  avremo poi :

$$f''(x) = (-2) \cdot e^{x-x^2} + (1 - 2x)^2 \cdot e^{x-x^2} = e^{x-x^2} \cdot (4x^2 - 4x - 1) \geq 0 \Rightarrow$$

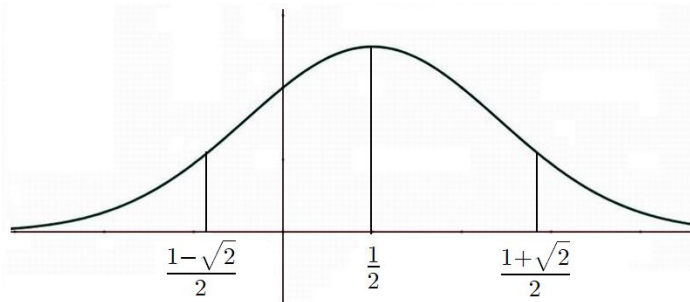
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ per } x < \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \text{ e per } x > \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$



Quindi  $f(x)$  è funzione concava per  $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ , è funzione convessa per  $x < \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$  e per  $x > \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ .

Nei punti  $F_1 : x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$  e  $F_2 : x = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$  abbiamo due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}}.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{2} - \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{1} = (\rightarrow +\infty) - (\rightarrow 0) = +\infty.$$

3) Date  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = e^x$  determinare l'espressione della funzione composta  $F(x) = f(g(f(x)))$  e determinare poi dove  $F(x)$  risulta invertibile, nonché l'espressione della sua inversa.

$$\text{Sarà } F(x) = f(g(f(x))) = f(g(2x - 1)) = f(e^{2x-1}) = 2e^{2x-1} - 1 \Rightarrow$$

$$F(x) = 2e^{2x-1} - 1 : \text{funzione definita, continua e derivabile } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da  $F(x) = 2e^{2x-1} - 1 \Rightarrow F'(x) = 4e^{2x-1} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  : funzione strettamente crescente su tutto  $\mathbb{R}$  e quindi sempre invertibile.

Posto  $2e^{2x-1} - 1 = y$  avremo:

$$2e^{2x-1} = y + 1 \Rightarrow e^{2x-1} = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 2x - 1 = \log\left(\frac{y+1}{2}\right) \Rightarrow 2x = \log\left(\frac{y+1}{2}\right) + 1 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \left( \log\left(\frac{y+1}{2}\right) + 1 \right) \Rightarrow x = \log\sqrt{\frac{y+1}{2}} + \frac{1}{2} \text{ e quindi l'inversa :}$$

$$F^{-1}(x) = \log\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \frac{1}{2}.$$

4) Data la funzione  $f(x) = e^x - x$ , determinare il punto  $x_0$  nel quale la retta tangente al grafico di tale funzione risulta una retta parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

*C.E.:*  $\mathbb{R}$ , la funzione è continua e derivabile  $\forall x$ .

Per avere la retta tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante, che ha equazione  $y = x$ , la retta tangente deve avere coefficiente angolare uguale a 1, e quindi la derivata nel punto  $x_0$  deve essere uguale a 1.

$$\text{Da } f(x) = e^x - x \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 = 1 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x_0 = \log 2.$$

5) Determinare l'area della parte di piano cartesiano compresa al di sotto del grafico della funzione  $f(x) = 2x - x^2$  e sopra all'asse delle ascisse.

Per trovare i punti in cui la parabola taglia l'asse delle ascisse poniamo:

$$f(x) = 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = 2.$$

Dovremo quindi calcolare  $\int_0^2 2x - x^2 dx$ .

Determinata una primitiva ( $c = 0$ ), avremo:

$$\int_0^2 2x - x^2 dx = \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{4}{3}.$$

6) Data la funzione  $f(x, y) = x^2 - xy^2 + 3y + y^4$ , si determini la natura del suo punto stazionario.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (2x - y^2; -2xy + 3 + 4y^3)$  per cui:

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ -2xy + 3 + 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ -2\frac{y^2}{2}y + 3 + 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ 4y^3 - y^3 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ 3y^3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y^2}{2} \\ y^3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \end{cases}.$$

Abbiamo quindi un solo punto stazionario:  $(\frac{1}{2}, -1)$ .

Essendo poi  $\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x + 12y^2 \end{vmatrix}$ , avremo:

$$\mathbb{H}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 22 - 4 > 0 \end{cases} \text{ per cui } \left(\frac{1}{2}, -1\right) \text{ è un punto di minimo.}$$

7) Data la matrice  $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k \\ k & -2 & m \end{vmatrix}$  ed il vettore  $\mathbb{V} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ , determinare i valori

dei parametri  $m$  e  $k$  sapendo che il vettore  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{V}$  è perpendicolare al vettore  $(1, 1, 1)$  ed ha modulo uguale a  $\sqrt{2}$ .

Risulta:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{V} = \begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ 0 & 1 & k \\ k & -2 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - k - 1 \\ 0 - 1 + k \\ k + 2 + m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k \\ k - 1 \\ k + m + 2 \end{vmatrix}.$$

Sapendo che il vettore  $\mathbb{A} \cdot \mathbb{V}$  è perpendicolare al vettore  $(1, 1, 1)$  dovrà risultare:

$$(-k, k - 1, k + m + 2) \cdot (1, 1, 1) = -k + k - 1 + k + m + 2 = k + m + 1 = 0 \text{ da cui otteniamo } m = -k - 1.$$

Avremo poi:

$$\|\mathbb{A} \cdot \mathbb{V}\| = \sqrt{k^2 + (k - 1)^2 + (k + m + 2)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Sostituendo } m = -k - 1 \text{ avremo } \|\mathbb{A} \cdot \mathbb{V}\| = \sqrt{k^2 + (k - 1)^2 + (k - k - 1 + 2)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{ovvero } \|\mathbb{A} \cdot \mathbb{V}\| = \sqrt{k^2 + (k - 1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2k^2 - 2k + 2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$2k^2 - 2k + 2 = 2 \Rightarrow k^2 - k = k(k - 1) = 0.$$

$$\text{Abbiamo quindi due soluzioni } \begin{cases} k = 0 \\ m = -k - 1 = -1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} k = 1 \\ m = -k - 1 = -2 \end{cases}.$$

8) Determinare l'espressione del Polinomio di Taylor di secondo grado nel punto  $x = 1$  per la funzione  $f(x) = e^{x-1} - \log x$ .

La funzione risulta continua e derivabile almeno due volte in  $x = 1$ .

L'espressione del Polinomio di Taylor di secondo grado nel punto  $x = 1$  è data da:

$$P_2(x, 1) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{1}{2} f''(1)(x - 1)^2 \text{ e quindi:}$$

$$f(1) = e^{1-1} - \log 1 = e^0 - 0 = 1;$$

$$f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = e^{1-1} - 1 = 1 - 1 = 0;$$

$$f''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = e^{1-1} + 1 = 1 + 1 = 2 \text{ e quindi:}$$

$$P_2(x, 1) = 1 + 0(x-1) + \frac{1}{2} 2(x-1)^2 = 1 + (x-1)^2 = x^2 - 2x + 2.$$

9) Date le proposizioni  $\mathbb{A}$  e  $\mathbb{B}$ , determinare se la proposizione  $[\mathbb{A} \Rightarrow (\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{B})] \circ \mathbb{B}$  risulta una tautologia.

Costruita la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\text{non } \mathbb{A}$	$\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Rightarrow (\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{B})$	$[\mathbb{A} \Rightarrow (\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{B})] \circ \mathbb{B}$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

come si vede dall'ultima colonna, la proposizione  $[\mathbb{A} \Rightarrow (\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{B})] \circ \mathbb{B}$  non risulta una tautologia.

10) Data la funzione  $f(x) = m \cdot (x - k) \cdot e^{1-x}$ , determinare il valore dei parametri  $m$  e  $k$  sapendo che la funzione ha un punto di massimo in  $x = 1$  con  $f(1) = 2$ .

*C.E.:*  $\mathbb{R}$ , la funzione è continua e derivabile  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Da } f(x) = m \cdot (x - k) \cdot e^{1-x} \Rightarrow f'(x) = m [1 \cdot e^{1-x} - (x - k) \cdot e^{1-x}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = m \cdot e^{1-x} [1 - x + k] > 0 \Rightarrow 1 - x + k > 0 \Rightarrow x < 1 + k$$

nell'ipotesi che sia  $m > 0$ . Quindi la funzione è crescente per  $x < 1 + k$  e decrescente per  $x > 1 + k$ . Quindi in  $x = 1 + k$  abbiamo un punto di massimo, e dovrà quindi essere  $1 = 1 + k \Rightarrow k = 0$ .

Se fosse  $m < 0$  le conclusioni sul segno della derivata si invertirebbero, ovvero la funzione sarebbe prima decrescente e poi crescente, ed avrebbe in  $x = 1 + k$  un punto di minimo.

$$\text{Per } k = 0 \text{ avremo poi } f(x) = m x e^{1-x} \Rightarrow f(1) = m e^{1-1} = m = 2.$$

E quindi i valori cercati sono  $k = 0$  e  $m = 2$ .