

COMPITO di MATEMATICA GENERALE 15/9/2026

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$.

C.E.: $\mathbb{R}$, la funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \cdot e^x = (+\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x}{e^{-x}} = 0^+ : x^2 - x = o(e^{-x}) \text{ se } x \rightarrow -\infty;$$

quindi abbiamo asintoto orizzontale sulla sinistra di equazione $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) \cdot e^x = (\rightarrow +\infty)(\rightarrow +\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - x) \cdot e^x}{x} = +\infty. \text{ Non ci sono asintoti obliqui sulla destra.}$$

$$f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x = x(x - 1)e^x \geq 0 \text{ per } x(x - 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \cup x \geq 1;$$

$$f(0) = f(1) = 0.$$

$$f'(x) = (2x - 1) \cdot e^x + (x^2 - x) \cdot e^x = e^x (x^2 + x - 1) \geq 0 \text{ per } x^2 + x - 1 \geq 0.$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Quindi } f'(x) \geq 0 \text{ per } x \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ e per } x \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

La funzione è crescente per $x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ e per $x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, la funzione è decrescente per $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

In $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ abbiamo un punto di massimo, in $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ un punto di minimo.

Da $f'(x) = (x^2 + x - 1)e^x$ avremo poi :

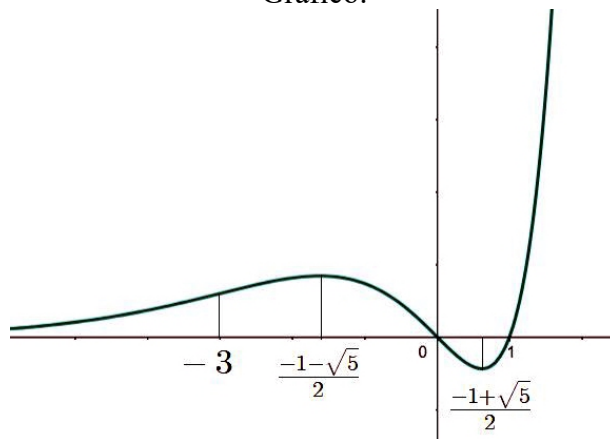
$$f''(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x - 1)e^x = (x^2 + 3x)e^x \geq 0 \Rightarrow x^2 + 3x \geq 0 \Rightarrow$$

$$x(x + 3) \geq 0 \Rightarrow x \leq -3 \cup x \geq 0.$$

La funzione è convessa per $x < -3$ e per $x > 0$, la funzione è concava per $-3 < x < 0$.

Nei punti $F_1 : x = -3$, e $F_2 : x = 0$, abbiamo due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + 3x}{3 + 2x} \right)^x.$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+3x}{3+2x} \right)^x = \left(\frac{3}{2} \right)^{(x \rightarrow +\infty)} = +\infty.$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{kx} - 1} = 2.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{kx} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \frac{kx}{e^{kx} - 1} \cdot \frac{2}{k} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{k} = \frac{2}{k} = 2 \Rightarrow k = 1$$

da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

4) Data la funzione $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ sapendo che $f(g(x)) = e^{x-1}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione $g(x)$, di quest'ultima si determini l'espressione della sua funzione inversa.

Sarà $f(g(x)) = \frac{g(x)-3}{g(x)+2}$. Posto :

$$f(g(x)) = \frac{g(x)-3}{g(x)+2} = e^{x-1} \Rightarrow g(x) - 3 = (g(x) + 2)e^{x-1} \Rightarrow g(x)(1 - e^{x-1}) = 3 + 2e^{x-1} \\ \Rightarrow g(x) = \frac{3 + 2e^{x-1}}{1 - e^{x-1}}.$$

Da $\frac{3 + 2e^{x-1}}{1 - e^{x-1}} = y \Rightarrow 3 + 2e^{x-1} = y - ye^{x-1} \Rightarrow e^{x-1}(2 + y) = y - 3 \Rightarrow e^{x-1} = \frac{y-3}{y+2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x - 1 = \log \left(\frac{y-3}{y+2} \right) \Rightarrow x = \log \frac{y-3}{y+2} + 1$ e quindi l'inversa : $g^{-1}(x) = \log \frac{x-3}{x+2} + 1.$

5) Calcolare $\int_0^1 \frac{2}{2x+1} dx.$

Vediamo che il numeratore 2 è la derivata del denominatore $2x+1$, e questo porta alla derivata di una funzione del tipo $\log f(x)$, per cui, determinata una primitiva ($c=0$), avremo:

$$\int_0^1 \frac{2}{2x+1} dx = (\log(2x+1))|_0^1 = \log 3 - \log 1 = \log 3.$$

6) Data $f(x, y) = 2x + 3y - x^2 - y^2 + 1$, si determini la natura del suo punto stazionario.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$\nabla f(x, y) = (f'_x, f'_y) = (2 - 2x; 3 - 2y)$ per cui:

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 3 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi un solo punto stazionario: $(1, \frac{3}{2})$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}\left(1, \frac{3}{2}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$, avremo:

$$\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -2 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 4 - 0 > 0 \end{cases} \text{ per cui } (1, \frac{3}{2}) \text{ è un punto di massimo.}$$

7) Determinare il valore del parametro k per cui $\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 0$.

Risulta:

$$\| \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & -1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \| \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2+k \\ k-1 \end{pmatrix} \right\| = 4 + 2k + k - 1 = 3k + 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1.$$

8) La funzione $f(x) = e^{x-1}$ ha nel punto x_0 una retta tangente al grafico che risulta perpendicolare alla retta di equazione $y = 2 - x$. Determinare x_0 .

Se la retta tangente al grafico risulta perpendicolare alla retta di equazione $y = 2 - x$ significa che il suo coefficiente angolare è uguale a $-\frac{1}{m} = -1 \Rightarrow m = 1$.

Dovrà quindi essere $f'(x_0) = 1 \Rightarrow e^{x_0-1} = 1 \Rightarrow x_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$.

9) Si determini se la proposizione $P : [\mathbb{A} \circ (\mathbb{B} \Rightarrow \text{non } \mathbb{A})]$ risulta una tautologia.

Costruita la tavola di verità :

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\text{non } \mathbb{A}$	$\mathbb{B} \Rightarrow \text{non } \mathbb{A}$	$\mathbb{A} \circ (\mathbb{B} \Rightarrow \text{non } \mathbb{A})$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

come si vede dall'ultima colonna la proposizione $P : [\mathbb{A} \circ (\mathbb{B} \Rightarrow \text{non } \mathbb{A})]$ risulta una tautologia.

10) Data la funzione $f(x) = x^2 \cdot \log x$, si determinare l'intervallo nel quale la funzione risulta convessa.

Convessità e concavità per una funzione derivabile due volte si determinano mediante il segno della derivata seconda, per cui:

$$\text{Da } f(x) = x^2 \cdot \log x \Rightarrow f'(x) = 2x \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \log x + x \Rightarrow \\ \Rightarrow f''(x) = 2 \log x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \log x + 3 \geq 0 \Rightarrow \log x \geq -\frac{3}{2} \Rightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}.$$

La funzione risulta concava per $0 < x < \frac{1}{e\sqrt{e}}$, convessa per $\frac{1}{e\sqrt{e}} < x$.

In $x = \frac{1}{e\sqrt{e}}$ abbiamo un punto di flesso, con $f\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$.