Prova Intermedia Anno 2026- Compito $\mathbb{A}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2\operatorname{sen}3x}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x+2}\right)^x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{2\operatorname{sen}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen}3x}=\log 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{6}\log 3=\log\sqrt[6]{3}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+3}{3x+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2+1}{3x+2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+2}\right)^{3x+2}\right]^{\frac{x}{3x+2}}=$$
$$=(e)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}.$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{1-\log\left(e^x-1\right)}$.

Dovrà essere :
$$\begin{cases}e^x-1>0\\1-\log\left(e^x-1\right)\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x>1\\\log\left(e^x-1\right)\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\e^x-1\leq e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\e^x\leq e+1\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x\leq\log\left(e+1\right)\end{cases}\text{ e quindi } \mathcal{C}.\mathcal{E}.:\,]0;\log\left(e+1\right)]\text{ ovvero } 0<x\leq\log\left(e+1\right).$$

3) Date le funzioni $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x)=3^x-1$ e $h(x)=x+3$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

Sarà $f(g(h(x)))=f(g(x+3))=f\left(3^{x+3}-1\right)=\dfrac{3^{x+3}-1+2}{3^{x+3}-1-1}=\dfrac{3^{x+3}+1}{3^{x+3}-2}$.
Da $\dfrac{3^{x+3}+1}{3^{x+3}-2}=y\Rightarrow 3^{x+3}+1=y\left(3^{x+3}-2\right)\Rightarrow 3^{x+3}(y-1)=2y+1\Rightarrow 3^{x+3}=\dfrac{2y+1}{y-1}$
$\Rightarrow x+3=\log_3\left(\dfrac{2y+1}{y-1}\right)\Rightarrow x=\log_3\left(\dfrac{2y+1}{y-1}\right)-3$
e quindi la funzione inversa: $y=\log_3\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)-3=\log_3\left(\dfrac{2x+1}{27(x-1)}\right)$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{B}\,e\,non\,\mathbb{C})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $\mathbb{B}$ sia vera.

Formata la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$non\,\mathbb{C}$	$P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	$P_2:\mathbb{B}\,e\,non\,\mathbb{C}$	$P_1\Leftrightarrow P_2$
1	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1

vediamo che la proposizione $(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{B}\,e\,non\,\mathbb{C})$ è vera quando $\mathbb{C}$ è falsa, con $\mathbb{A}$ sia vera che falsa.

5) Date le funzioni $f(x)=2^{x^2-1}+3$ e $g(x)=\log_2(x-4)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore dell'area del triangolo AOB.

Risulta :
$f(0)=2^{0-1}+3=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$ mentre $g(x)=\log_2(x-4)=0$ se $x-4=1\Rightarrow x=5$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot 5=\frac{35}{4}$.

Prova Intermedia Anno 2026- Compito $\mathbb{B}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{\log(1-2x)}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+2}\right)^{1-x}$.

$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{\log(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot\frac{3x}{-2x}\cdot\frac{-2x}{\log(1-2x)}=1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 1=-\frac{3}{2}$.
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+2}\right)^{1-x}=\left(\to\frac{1}{2}\right)^{(\to-\infty)}=+\infty$.

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{1-\log_3(3^x-1)}$.

Dovrà essere :
$\begin{cases}3^x-1>0\\1-\log_3(3^x-1)\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^x>1\\\log_3(3^x-1)\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\3^x-1\leq 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\3^x\leq 4\end{cases}\Rightarrow$
$\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x\leq\log_3 4\end{cases}$ e quindi $\mathcal{C}.\mathcal{E}.:]0;\log_3 4]$ ovvero $0<x\leq\log_3 4$.

3) Date le funzioni $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$, $g(x)=\log x$ e $h(x)=x-3$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione dell'inversa.

$f(g(h(x)))=f(g(x-3))=f(\log(x-3))=\frac{\log(x-3)+1}{\log(x-3)+2}$.
Da $\frac{\log(x-3)+1}{\log(x-3)+2}=y\Rightarrow\log(x-3)+1=y(\log(x-3)+2)\Rightarrow$
$\Rightarrow\log(x-3)(1-y)=2y-1\Rightarrow\log(x-3)=\frac{2y-1}{1-y}\Rightarrow x-3=e^{\frac{2y-1}{1-y}}\Rightarrow x=e^{\frac{2y-1}{1-y}}+3$
e quindi la funzione inversa: $y=e^{\frac{2x-1}{1-x}}+3$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\,o\,non\,\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $\mathbb{A}$ sia falsa.

Formata la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$non\,\mathbb{B}$	P_1:$\mathbb{A}\,o\,non\,\mathbb{B}$	$P_2:\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{B}$	$P_1\Rightarrow P_2$
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

vediamo che la proposizione $(\mathbb{A}\,o\,non\,\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{B})$ è falsa solo quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ sono false mentre $\mathbb{C}$ è vera.

5) Date le funzioni $f(x)=3^{1-x^2}+2$ e $g(x)=\log_4(x-1)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi. Determinare il valore dell'area del triangolo AOB.

Risulta $f(0)=3^{1-0}+2=5$ mentre $g(x)=\log_4(x-1)=0$ se $x-1=1\Rightarrow x=2$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 2=5$.

Prova Intermedia Anno 2026- Compito $\mathbb{C}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-(1+x)^2}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^x$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-(1+x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-1}{x}-\dfrac{(1+x)^2-1}{x}=4-2=2$, da
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$;
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{x}{2x}}=(e)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{1-\log_2(e^x-1)}$.

Dovrà essere:
$\begin{cases}e^x-1>0\\1-\log_2(e^x-1)\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^x>1\\\log_2(e^x-1)\leq 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\e^x-1\leq 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\e^x\leq 3\end{cases}\Rightarrow$
$\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x\leq\log 3\end{cases}$ e quindi: $\mathcal{C}.\mathcal{E}.:]0;\log 3]$ ovvero $0<x\leq\log 3$.

3) Date le funzioni $f(x)=\dfrac{2x}{2x+1}$, $g(x)=2^x$ e $h(x)=3x-1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$f(g(h(x)))=f(g(3x-1))=f\left(2^{3x-1}\right)=\dfrac{2\cdot 2^{3x-1}}{2\cdot 2^{3x-1}+1}=\dfrac{2^{3x-1+1}}{2^{3x-1+1}+1}=\dfrac{2^{3x}}{2^{3x}+1}$.
Da $\dfrac{2^{3x}}{2^{3x}+1}=y\Rightarrow 2^{3x}=y\left(2^{3x}+1\right)\Rightarrow 2^{3x}(1-y)=y\Rightarrow 2^{3x}=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = \log_2 \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \log_2 \frac{y}{1-y} \Rightarrow x = \log_2 \sqrt[3]{\frac{y}{1-y}}$ e quindi la funzione inversa: $y = \log_2 \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow non\,\mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{C}\, e\, \mathbb{A})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $\mathbb{C}$ sia vera.

Formata la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$non\,\mathbb{B}$	P_1: $\mathbb{A} \Rightarrow non\,\mathbb{B}$	P_2: $\mathbb{C}\, e\, \mathbb{A}$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

vediamo che la proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow non\,\mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{C}\, e\, \mathbb{A})$ è vera solo quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ sono vere mentre $\mathbb{B}$ è falsa.

5) Date le funzioni $f(x) = 2^{3x^2-1} + 1$ e $g(x) = \log_3 (x-3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, e sia O l'origine degli assi. Determinare il valore dell'area del triangolo AOB.

Risulta :
$f(0) = 2^{0-1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ mentre $g(x) = \log_3 (x-3) = 0$ se $x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 3$.

Prova Intermedia Anno 2026- Compito $\mathbb{D}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$; $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+4x}{1+3x}\right)^{1-x}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+4x}{1+3x}\right)^{1-x} = \left(\to \frac{4}{3}\right)^{(\to -\infty)} = 0^+$.

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{2 - \log_2 (2^x - 1)}$.

Dovrà essere :
$\begin{cases} 2^x - 1 > 0 \\ 2 - \log_2 (2^x - 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x > 1 \\ \log_2 (2^x - 1) \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2^x - 1 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2^x \leq 5 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \log_2 5 \end{cases}$ e quindi $\mathcal{C}.\mathcal{E}. :]0; \log_2 5]$ ovvero $0 < x \leq \log_2 5$.

3) Date le funzioni $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$, $g(x)=3x$ e $h(x)=\log x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$f(g(h(x)))=f(g(\log x))=f(3\log x)=\dfrac{3\log x}{3\log x+1}$.

Da $\dfrac{3\log x}{3\log x+1}=y \Rightarrow 3\log x=y(3\log x+1) \Rightarrow 3\log x\cdot(1-y)=y \Rightarrow 3\log x=\dfrac{y}{1-y}$

$\Rightarrow \log x=\dfrac{y}{3(1-y)} \Rightarrow x=e^{\frac{y}{3(1-y)}}$ e quindi la funzione inversa: $y=e^{\frac{x}{3(1-x)}}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(non\,\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ sotto l'ipotesi che la proposizione $\mathbb{B}$ sia vera.

Formata la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$non\,\mathbb{A}$	P_1:$non\,\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B}$	$P_2:\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C}$	$P_1\Rightarrow P_2$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0

La proposizione $(non\,\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono vere mentre $\mathbb{C}$ è falsa e quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ sono false mentre $\mathbb{B}$ è vera.

5) Date le funzioni $f(x)=3^{x-x^2}+1$ e $g(x)=\log_3(x-2)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi. Determinare il valore dell'area del triangolo AOB..

Risulta $f(0)=3^{0-0}+1=2$ mentre $g(x)=\log_3(x-2)=0$ se $x-2=1\Rightarrow x=3$ e quindi avremo: Area(AOB) $=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$.