

COMPITO di MATEMATICA GENERALE 1/9/2026

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 2e^x - e^{2x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - e^{2x} = 0 - 0 = 0^+ : e^{2x} = o(e^x) \text{ per } x \rightarrow -\infty;$$

quindi abbiamo asintoto orizzontale sulla sinistra di equazione $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - e^{2x} = (-\infty + \infty - \infty) = -\infty : e^x = o(e^{2x}) \text{ per } x \rightarrow +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - e^{2x}}{x} = -\infty.$$

Non ci sono asintoti obliqui sulla destra.

$$f(x) = 2e^x - e^{2x} = e^x(2 - e^x) \geq 0 \text{ per } e^x \leq 2 \Rightarrow x \leq \log 2; f(\log 2) = 0; f(0) = 1.$$

$$f'(x) = 2e^x - 2e^{2x} = 2e^x(1 - e^x) \geq 0 \text{ per } e^x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0.$$

La funzione è crescente per $x < 0$, decrescente per $0 < x$.

Quindi in $x = 0$ abbiamo un punto di massimo, con $f(0) = 1$.

Da $f'(x) = 2e^x - 2e^{2x}$ avremo poi :

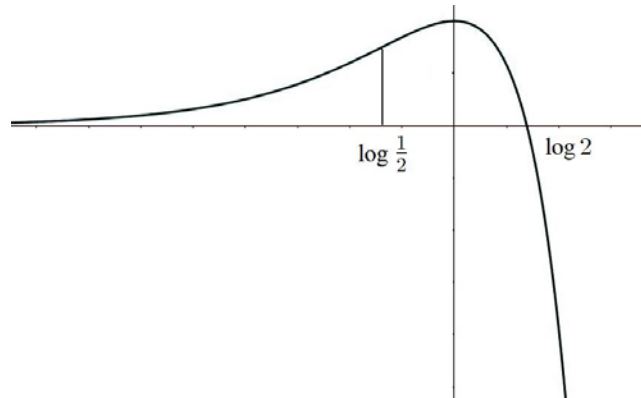
$$f''(x) = 2e^x - 4e^{2x} = 2e^x \cdot (1 - 2e^x) \geq 0 \Rightarrow e^x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq \log \frac{1}{2} = -\log 2.$$

Quindi $f(x)$ è funzione convessa per $x \leq \log \frac{1}{2}$, è funzione concava per $x \geq \log \frac{1}{2}$.

Nel punto $F : x = \log \frac{1}{2}$, con $f\left(\log \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$, abbiamo un punto di flesso.

$$f\left(\log \frac{1}{2}\right) = 2e^{\log \frac{1}{2}} - e^{2\log \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} - e^{\log \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sin x}{2x - \cos x} \right)^x.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{2}{3} - \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{da } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sin x}{2x - \cos x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 0^+$$

in quanto $\sin x = o(x)$ e $\cos x = o(2x)$ per $x \rightarrow +\infty$.

3) Date le funzioni $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ e $g(x) = e^x$, determinare dove risulti invertibile la funzione $f(g(x))$, nonché l'espressione della sua funzione inversa.

Sarà $f(g(x)) = F(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2}$ funzione definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Da $F(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2} \Rightarrow F'(x) = \frac{e^x(e^x + 2) - e^x(e^x - 3)}{(e^x + 2)^2} = \frac{5e^x}{(e^x + 2)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

e quindi funzione continua e strettamente crescente e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$.

Da $F(x) = \frac{e^x - 3}{e^x + 2} = y \Rightarrow e^x - 3 = e^x y + 2y \Rightarrow e^x(1 - y) = 2y + 3 \Rightarrow e^x = \frac{2y + 3}{1 - y} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = \log \frac{2y + 3}{1 - y}$ e quindi l'inversa: $F^{-1}(x) = \log \frac{2x + 3}{1 - x}$.

4) Sapendo che la retta di equazione $y = 3x + k$ risulta tangente al grafico della parabola di equazione $f(x) = x^2 + x + 1$, determinare il valore x_0 del punto di tangenza ed il valore del parametro k .

Vista l'equazione della retta $y = 3x + k$ e quindi il suo coefficiente angolare $m = 3$, per determinare il valore x_0 del punto di tangenza dobbiamo vedere dove la derivata della funzione risulta uguale a 3 per cui, da $f(x) = x^2 + x + 1$ segue $f'(x) = 2x + 1$ e posto $2x + 1 = 3$ otteniamo $2x = 2 \Rightarrow x_0 = 1$. Per determinare il valore del parametro k dovremo imporre che nel punto $x_0 = 1$ la parabola e la retta assumano lo stesso valore per cui;

$f(1) = 1 + 1 + 1 = y(1) = 3 + k \Rightarrow 3 = 3 + k \Rightarrow k = 0$.

Quindi la retta tangente avrà equazione $y = 3x$.

5) Calcolare $\int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x} dx$.

Dato che $\int_0^1 \frac{2e^x}{1+e^x} dx = 2 \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$, vediamo che il numeratore e^x è la derivata del denominatore $1 + e^x$, e questo porta alla derivata di una funzione del tipo $\log f(x)$, per cui, determinata una primitiva ($c = 0$), avremo:

$$2 \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = 2(\log(1+e^x))|_0^1 = 2(\log(1+e) - \log(1+1)) =$$

$$= 2(\log(1+e) - \log 2) = 2 \log\left(\frac{1+e}{2}\right) = \log\left(\frac{1+e}{2}\right)^2.$$

6) Analizzare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2y - 2xy + y^2$.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (2xy - 2y, x^2 - 2x + 2y)$ per cui:

$$\begin{cases} 2xy - 2y = 0 \\ x^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(x - 1) = 0 \\ x^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x = x(x - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ed inoltre}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ 1 - 2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi tre punti stazionari: $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(1, \frac{1}{2})$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} 2y & 2x-2 \\ 2x-2 & 2 \end{vmatrix}$, avremo:

$$\mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -4 < 0 \text{ per cui } (0, 0) \text{ è un punto di sella;}$$

$$\mathbb{H}(2, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -4 < 0 \text{ per cui } (2, 0) \text{ è un punto di sella;}$$

$$\mathbb{H}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 1 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 2 - 0 > 0 \end{cases} \text{ per cui } \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ è un punto di minimo.}$$

7) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, si determinino i valori dei

parametri m e k per i quali il vettore $\mathbb{Y}_0 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $\mathbb{Y}_1 = (3, 4, 3)$ e si determini poi la relazione che deve sussistere tra m e k affinché il vettore $\mathbb{Y}_0 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulti invece perpendicolare allo stesso vettore $\mathbb{Y}_1 = (3, 4, 3)$.

Risulta:

$$\mathbb{Y}_0 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2-1 \\ 1+2m+1 \\ 2+0+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2m+2 \\ 2+k \end{pmatrix},$$

e quindi $\mathbb{Y}_0 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $\mathbb{Y}_1 = (3, 4, 3)$ se:

$$\frac{3}{3} = \frac{2m+2}{4} = \frac{2+k}{3} \text{ che risulta banalmente soddisfatta per } m = 1 \text{ e } k = 1.$$

Per avere $\mathbb{Y}_0 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ perpendicolare al vettore $\mathbb{Y}_1 = (3, 4, 3)$ dovrà risultare:

$$(3, 2m+2, 2+k) \cdot (3, 4, 3) = 9 + 8m + 8 + 6 + 3k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}(23 + 8m).$$

8) Sia $f(x)$ una funzione definita, continua, derivabile due volte e convessa $\forall x \in \mathbb{R}$. Cosa possiamo dedurre circa la convessità per la funzione $F(x) = e^{f(x)} - x$?

Convessità e concavità per una funzione derivabile due volte si determinano mediante il segno della derivata seconda, per cui:

$$\begin{aligned} F(x) &= e^{f(x)} - x \Rightarrow F'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow F''(x) = e^{f(x)} \cdot (f'(x))^2 + e^{f(x)} \cdot f''(x) \Rightarrow F''(x) = e^{f(x)} [(f'(x))^2 + f''(x)]. \end{aligned}$$

Dato che $f(x)$ è una funzione convessa risulta $f''(x) \geq 0$ e quindi $F''(x) \geq 0$, ovvero anche la funzione $F(x) = e^{f(x)} - x$ risulta una funzione convessa.

9) Date le quattro proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ si costruisca la tavola di verità della proposizione: $[(\mathbb{A} \Rightarrow \text{non } \mathbb{C}) \wedge (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{D})] \Leftrightarrow (\mathbb{B} \circ \mathbb{D})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{B}$ è sempre falsa mentre la proposizione $\mathbb{C}$ è sempre vera.

Costruita la tavola di verità con le sole righe dove $\mathbb{B}$ è falsa mentre $\mathbb{C}$ è vera:

A	B	C	D	non C	$P_1: A \Rightarrow \text{non C}$	$P_2: B \Rightarrow D$	$P_1 \vee P_2$	$P_3: B \vee D$	$[P_1 \vee P_2] \Leftrightarrow P_3$
1	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0

risulta che la proposizione $[(A \Rightarrow \text{non C}) \vee (B \Rightarrow D)] \Leftrightarrow (B \vee D)$ è vera in seconda e terza riga.

10) Determinare dove risulta crescente e dove decrescente la funzione $f(x) = x^2 \log^2 x$, determinando anche gli eventuali punti di massimo e di minimo.

Crescenza e decrescenza per una funzione derivabile si determinano mediante il segno della derivata prima, per cui:

$$\text{Da } f(x) = x^2 \log^2 x \Rightarrow f'(x) = 2x \log^2 x + x^2 \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} = 2x \log^2 x + 2x \log x =$$

$$f'(x) = 2x \log x (\log x + 1).$$

Dato che per il Campo di esistenza risulta $x > 0$, sarà $f'(x) \geq 0$ per $\log x \cdot (\log x + 1) \geq 0$

per cui $\begin{cases} \log x \geq 0 \\ \log x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \log x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{e} \end{cases}$ e quindi:

0	(+)	$\frac{1}{e}$	(-)	1	(+)
—	—	—	—	—	—
—	—	—	+	+	+
—	—	—	+	+	+
—	—	—	+	+	+

la funzione è crescente per $0 < x < \frac{1}{e}$ e per $1 < x$, decrescente per $\frac{1}{e} < x < 1$.

In $x = \frac{1}{e}$ abbiamo un punto di massimo, con $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}$, in $x = 1$ abbiamo un punto di minimo, con $f(1) = 0$.