Esercizio

Considerate il gioco della maggioranza pesata con N partiti, dove N è dispari, in cui tutti i partiti eccetto il partito N-esimo, hanno un voto a disposizione. Il partito N -esimo ha invece voti $\frac{N-1}{2}$ a disposizione. Se le proposte in votazione hanno necessità di un numero di voti superiori al 50% per essere approvate, e se la funzione caratteristica è $v(S) = 1$, se i voti di S sono superiori al 50% altrimenti $v(S) = 0$ Ricavare il Core ed il Valore di Shapley del gioco.

Soluzione

(Valore di Shapley) Poiché solo il partito $N - esimo$ ha $\frac{N-1}{2}$ mentre tutti gli altri 1 voto ciascuno allora il totale dei voti sarà $(N-1) + \frac{N-1}{2} = \frac{3(N-1)}{2}$ quindi il 50% dei voti sarà $\frac{3(N-1)}{4}$. Il numero $\frac{3(N-1)}{4}$ può essere anche frazionario, in base al valore di N. Per semplificare l'illustrazione, senza perdere troppo in generalità, supponiamo che $\frac{3(N-1)}{4}$ voti siano il minimo per ottenere il 50%. Allora è immediato vedere che per il giocatore $N - esimo$ sono sufficienti $\frac{(N-1)}{4}$ voti per raggiungere il 50% dei voti. Quindi, è possibile notare immediatamente che il contributo marginale di Nsarà pari ad 1 in tutti quegli ordinamenti che hanno, a sinistra di N, coalizioni con almeno $\frac{(N-1)}{4}$ giocatori.

Siccome il giocatore N occupa la prima posizione in $(N-1)!$ ordinamenti, la seconda posizione in $(N-1)!$ e così via fino alla $N - esima$ posizione, sempre in $(N-1)!$, vi saranno N insiemi di $(N-1)!$ Per le varie posizioni di N (infatti $N! = N(N-1)!$ è il totale degli ordinamenti).

Quindi, il contributo marginale del giocatore N sarà pari ad 1 a partire dagli ordinamenti in cui a sinistra vi sono $\frac{(N-1)}{4}$ giocatori. Quindi vi saranno $N - \frac{N-1}{4} = \frac{3N+1}{4}$ insiemi di $(N-1)!$ ordinamenti in cui il contributo marginale del giocatore N è pari ad 1. Il suo valore di Shapley sarà pertanto

$$\varphi_N = \frac{(3\mathrm{N}+1)(N-1)!}{4N!} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4N}$$

che diminuisce al crescere di N ed al limite tende a $\frac{3}{4}$. Per ciascuno degli altri giocatori il Valore di Shapley sarà

$$\frac{1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4N}}{N-1} = \frac{1}{4N}$$

che quindi decresce con N ed al limite tende a 0.

(*Core*) Siano $x_1, x_2, \dots, x_N$ le quote di $V(N) = 1$ assegnate a ciascun giocatore.

Allora $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$, $\sum_{i\neq 1} x_i = 1$, $\sum_{i\neq 2} x_i = 1, \dots \dots, \sum_{i\neq N} x_i = 1$, da cui ne consegue che $x_i = 0$ per ogni $i = 1, . , 2, . . , N$ e che quindi il Core è vuoto.