

Compito di ANALISI MATEMATICA 6/7/2026

I M 1) Se $z = \frac{1-2i}{3-i}$, calcolare $\sqrt[3]{z}$.

$$z = \frac{1-2i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i-6i-2i^2}{9+1} = \frac{3-5i+2}{10} = \frac{5-5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$
$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

Per cui:

$$\sqrt[3]{z} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right), \quad 0 \leq k \leq 2 \text{ da cui:}$$

$$\text{per } k = 0 : z_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right);$$

$$\text{per } k = 1 : z_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \sin \frac{15\pi}{12} \right) =$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right);$$

$$\text{per } k = 2 : z_2 = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{16\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{16\pi}{12} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right).$$

I M 2) Verificare se la funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2|y|}$ è differenziabile in $(0, 0)$.

La funzione risulta palesemente continua in $(0, 0)$ con $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2|y|} = 0 = f(0, 0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2|0|} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0^2|h|} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2|y|}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \text{ Passando a coordinate polari:}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho \sqrt{\varrho \cos^2 \vartheta |\sin \vartheta|}}{\varrho} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \sqrt{\varrho \cos^2 \vartheta |\sin \vartheta|} = 0.$$

La convergenza è uniforme in quanto $|\varrho \cos^2 \vartheta |\sin \vartheta|| \leq \varrho$, ne consegue quindi che la funzione è differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = e^{x-y} - x - y = 1$ ed il punto $P_0 = (0, 0)$ che la soddisfa, determinare la natura del punto stazionario che presenta la funzione implicita $y = y(x)$ definibile con tale equazione.

Dato che f è palesemente funzione differenziabile in $\mathbb{R}^2$, passiamo a calcolare il gradiente ed avremo: $\nabla f(x, y) = (e^{x-y} - 1; -e^{x-y} - 1)$ da cui $\nabla f(0, 0) = (0; -2)$.

Essendo $f'_y(0, 0) = -2 \neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $y = y(x)$.

$$\text{Risulta } \frac{dy}{dx}(0) = y'(0) = -\frac{f'_x(0, 0)}{f'_y(0, 0)} = -\frac{0}{-2} = 0.$$

Siamo quindi in presenza di un punto stazionario.

$$\text{Essendo } \mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} e^{x-y} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y} \end{vmatrix} \text{ sarà } \mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Dalla } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{f''_{xx} + 2f''_{xy}(y') + f''_{yy}(y')^2}{f'_y} \text{ si ha :}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = y''(0) = -\frac{1 + 2(-1)(0) + 1(0)^2}{-2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Da $y''(0) > 0$ ne segue che il punto stazionario in $x = 0$ risulta un punto di minimo.

I M 4) Data la funzione $f(x, y) = x - xy + y$, e dato il versore $v = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, sapendo che $\mathcal{D}_v f(-1, -1) = 0$, determinare il valore di $\mathcal{D}_{v,v}^2 f(-1, -1)$.

Essendo la funzione palesemente differenziabile due volte sarà:

$$\mathcal{D}_v f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot v \text{ e } \mathcal{D}_{v,v}^2 f(x, y) = v \cdot \mathbb{H}(x, y) \cdot v^T.$$

Essendo $\nabla f(x, y) = (1 - y; -x + 1)$ avremo :

$$\mathcal{D}_v f(-1, -1) = \nabla f(-1, -1) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = (2, -2) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = 0 \text{ per cui:}$$

$$2\cos \alpha - 2\sin \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } \alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ e quindi :}$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oppure } \cos \alpha = \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Essendo } \mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(-1, -1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \text{ sarà infine:}$$

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(-1, -1) = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \right\| = -1$$

oppure

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(-1, -1) = \left\| -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \right\| =$$

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(-1, -1) = \left\| -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \right\| = -1 \text{ come prima.}$$

$$\text{II M 1) Risolvere il problema: } \begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = xy \\ \text{s.v. } \begin{cases} 1 - x \leq y \\ y \leq 1 - x^2 \end{cases} \end{cases}.$$

$$\text{Il problema si presenta nella forma } \begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = xy \\ \text{s.v. } \begin{cases} 1 - x \leq y \\ y \leq 1 - x^2 \end{cases} \end{cases} \quad \text{che riscriviamo invece}$$

$$\text{nella forma: } \begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} 1 - x - y \leq 0 \\ y + x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo. Avremo:

$$\begin{cases} y = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = x(x - 1) = 0 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Formiamo la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = xy - \lambda_1(1 - x - y) - \lambda_2(y + x^2 - 1).$$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ 1 - x \leq y \\ y \leq 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 1 \leq 0: \text{falsa} \\ 0 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow (0, 0) \notin \mathcal{E}.$$

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + \lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 = 0 \\ y = 1 - x \\ y \leq 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = -\lambda_1 \\ 2\lambda_1 = -1 \\ y \leq 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{4} : \text{vera} \end{cases}$$

Il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, con $\lambda_1 = -\frac{1}{2} < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_2 x = 0 \\ \Lambda'_y = x - \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ 1 - x \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = 2\lambda_2^2 \\ 2\lambda_2^2 = 1 - \lambda_2^2 \\ 1 - x \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = 2\lambda_2^2 \\ 3\lambda_2^2 = 1 \\ 1 - x \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = 2\lambda_2^2 \\ \lambda_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 - x \leq y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{2}{3} \\ \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{2}{3} : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{2}{3} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{2}{3} : \text{falsa} \end{cases}.$$

Il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$, con $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ potrebbe essere punto di massimo.

Il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right) \notin \mathcal{E}.$

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 2\lambda_2 \\ 1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \cup$$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + \lambda_1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ y = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}.$$

Il punto $(1, 0)$, con $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$ potrebbe essere punto di minimo;
il punto $(0, 1)$, con $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

Studiamo la funzione sulla frontiera della regione ammissibile.

Se $y = 1 - x \Rightarrow f(x, 1 - x) = x - x^2$ da cui $f'(x) = 1 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ e quindi la funzione è crescente per $0 < x < \frac{1}{2}$ e decrescente per $\frac{1}{2} < x < 1$, per cui il punto $x = \frac{1}{2}$ sarebbe punto di massimo, contraddicendo quanto visto al punto 2).

Quindi il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ non è nè di massimo nè di minimo.

Se $y = 1 - x^2 \Rightarrow f(x, 1 - x^2) = x(1 - x^2) = x - x^3$ da cui:

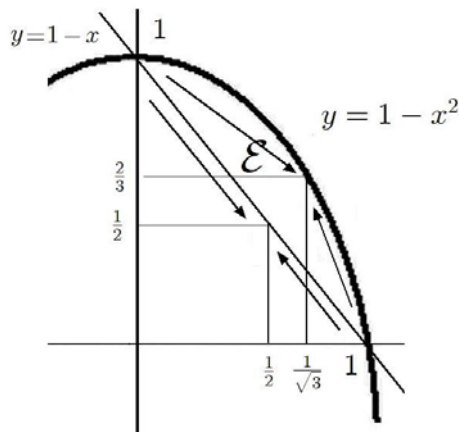
$f'(x) = 1 - 3x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, ovvero la funzione è crescente per

$0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$ e decrescente per $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 1$ per cui il punto $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ risulta punto di massimo, concordemente con quanto visto al punto 3).

Il punto $(1, 0)$, con $\lambda_1 = -2 < 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$ poteva essere punto di minimo e questo è confermato dallo studio sulla frontiera;

il punto $(0, 1)$, con $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -1 < 0$ poteva essere punto di minimo e questo è confermato dallo studio sulla frontiera.

In conclusione i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$, con $f(1, 0) = f(0, 1) = 0$ risultano i punti di minimo del problema, il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)$, con $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ risulta essere il punto di massimo del problema.



II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = e \end{cases}$.

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili. Posto $y \neq 0$ avremo:

$$\frac{1}{y} y' = x \text{ e passando alle primitive: } \int \frac{1}{y} y' dx = \int \frac{1}{y} dy = \int x dx + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y = \frac{x^2}{2} + k \Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2} + k}.$$

Da $y(0) = e$ otteniamo $y(0) = e^k = e \Rightarrow k = 1$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è $y = e^{\frac{x^2}{2}+1}$.

Notiamo infine che la $y = 0$ è una funzione che soddisfa l'equazione differenziale, ed è una soluzione particolare in quanto ottenuta per $k \rightarrow -\infty$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = 2y + t \\ y' = 2x - t \end{cases}$.

Scriviamo il sistema nella forma $\begin{cases} x' - 2y = t \\ -2x + y' = -t \end{cases}$ e quindi, passando alla forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} D & -2 \\ -2 & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} D & -2 \\ -2 & D \end{vmatrix} (x) = \begin{vmatrix} t & -2 \\ -t & D \end{vmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow (D^2 - 4)(x) = (D)(t) - 2t = 1 - 2t.$$

Quindi l'equazione sarà: $x'' - 4x = 1 - 2t$.

Risolvendo l'equazione omogenea, da $\lambda^2 - 4 = 0$ abbiamo $\lambda = \pm 2$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, visto il termine noto, dovremo ipotizzare una soluzione del tipo $x_0(t) = at + b$.

Sarà: $x'_0(t) = a, x''_0(t) = 0$ e quindi, andando a sostituire nella $x'' - 4x = 1 - 2t$ otteniamo:

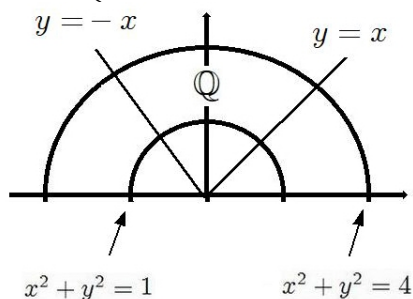
$$0 - 4at - 4b = 1 - 2t \Rightarrow \begin{cases} -4a = -2 \\ -4b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \text{ e quindi la soluzione dell'equazione non omogenea sarà: } x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.$$

Dalla prima equazione $x' - 2y = t$ ricaviamo $y = \frac{1}{2}(x' - t)$ e quindi:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left(2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} - t \right) \text{ e quindi la soluzione generale del sistema sarà: } \\ \begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ y(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{cases}.$$

II M 4) Calcolare $\int\limits_{\mathbb{Q}} x^2 y \, dx \, dy$, $\mathbb{Q} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -x, y \geq x\}$.

Vista la regione di integrazione $\mathbb{Q} = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -x, y \geq x\}$



avremo, passando a coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{Q}} \int x^2 y \, dx \, dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \varrho^3 \cos^2 \vartheta \, \text{sen } \vartheta \cdot \varrho \, d\varrho \, d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 \varrho^4 \cos^2 \vartheta \, \text{sen } \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta = \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{1}{5} \varrho^5 \right) \Big|_1^2 \cos^2 \vartheta \, \text{sen } \vartheta \, d\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{5} (32 - 1) \cos^2 \vartheta \, \text{sen } \vartheta \, d\vartheta = \\
&= \frac{31}{5} \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{31}{15} \left(\left(-\cos^3 \frac{3\pi}{4} \right) - \left(-\cos^3 \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{31}{15} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \\
&= \frac{31}{15} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{31}{15\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$