Ancora sull'Equilibrio di Nash in Strategie Miste (ENSM)

Come detto in classe un ENSM è dato da un profilo di distribuzioni di probabilità, una per ciascun giocatore, sulle possibili scelte tali che ogni distribuzione è ottima contro le altre. Se una scelta ottiene probabilità 1 allora la strategia si dice pura, e l'equilibrio si dice di Nash in strategie pure (ENSP)

Prima di procedere è opportuno rammentare il seguente risultato fondamentale

TEOREMA di NASH

In un gioco con un numero finito di giocatori, ed un numero finito di scelte per ciascun giocatore, esiste sempre almeno un EN (in pure, in miste o in entrambi)

Quindi, anche se difficili da trovare, il teorema ci garantisce che giochi con moltissimi giocatori e moltissime strategie ciascuno hanno sempre almeno un EN. Lo sforzo di cercarli sarà quindi premiato.

Un punto da sottolineare ulteriormente è che in un ENSM tutte le scelte che ricevono probabilità positiva devono fornire lo stesso payoff atteso; infatti, le strategie che danno un payoff atteso inferiore devono ricevere probabilità nulla e scartate dalla scelta.

Ad esempio, considerate il gioco visto in classe, dove due individui devono scrivere un numero tra 1,2 e 3 ed i payoffs sono come nella tabella.

	1	2	3
1	1,1	0,0	0,0
2	0,0	1,1	0,0
3	0,0	0,0	1,1

Supponiamo che (p_1, p_2, p_3), con $p_i \geq 0$ e $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, dove p_i è la probabilità con cui il giocatore riga sceglie il numero $i = 1,2,3$, sia una strategia mista del giocatore riga, ed analogamente (q_1, q_2, q_3), con $q_i \geq 0$ e $q_1 + q_2 + q_3 = 1$, una del giocatore colonna. Allora la coppia $(p_1, p_2, p_3) = (1,0,0)$ e $(q_1, q_2, q_3) = (1,0,0)$ rappresenta l'ENSP in cui entrambi i giocatori scelgono il numero 1. Analogamente, $(p_1, p_2, p_3) = (0,1,0)$ e $(q_1, q_2, q_3) = (0,1,0)$ quello in cui entrambi scelgono il numero 2 e $(p_1, p_2, p_3) = (0,0,1)$ e $(q_1, q_2, q_3) = (0,0,1)$ quello in cui scelgono il numero 3.

Vi sono inoltre quattro ENSM, ed in particolare $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Infatti, se il giocatore riga si attende che colonna scelga con probabilità $\frac{1}{3}$ ciascuno dei tre numeri diventa indifferente tra le sue scelte. Questo perchè il profitto atteso di riga se scrive il numero i sarà $\mathrm{E}\Pi_R(i) = 0\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ per $i = 1,2,3$. Quindi, essendo completamente indifferente tra i tre numeri, può scegliere tra $i = 1,2,3$ in qualunque modo, inclusa la distribuzione $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Perciò la strategia $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è ottima contro $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Per simmetria anche $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$è ottima contro $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e quindi la coppia di strategie è un ENSM. Tuttavia, ve ne sono altri.

Infatti, anche la coppia di strategie $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ e $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ è un ENSM. Se riga si attende che colonna giochi $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ otterrà $\mathrm{E}\Pi_R(i) = 0\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + (0)0 = \frac{1}{2}$ se $i = 1,2$ ma

$E\Pi_R(3) = 0\frac{1}{3} + 0\frac{1}{3} + (0)0 = 0$. Per questo motivo non sarà mai ottimale per riga scrivere il numero 3 bensì il numero 1 oppure il numero 2. Tra 1 e 2 può scegliere con qualunque probabilità, quindi anche con $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ che è ottima contro $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Data la simmetria del gioco anche $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ è ottima contro $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ e quindi le due strategie sono un ENSM. E' facile mostrare con lo stesso ragionamento che quindi tutte le strategie in cui i due giocatori scelgono con probabilità $\frac{1}{2}$ la stessa coppia di numeri sono ENSM. Riassumendo, il gioco ha un totale di sette EN: tre ENSP e quattro ENSM.

Esercizi:

1) Perché $(p_1, p_2, p_3) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ e $(q_1, q_2, q_3) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ non è un ENSM?

2) Il gioco della morra cinese (sasso, forbici, carta) visto in classe

	C	S	F
C	0,0	1,0	0,1
S	0,1	1,1	1,0
F	1,0	0,1	1,1

non ha ENSP. Il Teorema di Nash ci garantisce che vi sono ENSM. Quali sono gli ENSM?