PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2026/27

In colore blu gli argomenti già trattati, in colore nero quelli da trattare.

CORSO

NUMERI COMPLESSI: Introduzione agli argomenti del corso. Elementi di logica. Numeri Reali. Numeri complessi. L'unità immaginaria e le sue potenze. Numeri immaginari e numeri complessi. Piano complesso. Numeri complessi in forma algebrica. Non ordinabilità dei numeri complessi. Operazioni aritmetiche con i numeri complessi. Rappresentazione trigonometrica: modulo ed argomento di un numero complesso. Prodotto, reciproco e quoziente di numeri complessi in forma trigonometrica. Potenze ad esponente naturale ed intero di numeri complessi in forma trigonometrica. Radici di numeri complessi in forma trigonometrica. Potenze ad esponente razionale di numeri complessi. Esponenziale complessa: definizione e proprietà. Radici complesse di un'equazione di secondo grado. Teorema fondamentale dell'algebra. Logaritmi di un numero complesso.

FUNZIONI VETTORIALI DI VARIABILE VETTORIALE: Elementi di calcolo vettoriale. Operazioni sui vettori. Prodotto scalare. Modulo di un vettore.

Funzioni vettoriali di variabile reale: Curve e loro sostegno. Rappresentazione in forma parametrica di curve del piano. Limite, continuità e derivabilità per funzioni vettoriali di variabile reale. Regole di derivazione. Vettore tangente, equazione vettoriale della retta tangente.

Funzioni reali di variabile vettoriale: Campo d'esistenza, sua determinazione e rappresentazione. Definizione di limite finito al finito. Non esistenza del limite. Metodologie per lo studio di un limite: esame di percorsi particolari, curve di livello, limiti iterati. Coordinate polari nel piano. Uso delle coordinate polari per la determinazione dei limiti. Convergenza uniforme in coordinate polari. Definizione di funzione continua. Definizione di derivata in una direzione; derivate parziali. Derivabilità non implica continuità. Il vettore gradiente. Definizione di funzione differenziabile. Relazione tra differenziabilità, continuità e derivabilità in una direzione. Teorema del differenziale totale: differenziabilità e continuità delle derivate parziali. Derivate parziali e direzionali di ordine superiore: Teorema di Schwarz. Differenziabilità del secondo e degli ordini successivi. Differenziabilità degli ordini superiori ed uguaglianza delle derivate miste. Espressione formale dei differenziali del primo e degli ordini superiori. La matrice Hessiana. Polinomio di Taylor e MacLaurin. Iperpiano tangente ad una superficie. Funzioni convesse e concave. Convessità e piano tangente, convessità e segno del differenziale secondo.

Funzioni vettoriali di variabile vettoriale: Limiti, continuità, derivate parziali e direzionali. Definizione di funzione differenziabile. La matrice Jacobiana. Regola di derivazione di funzione composta per funzioni vettoriali di variabile vettoriale; sua espressione mediante prodotto di matrici Jacobiane. Derivate seconde di funzioni composte. Funzioni definite in forma implicita. Funzioni definite in forma implicita mediante una equazione in più incognite. Derivate prima e successive di funzioni definite implicitamente, differenziale secondo. Caso generale di funzione definita implicitamente mediante un sistema di m equazioni in m+n incognite. Teorema del Dini.

Quanto trattato fino a questo punto costituisce argomento della prova di valutazione intermedia.

Massimi e minimi: Ricerca dei punti di massimo e di minimo per funzioni di variabile vettoriale. Definizione di massimo e minimo relativo ed assoluto. Condizioni del primo ordine per funzioni differenziabili: annullamento del gradiente. Condizioni del secondo ordine: uso di concavità e convessità della funzione. Segno del differenziale secondo. Forme quadratiche: studio del loro segno. Forme quadratiche definite, semidefinite, indefinite. Metodi per la determinazione del segno di una forma quadratica: metodo dei minori di guida, dei minori principali, degli autovalori. Ricerca di massimi e minimi in un insieme compatto: Teorema di Weierstrass. Massimi e minimi in presenza di uno o più vincoli di uguaglianza. Vincoli in forma parametrica, in forma esplicita ed in forma implicita. La funzione Lagrangiana, i moltiplicatori. Condizioni del primo ordine e condizioni del secondo ordine per la ricerca di massimi e minimi vincolati mediante la Lagrangiana e la matrice Hessiana orlata. Regola del segno dei minori di guida nel caso generale di funzione di n variabili in presenza di m vincoli (m pari o m dispari). Massimizzazione in presenza di vincoli di disuguaglianza. Condizioni di Kuhn-Tucker. Qualificazione dei vincoli. Cono delle direzioni ammissibili e cono delle direzioni retroverse rispetto ai gradienti dei vincoli. Condizioni sufficienti per la qualificazione dei vincoli. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per la ricerca dei punti di massimo e di minimo.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE: Introduzione. Equazioni ordinarie del primo ordine. Problema di Cauchy. Teoremi di esistenza ed unicità. Principali tipi di equazioni differenziali del I ordine: equazione lineare del I ordine omogenea e non omogenea. Equazioni di Bernoulli. Equazioni a variabili separabili e tipi di equazioni riconducibili alle variabili separabili. Equazioni differenziali di ordine superiore. Teorema di Cauchy. Equivalenza con i sistemi di equazioni differenziali. Equazioni differenziali lineari omogenee e non omogenee. Teoremi generali. Spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea. Soluzioni linearmente indipendenti. Il Wronskiano. Soluzione generale dell'equazione non omogenea. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Polinomio caratteristico. Soluzione generale dell'equazione omogenea. Metodi per la ricerca di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea: variazione delle costanti, integrazioni successive, annichilatori. Sistemi di equazioni differenziali lineari. Soluzione generale del sistema omogeneo e soluzione generale del sistema non omogeneo. Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Equivalenza tra un sistema di n equazioni ed una equazione differenziale di ordine n. Metodi pratici per la soluzione di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee e non omogenee.

INTEGRALI DOPPI: Definizione di integrale doppio per funzioni costanti e costanti a tratti in un rettangolo. Definizione di integrale doppio per una funzione limitata in un rettangolo. Integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni limitate per le quali l'insieme delle discontinuità è un insieme di misura nulla. Domini normali rispetto agli assi. Integrali doppi in regioni definite da uno o più domini regolari. Riduzione di un integrale doppio a due integrazioni successive. Cambiamento di variabili negli integrali doppi.