

COMPITO di MATEMATICA GENERALE 6/7/2026

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^2 e^x$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \frac{(\rightarrow +\infty)}{(\rightarrow +\infty)} = 0^+ \text{ in quanto } x^2 = o(e^{-x});$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = (\rightarrow +\infty)(\rightarrow +\infty) = +\infty.$$

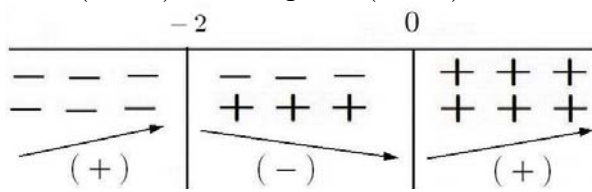
Quindi abbiamo asintoto orizzontale sulla sinistra di equazione $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty.$$

Non ci sono asintoti obliqui sulla destra.

$$f(x) = x^2 e^x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0.$$

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x \geq 0 \text{ per } x(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \cup x \geq 0.$$



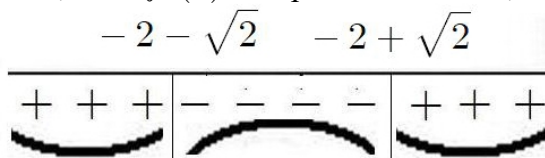
La funzione è crescente per $x < -2$ e per $x > 0$, decrescente per $-2 < x < 0$.

Quindi in $x = -2$ abbiamo un punto di massimo, con $f(-2) = \frac{4}{e^2}$, in $x = 0$ un punto di minimo, con $f(0) = 0$.

Da $f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$ avremo poi :

$$f''(x) = (2x+2) \cdot e^x + (x^2+2x) \cdot e^x = e^x \cdot (x^2+4x+2) \geq 0 \Rightarrow x^2+4x+2 \geq 0 \Rightarrow$$

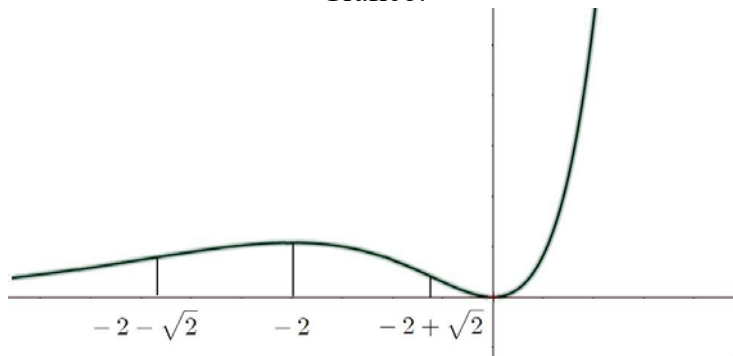
$$x = -2 \pm \sqrt{4-2} = -2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow f''(x) > 0 \text{ per } x < -2 - \sqrt{2} \text{ e per } x > -2 + \sqrt{2}.$$



Quindi $f(x)$ è funzione concava per $-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}$, è funzione convessa per $x < -2 - \sqrt{2}$ e per $x > -2 + \sqrt{2}$.

Nei punti $F_1 : x = -2 - \sqrt{2}$ e $F_2 : x = -2 + \sqrt{2}$ abbiamo due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \log x}{3x - \log^2 x}.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \log x}{3x - \log^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

in quanto $\log x = o(x)$ e $\log^2 x = o(3x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

3) Data la funzione $f(x) = 2x - 3$ sia $f(g(x)) = e^{2x+1} + 3$; determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e poi della funzione inversa di $g(x)$.

$$\text{Sarà } f(g(x)) = 2g(x) - 3 = e^{2x+1} + 3 \Rightarrow 2g(x) = e^{2x+1} + 6 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + 3.$$

$$\text{Da } g(x) = \frac{1}{2} e^{2x+1} + 3 = y \Rightarrow \frac{1}{2} e^{2x+1} = y - 3 \Rightarrow e^{2x+1} = 2y - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = \log(2y - 6) \Rightarrow 2x = \log(2y - 6) - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} (\log(2y - 6) - 1)$$

$$\text{e quindi l'inversa: } g^{-1}(x) = \frac{1}{2} (\log(2x - 6) - 1) = \log \sqrt{2x - 6} - \frac{1}{2}.$$

4) Data la funzione $f(x) = x \log x$, determinare il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico di tale funzione risulta una retta parallela alla retta di equazione $y = 2x - 1$.

C.E.: $\mathbb{R}_+^*$, la funzione è continua e derivabile $\forall x > 0$.

Per avere la retta tangente parallela alla retta di equazione $y = 2x - 1$, la retta tangente deve avere coefficiente angolare uguale a 2, cioè la derivata nel punto x_0 deve essere uguale a 2.

$$\text{Da } f(x) = x \log x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1 = 2 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x_0 = e.$$

$$5) \text{ Calcolare } \int_0^1 3e^{2x} - 2e^{3x} + 1 \, dx.$$

Determinata una primitiva ($c = 0$), avremo:

$$\int_0^1 3e^{2x} - 2e^{3x} + 1 \, dx = \left(\frac{3}{2} e^{2x} - \frac{2}{3} e^{3x} + x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{3}{2} e^2 - \frac{2}{3} e^3 + 1 \right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + 0 \right) =$$

$$= \frac{3}{2} e^2 - \frac{2}{3} e^3 + 1 - \frac{5}{6} = \frac{3}{2} e^2 - \frac{2}{3} e^3 + \frac{1}{6}.$$

6) Data la funzione $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$, si determini la natura dei suoi punti stazionari.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (3y - 3x^2; 3x - 3y^2) \text{ per cui:}$$

$$\begin{cases} 3y - 3x^2 = 0 \\ 3x - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x - 3x^4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(1 - x^3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Abbiamo quindi due punti stazionari: $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

$$\text{Essendo poi } \mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{vmatrix}, \text{ avremo:}$$

$$\mathbb{H}(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -9 < 0 \text{ per cui } (0,0) \text{ è un punto di sella;}$$

$$\mathbb{H}(1,1) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -6 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 36 - 9 > 0 \end{cases} \text{ per cui } (1,1) \text{ è un punto di massimo.}$$

7) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = (m, 1, k)$, si determini la relazione che deve intercorrere tra m e k affinché i due vettori $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}_2 = \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risultino perpendicolari.

Risulta:

$$\mathbb{Y}_1 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m \\ 1 \\ k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 \\ 1+k \end{vmatrix},$$

$$\mathbb{Y}_2 = \mathbb{B} \cdot \mathbb{X} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m \\ 1 \\ k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-k \\ m-1 \end{vmatrix}, \text{ e quindi:}$$

$$\mathbb{Y}_1 \cdot \mathbb{Y}_2 = (m+1, 1+k) \cdot (1-k, m-1) = m+1 - km - k + m + mk - 1 - k \Rightarrow$$

$$\mathbb{Y}_1 \cdot \mathbb{Y}_2 = 2m - 2k. \text{ Per avere vettori perpendicolari deve essere:}$$

$$\mathbb{Y}_1 \cdot \mathbb{Y}_2 = 0 \Rightarrow 2m - 2k = 0 \text{ e quindi deve essere } m = k.$$

8) Determinare il gradiente della funzione $f(x, y, z) = e^{x-3y} - \sin(xz) + \log(yz^2)$ nel punto $(0, 1, 1)$.

Avremo:

$$\nabla f(x, y, z) = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(e^{x-3y} - z \cos(xz); -3e^{x-3y} + \frac{z^2}{yz^2}; -x \cos(xz) + \frac{2yz}{yz^2} \right)$$

$$\text{ovvero: } \nabla f(x, y, z) = \left(e^{x-3y} - z \cos(xz); -3e^{x-3y} + \frac{1}{y}; -x \cos(xz) + \frac{2}{z} \right)$$

$$\text{e quindi } \nabla f(0, 1, 1) = (e^{-3} - 1; -3e^{-3} + 1; -0 + 2) = (e^{-3} - 1; -3e^{-3} + 1; 2).$$

9) Scrivere la tavola di verità della proposizione: $[\mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \wedge \mathbb{C})] \Leftrightarrow [\text{non}(\mathbb{A} \vee \mathbb{C})]$ nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{B}$ sia sempre vera.

Costruita la tavola di verità con le sole righe dove $\mathbb{B}$ è vera:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{B} \wedge \mathbb{C}$	$P_1: \mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \wedge \mathbb{C})$	$\mathbb{A} \vee \mathbb{C}$	$P_2: \text{non}(\mathbb{A} \vee \mathbb{C})$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1

risulta che la proposizione $[\mathbb{A} \Rightarrow (\mathbb{B} \wedge \mathbb{C})] \Leftrightarrow [\text{non}(\mathbb{A} \vee \mathbb{C})]$ è vera in seconda e quarta riga.

10) Determinare il Campo d'esistenza della funzione $f(x) = \log(1 - \log x)$.

Dovrà essere:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < e \end{cases} \text{ e quindi sarà C.E. } =]0, e[\text{ ovvero } 0 < x < e.$$