PROGRAMMA DEL CORSO DI MATEMATICA GENERALE

A.A. 2026/27

In colore blu gli argomenti già trattati, in colore nero quelli da trattare.

Argomenti trattati nel precorso:

Insiemi, elementi, appartenenza, sottoinsiemi, inclusione, insieme vuoto, insieme universo, insieme delle parti. Operazioni sugli insiemi: complementare, unione, intersezione, differenza. Proprietà delle operazioni insiemistiche. Leggi di De Morgan. Tavole "di appartenenza" per la verifica di relazioni insiemistiche. Numeri naturali e le loro proprietà. I numeri interi e le loro proprietà. I numeri razionali e le loro proprietà. Numeri decimali finiti e decimali periodici. I numeri irrazionali. Esistenza dei numeri irrazionali. Sezioni nei razionali, elemento separatore.

Rette nel piano: equazione della retta, coefficiente angolare, determinazione del coefficiente angolare, aggiunta all'origine. Rette parallele e perpendicolari. Parabole: vertice, intersezioni con gli assi, grafico di una parabola. Disequazioni con polinomi di I^ e II^ grado. Circonferenza. Iperbole.

Funzioni circolari (trigonometriche): misura degli angoli in radianti, definizione di seno e coseno di un angolo. Tangente e cotangente di un angolo. Teoremi di trigonometria per i triangoli rettangoli: come trovare un cateto mediante l'ipotenusa e mediante l'altro cateto. Grafico delle funzioni senx, cosx, tgx, cotgx. Relazioni tra il seno ed il coseno di angoli opposti, complementari e supplementari. Formule di somma e sottrazione, duplicazione e bisezione. Disequazioni contenenti termini trigonometrici.

Potenze ad esponente naturale, intero e razionale. Proprietà delle potenze. Funzioni esponenziali: grafico delle funzioni esponenziali con base 0<a<1 e base a>1. Disequazioni contenenti termini di tipo esponenziale. Logaritmi: Definizione e proprietà dei logaritmi: logaritmo di un prodotto, di un quoziente e di una potenza; cambio di base in un logaritmo, reciproco di un logaritmo. Grafico delle funzioni logaritmiche con base 0<a<1 e a>1. Disequazioni contenenti termini logaritmici.

ELEMENTI DI LOGICA: Proposizioni, connettivi logici: non, e, o, implicazione, doppia implicazione. Tavole "di verità" di proposizioni logiche. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti. Tautologie. I quantificatori universale ed esistenziale. Insiemistica.

RELAZIONI E FUNZIONI: Prodotto cartesiano di due o più insiemi. Relazioni tra due insiemi. Relazioni in un insieme: proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva. Relazioni di equivalenza, classi di equivalenza, insieme quoziente. Relazioni di ordine. Relazioni di ordine parziale e totale. Elemento massimo e massimale, minimo e minimale. Definizione di funzione. Dominio e codominio, grafico, immagine, campo di esistenza, variabile indipendente e dipendente, immagine di un insieme. Funzioni di una o più variabili. Funzioni espresse mediante più leggi. Funzioni surgettive e iniettive. Corrispondenze biunivoche. Funzione inversa. Grafico di una funzione e grafico della sua inversa. Composizione di funzioni. Composizione di funzioni inverse.

I NUMERI REALI: Numeri Naturali. Cardinale di un insieme. Insiemi finiti ed infiniti. Insiemi numerabili. Numerabilità degli interi e dei razionali. Numeri in forma decimale. I numeri irrazionali. I numeri reali. Non numerabilità dei numeri reali. La retta reale. Il piano reale o Cartesiano. Definizione assiomatica dei numeri reali: assiomi della somma, del prodotto, dell'ordine e di completezza. Gli Intervalli. Definizione di estremo superiore ed inferiore. Insiemi limitati e

illimitati. Valore assoluto e sue proprietà, la funzione valore assoluto, la disuguaglianza triangolare. Disequazioni contenenti valori assoluti. Parte intera di un numero reale, la funzione parte intera.

ELEMENTI DI TOPOLOGIA: Definizione di distanza o metrica. Distanza Euclidea nella retta reale. Intorno di un punto. Definizione di punto di accumulazione, isolato, interno, di frontiera ed esterno. Derivato, interno, frontiera e chiusura di un insieme. Definizione di insieme aperto e di insieme chiuso. Intervalli aperti e chiusi, limitati e illimitati. Teorema di Bolzano-Weierstrass.

LIMITI E CONTINUITA´: La retta reale estesa o compattificata. Definizione topologica di limite. Definizione metrica di limite. Definizione di limite finito o infinito per una funzione quando la variabile tende ad un valore finito o infinito. Limite destro e limite sinistro. Limite per eccesso e per difetto. Non esistenza del limite. Definizione di funzione continua. Continuità da destra e da sinistra. Discontinuità di I^, II^ e III^ specie. Teorema di unicità del limite, della permanenza del segno, del confronto. Limite di somma, differenza, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni. Continuità di somma, differenza, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni. Limite della funzione composta. Continuità della funzione composta. Limiti delle funzioni elementari. Continuità delle funzioni elementari. Forme indeterminate di tipo aritmetico. Infinitesimi ed infiniti. Funzioni limitate e funzioni lontane da zero. Casi di limite non indeterminato nella somma, differenza, prodotto, reciproco e quoziente di funzioni infinite, infinitesime, limitate e lontane da zero. Limiti dei polinomi e dei quozienti di polinomi. Definizione di limite per successioni. Relazione tra limiti di successioni e limiti di funzioni. Definizione di successione e di funzione monotòna. Limiti di successioni e di funzioni monotòne. Il numero di Nepero "e". Logaritmi ed esponenziali a base naturale. Limiti e forme indeterminate per funzioni elevate funzioni. I limiti notevoli e loro applicazioni. Confronto tra infinitesimi e tra infiniti. Infinitesimi o infiniti di ordine superiore, dello stesso ordine e non confrontabili. La relazione di equivalenza asintotica e la relazione di "o piccolo"; loro definizione e loro proprietà. Principio di sostituzione per gli infinitesimi e per gli infiniti. Asintoti di una funzione: orizzontali, verticali ed obliqui. I Teoremi sulle funzioni continue in un intervallo: Teorema di Weierstrass (o del massimo e del minimo), Teorema di Darboux (o dei valori intermedi), Teorema degli zeri, Teorema della continuità della funzione inversa. Determinazione dell'espressione della funzione inversa. Funzioni potenza e loro inverse. Radice n-esima di un numero reale. Le inverse delle funzioni circolari: arcsenx, arccosx, arctgx. Loro grafici e proprietà.

Quanto trattato fino a questo punto costituiva argomento della prova di valutazione intermedia.

CALCOLO DIFFERENZIALE: Rapporto incrementale e suo significato geometrico. Definizione di funzione derivabile in un punto. Significato geometrico della derivata. Derivata destra e sinistra. Relazione tra continuità e derivabilità. Equazione della retta tangente. I tre casi di funzione continua ma non derivabile. Punti angolosi e punti di cuspide. Il differenziale, sua definizione e suo significato geometrico. Formula di approssimazione mediante il differenziale. Relazione tra derivabilità e differenziabilità. La funzione derivata. Funzioni derivate delle funzioni elementari. Regole di derivazione: derivata della somma, differenza, prodotto, reciproco, quoziente, composizione di funzioni e funzione inversa. Discontinuità della funzione derivata. Derivate successive. Punti di massimo e minimo relativo. Punti stazionari. Teorema di Fermat. Teoremi di Rolle e di Lagrange. Applicazioni e conseguenze del Teorema di Lagrange: funzioni a derivata nulla, funzioni a derivata positiva. Relazione tra la monotonia di una funzione ed il segno della sua derivata prima. Teoremi di De L'Hopital. Risoluzione delle forme indeterminate. Derivabilità e limite della funzione derivata. Polinomio di Taylor e di MacLaurin di una funzione. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza e l'unicità del polinomio di Taylor. Sviluppo del polinomio di MacLaurin per le funzioni: esponenziale, senx, cosx e log(1+x). Definizione di funzione convessa o

concava. Epigrafico di una funzione. Convessità e segno della derivata seconda. Punti di flesso. Metodo delle derivate successive per l'analisi dei punti stazionari. Studio dell'andamento del grafico di una funzione.

ALGEBRA LINEARE: Spazi vettoriali reali. Vettori. Operazioni sui vettori: somma di vettori e prodotto di un vettore per uno scalare. Combinazione lineare di vettori. Differenza di due vettori. Prodotto scalare di due vettori: definizione e proprietà. Modulo di un vettore. Distanza tra due vettori. Espressione del prodotto scalare mediante i moduli e l'angolo compreso tra i due vettori. Vettori perpendicolari. Matrici. Operazioni sulle matrici: somma, prodotto per uno scalare, prodotto righe per colonne. Trasposta di una matrice.

FUNZIONI DI PIU´ VARIABILI: Funzioni di più variabili o funzioni reali di variabile vettoriale. Determinazione e rappresentazione geometrica del loro campo di esistenza. Definizione di limite finito e definizione di funzione continua. Definizione di derivata parziale e suo significato geometrico. Vettore Gradiente. Derivate parziali successive. Teorema di Schwarz per le derivate miste. Definizione di funzione differenziabile. Relazione tra differenziabilità, continuità e derivabilità parziale. Teorema del differenziale totale. Piano tangente. Differenziali totali del primo e del secondo ordine. Polinomio di Taylor per una funzione di più variabili in forma analitica e in forma vettoriale. Matrice Hessiana. Funzioni convesse e funzioni concave. Massimi e minimi per funzioni di due variabili: condizioni del I^ e del II^ ordine per la loro determinazione.

INTEGRALE DI RIEMANN: Definizione di funzione integrabile. Integrale per funzioni costanti e costanti a tratti. Definizione di funzione integrabile per funzioni limitate. Integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni con un numero finito di discontinuità di I e III specie. Proprietà dell'integrale. La funzione integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive. Integrale indefinito; totalità delle primitive. Calcolo dell'integrale definito di una funzione continua mediante le primitive. Metodi per la ricerca delle primitive. Integrali immediati. Integrazione per sostituzione e integrazione per parti. Integrali generalizzati di prima specie: definizione e calcolo pratico.