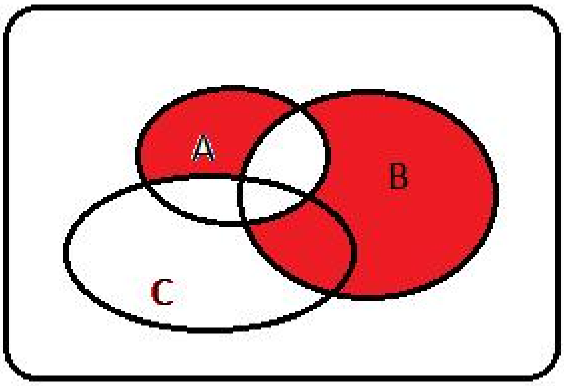
# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 14-15)

11 novembre 2014

Compito $\mathbb{A}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è
$\big(A \cap \mathcal{C}(B \cup C)\big) \cup \big(B \cap \mathcal{C}(A)\big)$.




2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x = \frac{n}{n+2}$ con $n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots\} \cup \{-1\}$. Come si nota facilmente l'insieme $A$ è formato da infiniti punti isolati che convergono verso il numero 1, a cui è unito il singoletto $-1$. Di conseguenza $\delta(A) = A \cup \{1\}$ e $\mathcal{D}(A) = \{1\}$. L'insieme $A$ è né aperto né chiuso perché $\delta(A) \cap A \neq \emptyset$ e $\delta(A) \cap \mathcal{C}(A) \neq \emptyset$.

3) $f(g(h(x))) = f(g(\sqrt{x+3})) = f(2^{\sqrt{x+3}}) = sen\, 2^{\sqrt{x+3}}$;
$h(f(x) - g(x) \cdot h(x)) = h(sen\, x - 2^x \cdot \sqrt{x+3}) = \sqrt{sen\, x - 2^x \cdot \sqrt{x+3} + 3}$.

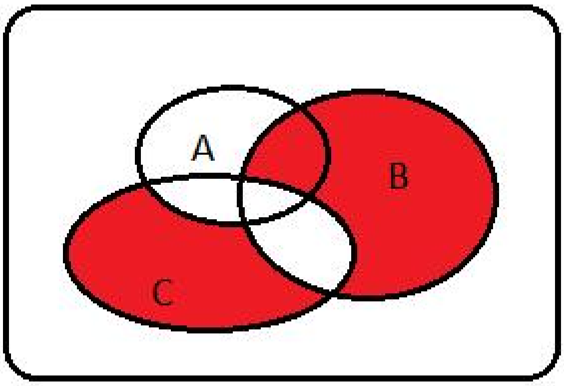
4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{sen(x-2)}{x^2 - 2x} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{sen(x-2)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} \cdot \frac{sen(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{log_3(1+x+2x^2)}{x-2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{log_3(1+x+2x^2)}{x+2x^2} \cdot \frac{x+2x^2}{x-2x^2} =$
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{log_3(1+x+2x^2)}{x+2x^2} \cdot \frac{1+2x}{1-2x} = log_3 e \cdot 1 = log_3 e$.

5) $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$. Verifica: $\forall M < 0$ poniamo $\frac{1}{x} < M \Rightarrow \frac{1}{x} - M < 0 \Rightarrow$
$\frac{1 - xM}{x} < 0$, supposto $x < 0$ la precedente disuguaglianza è vera se $1 - xM > 0$ ovvero $x > \frac{1}{M}$ da cui $\delta_M = \frac{1}{M}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{B}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è $\big(B \cap \mathcal{C}(C)\big) \cup \big(C \cap \mathcal{C}(A \cup B)\big)$.




2) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x = -\dfrac{n}{n+2}$ con $n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1\} =$ $\{0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{4}, -\frac{3}{5}, \dots\} \cup \{-1\}$. Come si nota facilmente l'insieme $A$ è formato da infiniti punti isolati che convergono verso il numero $-1$, a cui è unito il singoletto $-1$. Di conseguenza $\delta(A) = A$ e $\mathcal{D}(A) = \{-1\}$. L'insieme $A$ è chiuso perché $\delta(A) \subseteq A$.

3) $f(g(h(x))) = f(g(\sqrt{x} - 3)) = f(log_3(\sqrt{x} - 3)) = cos\big(log_3(\sqrt{x} - 3)\big)$;
$f(f(x) + g(x) \cdot h(x)) = f(cos\, x + log_3\, x \cdot (\sqrt{x} - 3)) =$
$cos(cos\, x + log_3\, x \cdot (\sqrt{x} - 3))$.

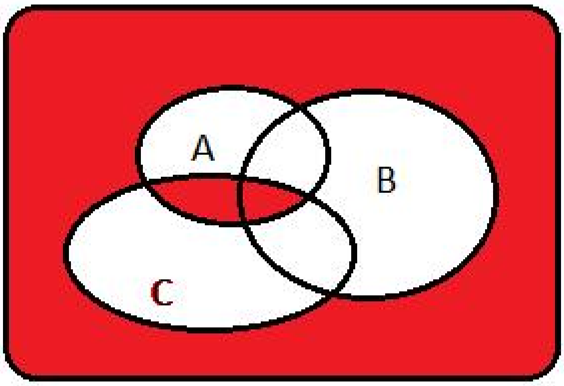
4) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{sen(x-4)}{4x - x^2} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{sen(x-4)}{x(4-x)} = \lim\limits_{x \to 4} -\dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{sen(x-4)}{x-4} =$
$-\dfrac{1}{4} \cdot 1 = -\dfrac{1}{4}$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{x+senx} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{x+senx} - 1}{x + senx} \cdot \dfrac{x + senx}{x} =$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{x+senx} - 1}{x + senx} \cdot \left(1 + \dfrac{senx}{x}\right) = log\, 2 \cdot (1+1) = 2\, log\, 2 = log\, 4$.

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \epsilon \Rightarrow |x| > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow$
$x < -\dfrac{1}{\epsilon} \vee x > \dfrac{1}{\epsilon}$, dato che $x \to -\infty$ poniamo $\delta_\epsilon = -\dfrac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{C}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è $\mathcal{C}(A \cup B \cup C) \cup (A \cap C)$.




2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x = -\dfrac{n}{n+5}$ con $n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\} = \{0, -\dfrac{1}{6}, -\dfrac{2}{7}, -\dfrac{3}{8}, \dots\} \cup \{1\}$.
Come si nota facilmente l'insieme $A$ è formato da infiniti punti isolati che convergono verso il numero $-1$, a cui è unito il singoletto $1$. Di conseguenza $\delta(A) = A \cup \{-1\}$ e $\mathcal{D}(A) = \{-1\}$. L'insieme $A$ è né aperto né chiuso perché $\delta(A) \cap A \neq \emptyset$ e $\delta(A) \cap \mathcal{C}(A) \neq \emptyset$.

3) $h(g(f(x))) = h(g(1+2x)) = h(tg(1+2x)) = 3^{\sqrt{tg(1+2x)}}$;
$g(f(x) + g(x) - h(x)) = g(1 + 2x + tg\,x - 3^{\sqrt{x}}) = tg(1 + 2x + tg\,x - 3^{\sqrt{x}})$.

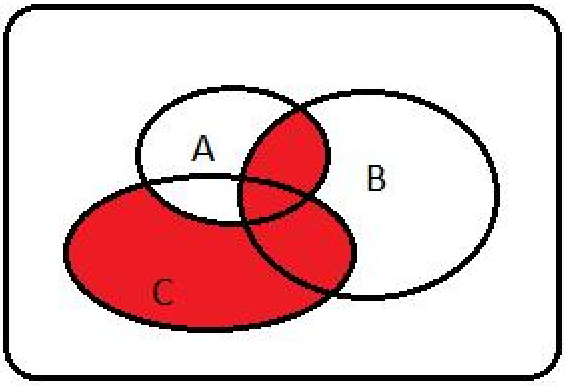
4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{sen(x+2)}{2x+x^2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{sen(x+2)}{x(2+x)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{sen(x+2)}{x+2} = -\dfrac{1}{2} \cdot 1 = -\dfrac{1}{2}$;

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2+senx)^2 - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2+senx)^2 - 1}{x^2+senx} \cdot \frac{x^2+senx}{x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2+senx)^2 - 1}{x^2+senx} \cdot \left(x + \frac{senx}{x}\right) = 2 \cdot (0+1) = 2.$$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo $\left|\dfrac{1}{x}\right| < \epsilon \Rightarrow |x| > \dfrac{1}{\epsilon} \Rightarrow$
$x < -\dfrac{1}{\epsilon} \vee x > \dfrac{1}{\epsilon}$, dato che $x \to +\infty$ poniamo $\delta_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{D}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è $\left(A\cap B\right)\cup\left(C\cap\mathcal{C}(A)\right)$.




2) $A=\{x\in\mathbb{R}: x=\dfrac{n}{n+5}$ con $n\in\mathbb{N}\}\cup\{1\} = \{0,\dfrac{1}{6},\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{8},\dots\}\cup\{1\}$ . Come si nota facilmente l'insieme $A$ è formato da infiniti punti isolati che convergono verso il numero 1, a cui è unito il singoletto 1. Di conseguenza $\delta(A)=A$ e $\mathcal{D}(A)=\{1\}$. L'insieme $A$ è chiuso perché $\delta(A)\subseteq A$.

3) $h(g(f(x)))=h(g(8-x))=h(\sqrt{cos(8-x)})=3^{-\sqrt{cos(8-x)}}$;
$g(h(x)+2-f(x))=g(3^{-x}+2-(8-x))=\sqrt{cos(3^{-x}-6+x)}$.

4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{sen(x+4)}{x^2+4x} = \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{sen(x+4)}{x(x+4)} = \lim\limits_{x\to -4}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{sen(x+4)}{x+4} = -\dfrac{1}{4}\cdot 1 = -\dfrac{1}{4}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^3-1}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^3-1}{x^2(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^3-1}{x^2}\cdot\dfrac{1}{x+1} = 3\cdot 1=3.$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$. Verifica: $\forall M>0$ poniamo $\dfrac{1}{x}>M \Rightarrow \dfrac{1}{x}-M>0 \Rightarrow \dfrac{1-xM}{x}>0$, supposto $x>0$ la precedente disuguaglianza è vera se $1-xM>0$ ovvero $x<\dfrac{1}{M}$ da cui $\delta_M=\dfrac{1}{M}$, limite verificato.

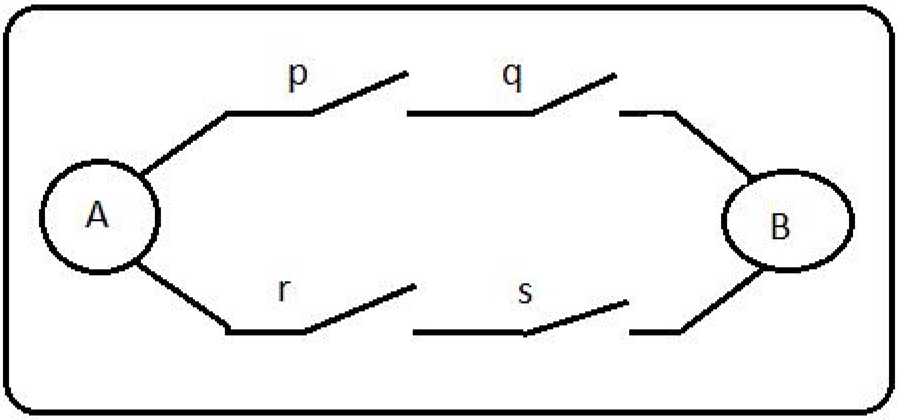
# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 14-15)

11 novembre 2014

Compito $\mathbb{E}$

1) Dalla mappa in basso è facile notare che è possibile raggiungere il punto $B$ partendo dal punto $A$ se sono contemporaneamente abbassati i ponti $p$ e $q$ oppure i ponti $r$ e $s$, di conseguenza la proposizione logica che esprime la condizione sufficiente per il transito da $A$ a $B$ è: $(p\ e\ q)\ o\ (r\ e\ s)$.




2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3^{|x|} > 5\} = \{x \in \mathbb{R}: |x| > log_3 5\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: x < -log_3 5 \vee x > log_3 5\} = ]-\infty, -log_3 5[ \cup ]log_3 5, +\infty[$;
$A \cap B = ]log_3 5, +\infty[$ e $(\overset{\circ}{A \cap B}) = ]log_3 5, +\infty[$,
$A \cup B = ]-\infty, -log_3 5[ \cup [0, +\infty[$ e $\delta(A \cup B) = \{-log_3 5, 0\}$.

3) La funzione è chiaramente continua in tutti i numeri reali diversi da $-2$ e 2, per l'analisi in questi due punti passiamo a calcolare i limiti:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} sen(\pi x) = 0 \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} ax + b = -2a + b$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax + b = 2a + b \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x} = \sqrt{2}$$

dai quattro limiti precedenti risulta la continuità in $-2$ e 2 e quindi in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se: $-2a + b = 0$ e $2a + b = \sqrt{2}$ ovvero $a = \sqrt{2}/4$ e $b = \sqrt{2}/2$.

4) Per il primo limite posto $\frac{1}{x+2} = t$ si ha $x + 2 = \frac{1}{t}$ da cui $x = \frac{1}{t} - 2$ quindi

$$\lim_{x \to \infty} (4x+3) \cdot sen\frac{1}{x+2} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{4}{t} - 5\right) \cdot sent = \lim_{t \to 0} \frac{4\,sent}{t} - 5 \cdot sent = 4.$$

Dato che per $x \to +\infty$, $x + 1 = o(2x^2)$ e $2x + 3 = o(3x^2)$ risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 + 2x + 3}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0.$$

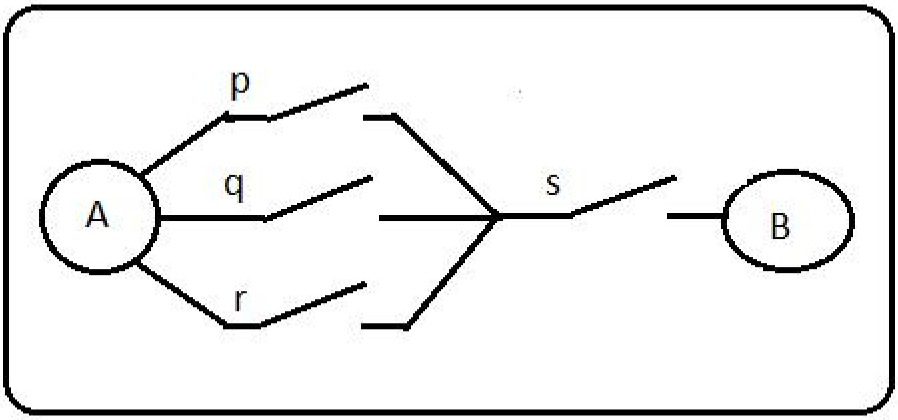
5) $\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo

$|(2x-5) - 1| = |2x - 6| = 2|x - 3| < \epsilon$ ovvero $|x - 3| < \frac{\epsilon}{2}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$,

limite verificato.

Compito $\mathbb{F}$

1) Dalla mappa in basso è facile notare che è possibile raggiungere il punto $B$ partendo dal punto $A$ se sono contemporaneamente abbassati il ponte $s$ e almeno uno fra i ponti $p$, $q$ e $r$, di conseguenza la proposizione logica che esprime la condizione sufficiente per il transito da $A$ a $B$ è: $(p\ o\ q\ o\ r)\ e\ s$.




2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 5^{|x|} \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R}: |x| \geq log_5 3\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: x \leq -log_5 3 \vee x \geq log_5 3\} = ]-\infty, -log_5 3] \cup [log_5 3, +\infty[$;
$A \cup B = ]-\infty, 0[ \cup [log_5 3, +\infty[$ e $(\overset{\circ}{A \cup B}) = ]-\infty, 0[ \cup ]log_5 3, +\infty[$,
$A \cap B = ]-\infty, -log_5 3]$ e $\delta(A \cap B) = \{-log_5 3\}$.

3) La funzione è chiaramente continua in tutti i numeri reali diversi da $-1$ e $1$, per l'analisi in questi due punti passiamo a calcolare i limiti:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} cos(\pi x) = -1 \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} ax + b = -a + b$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax + b = a + b \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 5^x = 5$$

dai quattro limiti precedenti risulta la continuità in $-1$ e $1$ e quindi in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se: $-a + b = -1$ e $a + b = 5$ ovvero $a = 3$ e $b = 2$.

4) Per il primo limite posto $\frac{1}{2x-1} = t$ si ha $2x - 1 = \frac{1}{t}$ da cui $x = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}$ quindi

$$\lim_{x \to \infty}(x-2) \cdot sen\frac{1}{2x-1} = \lim_{t \to 0}\left(\frac{1}{2t} - \frac{3}{2}\right) \cdot sent = \lim_{t \to 0}\frac{sent}{2t} - \frac{3\,sent}{2} = \frac{1}{2}.$$

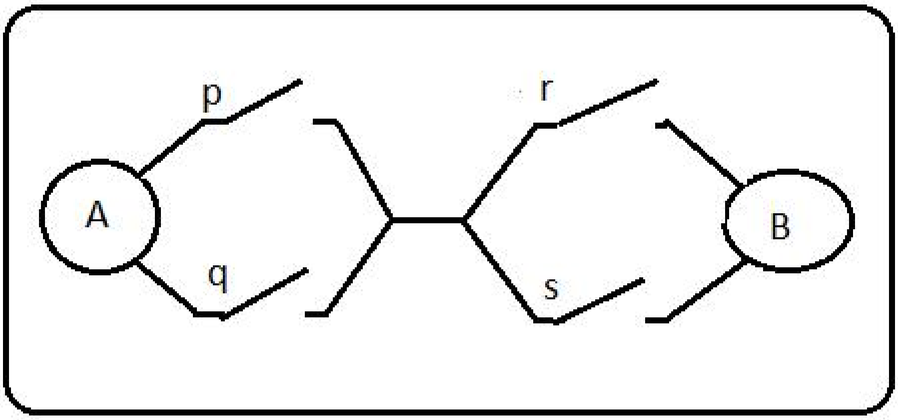
Dato che per $x \to +\infty$, $4x + 1 = o(x^2)$ e $2x + 3 = o(3x^2)$ risulta:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x + 3}\right)^{-x} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2}{3x^2}\right)^{-x} = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = +\infty.$$

5) $\lim_{x \to -2}(3x - 3) = -9$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo
$|(3x-3) + 9| = |3x + 6| = 3|x + 2| < \epsilon$ ovvero $|x + 2| < \frac{\epsilon}{3}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{3}$,
limite verificato.

# Compito $\mathbb{G}$

1) Dalla mappa in basso è facile notare che è possibile raggiungere il punto $B$ partendo dal punto $A$ se sono contemporaneamente abbassati almeno uno fra i ponti $p$ e $q$ e almeno uno fra i ponti $r$ e $s$, di conseguenza la proposizione logica che esprime la condizione sufficiente per il transito da $A$ a $B$ è: $(p\ o\ q)\ e\ (r\ o\ s)$.




2) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon 4^{|x|} \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| \leq log_4 3\} =$
$\{x \in \mathbb{R}\colon -log_4 3 \leq x \leq log_4 3\} = [-log_4 3, log_4 3]$; $A \cap B = [-log_4 3, 0]$ e
$\mathcal{D}(A \cap B) = [-log_4 3, 0]$, $A \cup B = ]-\infty, log_4 3]$ e $\delta(A \cup B) = \{log_4 3\}$.

3) La funzione è chiaramente continua in tutti i numeri reali diversi da $-1$ e $1$, per l'analisi in questi due punti passiamo a calcolare i limiti:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} ax + b = -a + b$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax + b = a + b \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - x = 0$$

dai quattro limiti precedenti risulta la continuità in $-1$ e $1$ e quindi in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se: $-a + b = \sqrt{2}$ e $a + b = 0$ ovvero $a = -\sqrt{2}/2$ e $b = \sqrt{2}/2$.

4) Per il primo limite posto $\dfrac{1}{x+3} = t$ si ha $x + 3 = \dfrac{1}{t}$ da cui $x = \dfrac{1}{t} - 3$ quindi

$$\lim_{x \to \infty} (2 - x) \cdot sen \frac{1}{x+3} = \lim_{t \to 0} (5 - \frac{1}{t}) \cdot sent = \lim_{t \to 0} 5\, sent - \frac{sent}{t} = -1.$$

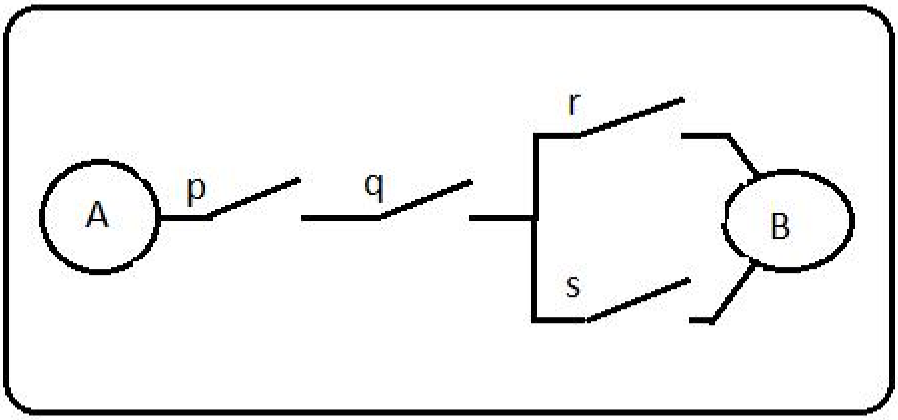
Dato che per $x \to -\infty$, $x + 1 = o(2x^2)$ e $6x + 3 = o(x^2)$ risulta:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + 6x + 3}\right)^{-x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2}\right)^{-x} = \lim_{x \to -\infty} 2^{-x} = +\infty.$$

5) $\lim_{x \to 6} (4x + 2) = 26$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo
$|(4x + 2) - 26| = |4x - 24| = 4|x - 6| < \epsilon$ ovvero $|x - 6| < \dfrac{\epsilon}{4}$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{4}$,
limite verificato.

# Compito III

1) Dalla mappa in basso è facile notare che è possibile raggiungere il punto $B$ partendo dal punto $A$ se sono contemporaneamente abbassati i ponti $p$, $q$ e almeno uno fra i ponti $r$ e $s$, di conseguenza la proposizione logica che esprime la condizione sufficiente per il transito da $A$ a $B$ è: $p\ e\ q\ e\ (r\ o\ s)$.




2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 4^{|x|} < 7\} = \{x \in \mathbb{R}: |x| < log_4 7\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: -log_4 7 < x < log_4 7\} = ]-log_4 7, log_4 7[$; $A \cup B = ]-log_4 7, +\infty[$ e $\mathcal{D}(A \cup B) = [-log_4 7, +\infty[$, $A \cap B = ]0, log_4 7[$ e $\delta(A \cap B) = \{0, log_4 7\}$.

3) La funzione è chiaramente continua in tutti i numeri reali diversi da $-2$ e 2, per l'analisi in questi due punti passiamo a calcolare i limiti:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} 3^{-x} = 9 \qquad \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} ax + b = -2a + b$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} ax + b = 2a + b \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^2 + x = 6$$

dai quattro limiti precedenti risulta la continuità in $-2$ e 2 e quindi in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se: $-2a + b = 9$ e $2a + b = 6$ ovvero $a = -3/4$ e $b = 15/2$.

4) Per il primo limite posto $\frac{1}{x+1} = t$ si ha $x + 1 = \frac{1}{t}$ da cui $x = \frac{1}{t} - 1$ quindi

$$\lim_{x \to \infty} (3 - 2x) \cdot sen\frac{1}{x+1} = \lim_{t \to 0} (5 - \frac{2}{t}) \cdot sent = \lim_{t \to 0} 5\, sent - \frac{2\, sent}{t} = -2$$
.

Dato che per $x \to -\infty$, $x + 1 = o(2x^2)$ e $6x + 2 = o(5x^2)$ risulta:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 + x + 1}{5x^2 + 6x + 2}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2}{5x^2}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x = +\infty.$$

5) $\lim_{x \to 1} (6x + 8) = 14$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo
$|(6x + 8) - 14| = |6x - 6| = 6|x - 1| < \epsilon$ ovvero $|x - 1| < \frac{\epsilon}{6}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{6}$,
limite verificato.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 14-15)

11 novembre 2014

Compito $\mathbb{I}$

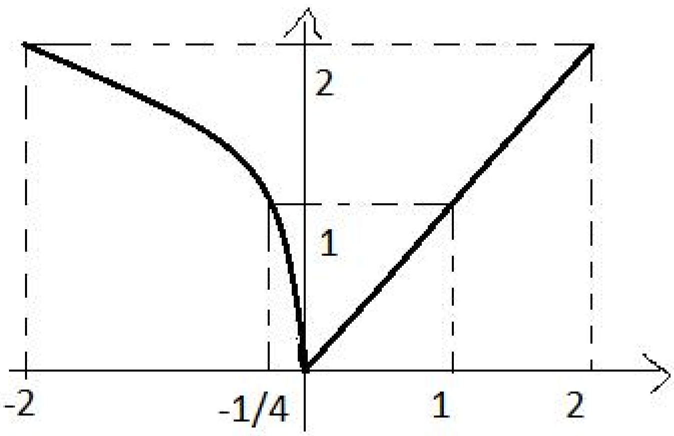
1)

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p\ e\ \neg q$ | $p \Rightarrow (p\ e\ \neg q)$ | $\neg q \Rightarrow \big(p \Rightarrow (p\ e\ \neg q)\big)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |

Come evidenziato nell'ultima colonna della tavola di verità, la proposizione proposta è una tautologia.

2) $A \cup B \cup C = \,]-\infty,\,-5[\,\cup\,]-1,\,+\infty[$, $\mathcal{C}(A \cup B \cup C) = [-5,\,-1]$, $\mathcal{D}\big(\mathcal{C}(A \cup B \cup C)\big) = [-5,\,-1]$. Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(A \cap B \cap C)$, $A \cap B \cap C = [1,6[$, $\mathcal{C}(A \cap B \cap C) = \,]-\infty,1[\,\cup\,[6,\,+\infty[$ quindi $\delta\big(\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C)\big) = \delta\big(\mathcal{C}(A \cap B \cap C)\big) = \{1,6\}$.

3)




$f\big([0,2]\big) = [0,2]$, $f^{-1}\big([0,1]\big) = [-1/4, 1]$, restrizioni del dominio della funzione in cui $f$ risulta invertibile sono $[-2,0]$ o $[0,2]$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x = e^{-1/3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x+2x^2)}{arctg(x-x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{arcsen(x+2x^2)}{x+2x^2}}{\frac{arctg(x-x^2)}{x-x^2}} \cdot \frac{x+2x^2}{x-x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{arcsen(x+2x^2)}{x+2x^2}}{\frac{arctg(x-x^2)}{x-x^2}} \cdot \frac{1+2x}{1-x} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} = 1.$$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} - 2 = -2$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo $|(1/x-2)+2| = |1/x| < \epsilon$ ovvero $|x| > \dfrac{1}{\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

# Compito $\mathbb{J}$

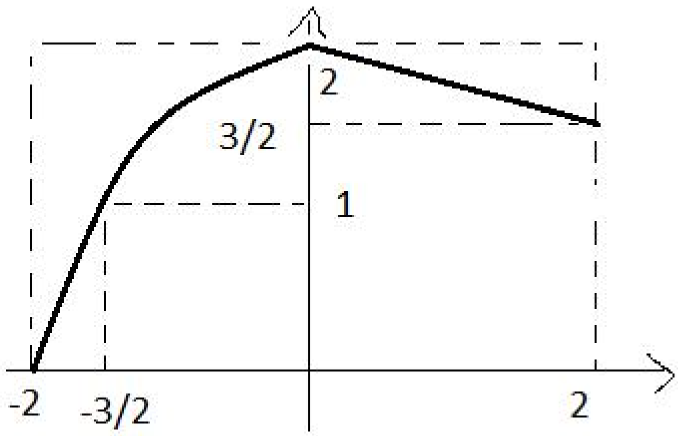
1)

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p\ o\ \neg q$ | $p \Rightarrow (p\ o\ \neg q)$ | $\neg q \Rightarrow \big(p \Rightarrow (p\ o\ \neg q)\big)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

Come evidenziato nell'ultima colonna della tavola di verità, la proposizione proposta è una tautologia.

2) $A \cap B \cap C = [1,6[$, $\mathcal{C}(A \cap B \cap C) = \,]-\infty, 1[ \cup [6, +\infty[$, $\mathcal{D}\big(\mathcal{C}(A \cap B \cap C)\big) = \,]-\infty, 1] \cup [6, +\infty[$ . Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) \cap \mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(A \cup B \cup C)$, $A \cup B \cup C = \,]-\infty, -5[ \cup ]-1, +\infty[$, $\mathcal{C}(A \cup B \cup C) = [-5, -1]$ quindi $\delta\big(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) \cap \mathcal{C}(C)\big) = \delta\big(\mathcal{C}(A \cup B \cup C)\big) = \{-5, -1\}$.

3)




$f\big([0,2]\big) = [3/2, 2]$, $f^{-1}\big([0,1]\big) = [-2, -3/2]$, una restrizione del dominio della funzione in cui $f$ risulta invertibile è $[-2, 0]$.

4) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x+1}{4x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x = e^{1/4}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{arctg(3x+x^2)}{arcsen(x^2-2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{arctg(3x+x^2)}{3x+x^2}}{\frac{arcsen(x^2-2x)}{x^2-2x}} \cdot \frac{3x+x^2}{x^2-2x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{arctg(3x+x^2)}{3x+x^2}}{\frac{arcsen(x^2-2x)}{x^2-2x}} \cdot \frac{3+x}{x-2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{3+x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{2x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo $\left|\left(\frac{3}{2x} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{2x}\right| = \frac{3}{2}\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$ ovvero $|x| > \frac{3}{2\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{3}{2\epsilon}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{K}$

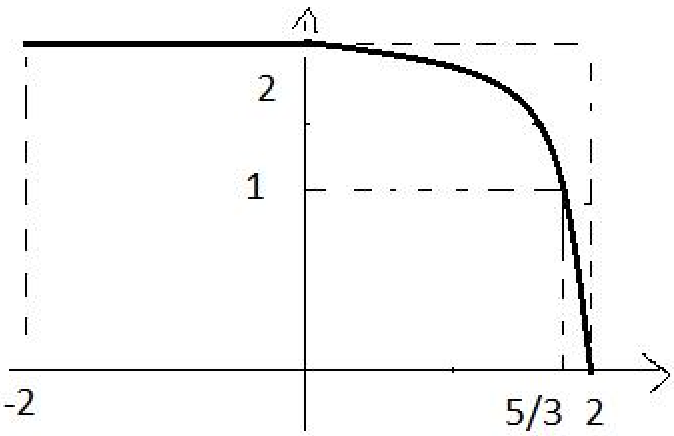
1)

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \Rightarrow q$ | $\neg(q \ o \ \neg p)$ | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(q \ o \ \neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |

Come evidenziato nell'ultima colonna della tavola di verità, la proposizione proposta è una contraddizione.

2) $A \cup B \cup C = ]-\infty, 3] \cup [15, +\infty[$, $\mathcal{D}(A \cup B \cup C) = ]-\infty, 3] \cup [15, +\infty[$, $\mathcal{C}\big(\mathcal{D}(A \cup B \cup C)\big) = ]3, 15[$. Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) \cap \mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(A \cup B \cup C) = ]3, 15[$ quindi $\delta\big(\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) \cap \mathcal{C}(C)\big) = \delta\big(\mathcal{C}(A \cup B \cup C)\big) = \{3, 15\}$.

3)




$f\big([-2, 0]\big) = \{2\}$, $f^{-1}\big([1, 2]\big) = [-2, 5/3]$, l'unica restrizione del dominio della funzione in cui $f$ risulta invertibile è $[0, 2]$.

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x+4}{2x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{arcsen(x^3+2x^2)}{sen(x^4+5x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{arcsen(x^3+2x^2)}{x^3+2x^2}}{\frac{sen(x^4+5x^2)}{x^4+5x^2}} \cdot \frac{x^3+2x^2}{x^4+5x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{arcsen(x^3+2x^2)}{x^3+2x^2}}{\frac{sen(x^4+5x^2)}{x^4+5x^2}} \cdot \frac{x+2}{x^2+5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x-1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 6 - \dfrac{1}{x} = 6$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo $|(6 - 1/x) - 6| = |1/x| < \epsilon$ ovvero $|x| > \dfrac{1}{\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

# Compito $\mathbb{L}$

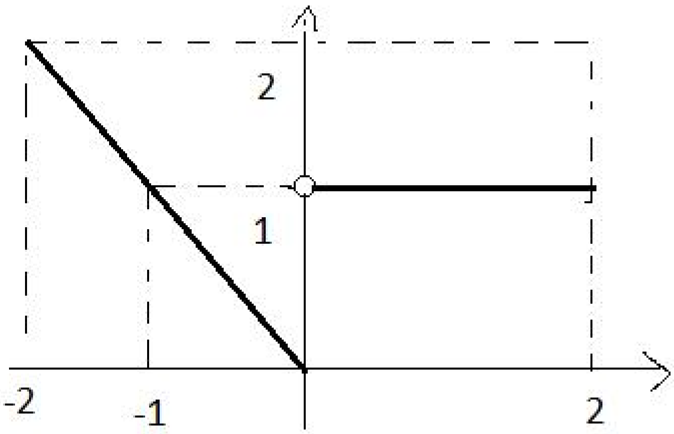
1)

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $\neg(p \Rightarrow q)$ | $\neg q \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)$ | $p \Rightarrow \big(\neg q \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)\big)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |

Come evidenziato nell'ultima colonna della tavola di verità, la proposizione proposta è una tautologia.

2) $A \cap B \cap C = [-3, -2]$, $\mathcal{D}(A \cap B \cap C) = [-3, -2]$,
$\mathcal{C}\big(\mathcal{D}(A \cap B \cap C)\big) = ]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[$. Per le leggi di De Morgan
$\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C) = \mathcal{C}(A \cap B \cap C) = ]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[$ quindi
$\delta\big(\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) \cup \mathcal{C}(C)\big) = \delta\big(\mathcal{C}(A \cap B \cap C)\big) = \{-3, -2\}$.

3)




$f\big([-2, 0]\big) = [0, 2]$, $f^{-1}\big([1, 2]\big) = [-2, -1] \cup ]0, 2]$, l'unica restrizione del dominio della funzione in cui $f$ risulta invertibile è $[-2, 0]$.

4) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{10x - 7}{10x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{7}{10x}\right)^x = e^{-7/10}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{tg(x^4 - 3x)}{arctg(x + 4x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{tg(x^4-3x)}{x^4-3x}}{\frac{arctg(x+4x^2)}{x+4x^2}} \cdot \frac{x^4 - 3x}{x + 4x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{tg(x^4-3x)}{x^4-3x}}{\frac{arctg(x+4x^2)}{x+4x^2}} \cdot \frac{x^3 - 3}{1 + 4x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{-3}{1} = -3.$$

5) $\lim_{x \to \infty} \frac{x - 3}{4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{4} - \frac{3}{4x} = \frac{1}{4}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ poniamo
$\left|\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4x}\right) - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{3}{4x}\right| = \frac{3}{4}\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$ ovvero $|x| > \frac{3}{4\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{3}{4\epsilon}$, limite verificato.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)

20 gennaio 2015

Compito $\mathbb{A}$

1) $p$: $VERA$; $q$: $VERA$, 6 è multiplo di 3 ed è pari; $r$: a volte $VERA$ a volte $FALSA$, ad esempio la coppia $(2,2)$ ha prodotto non dispari mentre la coppia $(3,3)$ ha prodotto dispari. Tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg(q\ e\ r)$ | $(\neg q\ o\ p)$ | $\neg(q\ e\ r) \Leftrightarrow (\neg q\ o\ p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |

2) La parola $MARGINE$ è formata da 7 lettere distinte, i suoi possibili anagrammi sono $7! = 5.040$; la parola $MARGINATURA$ è formata da 11 lettere con la $A$ che si ripete 3 volte e la $R$ che si ripete 2 volte, i suoi possibili anagrammi sono $\dfrac{11!}{3! \cdot 2!} = 3.326.400$.

3) $g(h(x)) = g(\log_6(3x+1)) = \sqrt{4 - \log_6(3x+1)}$;
$h(f(g(x))) = h(f(\sqrt{4-x})) = h(3^{2-\sqrt{4-x}}) = \log_6(3^{3-\sqrt{4-x}} + 1)$;
$g\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = g\left(\dfrac{1}{3^{2-x}}\right) = g\left(3^{x-2}\right) = \sqrt{4 - 3^{x-2}}$; per determinare l'espressione dell'inversa, posto $y = \sqrt{4 - 3^{x-2}}$ risulta $y^2 = 4 - 3^{x-2}$ da cui $3^{x-2} = 4 - y^2 \Rightarrow x - 2 = \log_3(4 - y^2) \Rightarrow x = \log_3(4-y^2) + 2$, inversa: $y = \log_3(4 - x^2) + 2$.

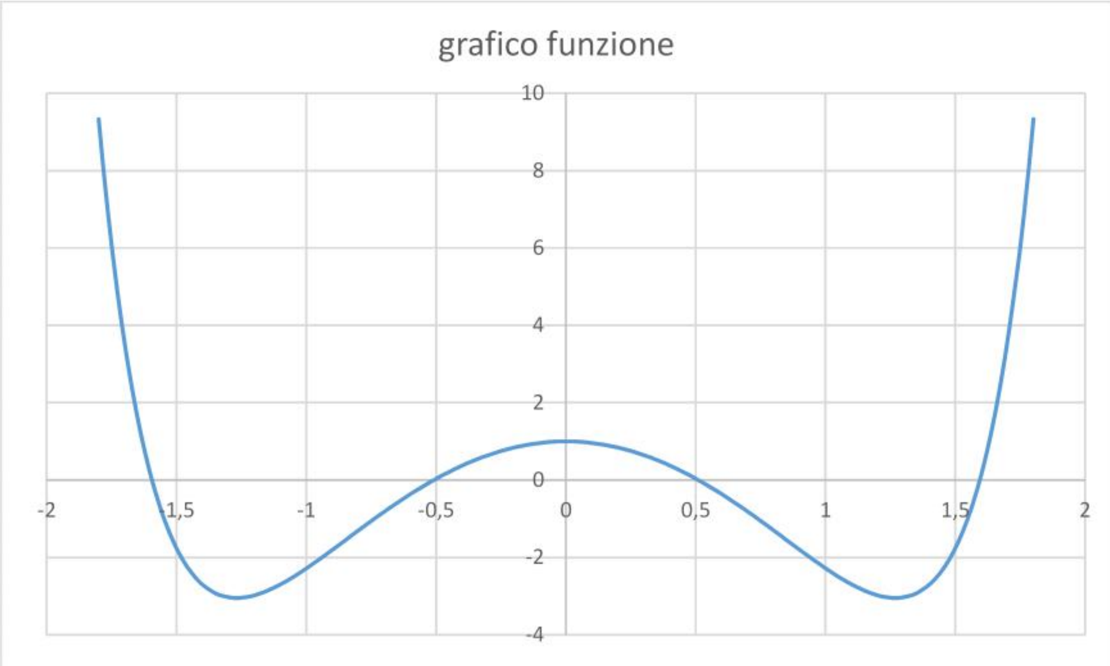
4) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \log x = 0$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2\cdot \log x} - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2\cdot\log x} - 1}{x^2 \cdot \log x} \cdot \frac{\log x}{x} = 1 \cdot \frac{(\to -\infty)}{(\to 0^+)} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-x} = e^3.$$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$. $y(-x) = e^{(-x)^2} - 5(-x)^2 = e^{x^2} - 5x^2 = y(x)$; funzione pari, la studiamo solo sul semiasse positivo ed operiamo per simmetria.
Segno: $e^{x^2} - 5x^2 > 0 \Rightarrow e^{x^2} > 5x^2$, disequazione che non è risolvibile algebricamente, il segno della funzione viene studiato dopo la crescenza e la decrescenza.
Intersezioni: $\begin{cases} y = e^{x^2} - 5x^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = e^0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$. Intersezione con l'asse delle ordinate nel punto $(0,1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} - 5x^2 = +\infty$, perché $5x^2 = o\left(e^{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2} - 5x^2}{x} = +\infty$, in quanto come sopra risulta $5x^2$ e $x$ infinitesimi rispetto a $e^{x^2}$ per $x \to +\infty$, la funzione non presenta asintoti;
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x^2} \cdot 2x - 10x = 2x\left(e^{x^2} - 5\right)$.
$2x\left(e^{x^2} - 5\right) > 0 \Rightarrow e^{x^2} - 5 > 0 \Rightarrow e^{x^2} > 5 \Rightarrow x^2 > \log 5 \Rightarrow x > \sqrt{\log 5}$. Funzione strettamente crescente in $[\sqrt{\log 5}, +\infty[$, strettamente decrescente in $[0, \sqrt{\log 5}]$.
$y\left(\sqrt{\log 5}\right) = e^{\log 5} - 5\log 5 = 5 - 5\log 5 < 0$, la funzione presenta massimo relativo in $(0,1)$ e minimo assoluto in $\left(\sqrt{\log 5}, 5 - 5\log 5\right)$, dal segno del massimo

e del minimo si deduce che la funzione presenta due intersezioni con la parte positiva dell'asse delle ascisse, una di ascissa inferiore ed una di ascissa superiore a $\sqrt{\log 5}$.
Grafico:




6) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{3x-2}{(x+3)(x-1)}\,dx$; per la teoria sugli integrali delle funzioni razionali fratte esistono $A$ e $B$ tali che

$$\frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-1)} = \frac{3x-2}{(x+3)(x-1)} \text{ ovvero}$$

$$\frac{(A+B)x + (-A+3B)}{(x+3)(x-1)} = \frac{3x-2}{(x+3)(x-1)}.$$

Posto $\begin{cases} A+B=3 \\ -A+3B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=11/4 \\ B=1/4 \end{cases}$ quindi:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+2x-3}\,dx = \int \frac{11/4}{(x+3)}\,dx + \int \frac{1/4}{(x-1)}\,dx =$$

$$\frac{11}{4}\log|x+3| + \frac{1}{4}\log|x-1| + c\,.$$

7) Per la formula del differenziale $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$. Posto $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$ e $h = 0.2$, risulta: $f(x_0) = \sqrt[4]{81} = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{108}$ da cui $\sqrt[4]{81.2} \simeq 3 + \dfrac{1}{108} \cdot 0.2 = \dfrac{1621}{540} = 3,00\overline{185}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

$z(P) = e^{-3}$, $\nabla z = (2ye^{2x-3y} + 5, e^{2x-3y} - 3ye^{2x-3y})$,
$\nabla z(P) = (2e^{-3} + 5, -2e^{-3})$. Piano tangente:
$z = e^{-3} + (2e^{-3} + 5)x - 2e^{-3}(y-1)$ ovvero $(2e^{-3} + 5)x - 2e^{-3}y - z = -3e^{-3}$.

# Compito $\mathbb{B}$

1) $p$: a volte $VERA$ a volte $FALSA$, ad esempio se $x = 2$, $3x$ è un numero pari mentre se $x = 3$, $3x$ è un numero non pari; $q$: $VERA$, ad esempio la coppia $(3, 5)$; $r$: $FALSA$. Tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(\neg q \; e \; r)$ | $(q \; o \; \neg p)$ | $(\neg q \; e \; r) \Rightarrow (q \; o \; \neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |

2) La parola $GRADO$ è formata da 5 lettere distinte, i suoi possibili anagrammi sono $5! = 120$; la parola $GRADINATURA$ è formata da 11 lettere con la $A$ che si ripete 3 volte e la $R$ che si ripete 2 volte, i suoi possibili anagrammi sono $\frac{11!}{3! \cdot 2!} = 3.326.400$.

3) $g(h(x)) = g(\log_2(1-x)) = 2^{4-\log_2(1-x)}$;
$h(g(f(x))) = h(g(\sqrt{3+x})) = h(2^{4-\sqrt{3+x}}) = \log_2(1 - 2^{4-\sqrt{3+x}})$;
$g\left(\frac{1}{f(x)}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{3+x}}\right) = 2^{4-\frac{1}{\sqrt{3+x}}}$; per determinare l'espressione dell'inversa, posto $y = 2^{4-\frac{1}{\sqrt{3+x}}}$ risulta $\log_2 y = 4 - \frac{1}{\sqrt{3+x}}$ da cui

$$\frac{1}{\sqrt{3+x}} = 4 - \log_2 y \Rightarrow \sqrt{3+x} = \frac{1}{4-\log_2 y} \Rightarrow 3 + x = \left(\frac{1}{4-\log_2 y}\right)^2 \Rightarrow$$

$x = \left(\frac{1}{4-\log_2 y}\right)^2 - 3$, inversa: $y = \left(\frac{1}{4-\log_2 x}\right)^2 - 3$.

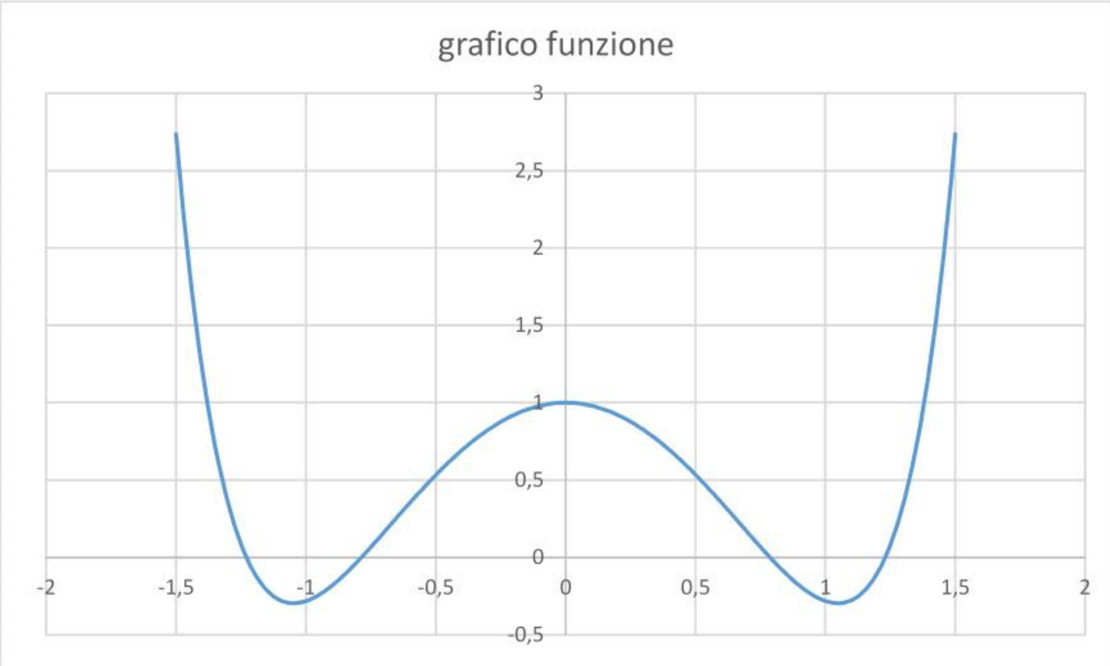
4) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \cdot \log x = \lim\limits_{x\to 0} x \cdot \log x = 0$, quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\log x} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3\cdot\log x} - 1}{x^3 \cdot \log x} \cdot x \cdot \log x = 1 \cdot 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5x}{x^2}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x} = e^{10}.$$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$. $y(-x) = e^{(-x)^2} - 3(-x)^2 = e^{x^2} - 3x^2 = y(x)$; funzione pari, la studiamo solo sul semiasse positivo ed operiamo per simmetria.
Segno: $e^{x^2} - 3x^2 > 0 \Rightarrow e^{x^2} > 3x^2$, disequazione che non è risolvibile algebricamente, il segno della funzione viene studiato dopo la crescenza e la decrescenza.
Intersezioni: $\begin{cases} y = e^{x^2} - 3x^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = e^0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$. Intersezione con l'asse delle ordinate nel punto $(0, 1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2} - 3x^2 = +\infty$, perché $3x^2 = o\left(e^{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2} - 3x^2}{x} = +\infty$, in quanto come sopra risulta $3x^2$ e $x$ infinitesimi rispetto a $e^{x^2}$ per $x \to +\infty$, la funzione non presenta asintoti;
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x^2} \cdot 2x - 6x = 2x\left(e^{x^2} - 3\right)$.
$2x\left(e^{x^2} - 3\right) > 0 \Rightarrow e^{x^2} - 3 > 0 \Rightarrow e^{x^2} > 3 \Rightarrow x^2 > \log 3 \Rightarrow x > \sqrt{\log 3}$. Funzione strettamente crescente in $[\sqrt{\log 3}, +\infty[$, strettamente decrescente in $[0, \sqrt{\log 3}]$.
$y\left(\sqrt{\log 3}\right) = e^{\log 3} - 3\log 3 = 3 - 3\log 3 < 0$, la funzione presenta massimo

relativo in $(0,1)$ e minimo assoluto in $\left(\sqrt{\log 3}, 3-3\log 3\right)$, dal segno del massimo e del minimo si deduce che la funzione presenta due intersezioni con la parte positiva dell'asse delle ascisse una di ascissa inferiore ed una di ascissa superiore a $\sqrt{\log 3}$.
Grafico:




6) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-7x+10}\,dx = \int \frac{2x+3}{(x-5)(x-2)}\,dx$; per la teoria sugli integrali delle funzioni razionali fratte esistono $A$ e $B$ tali che

$$\frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{2x+3}{(x-5)(x-2)}$$ ovvero

$$\frac{(A+B)x-(2A+5B)}{(x-5)(x-2)} = \frac{2x+3}{(x-5)(x-2)}.$$

Posto $\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-5B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=13/3 \\ B=-7/3 \end{cases}$ quindi:

$$\int \frac{2x+3}{x^2-7x+10}\,dx = \int \frac{13/3}{(x-5)}\,dx - \int \frac{7/3}{(x-2)}\,dx =$$

$$\frac{13}{3}\log|x-5| - \frac{7}{3}\log|x-2| + c\,.$$

7) Per la formula del differenziale $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$. Posto $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 16$ e $h = 0.01$, risulta: $f(x_0) = \sqrt[4]{16} = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{32}$ da cui $\sqrt[4]{16.01} \simeq 2 + \dfrac{1}{32}\cdot 0.01 = \dfrac{6401}{3200} = 2,0003125$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P)\cdot\begin{pmatrix} x-0 \\ y+1 \end{pmatrix}$.
$z(P) = 2$, $\nabla z = (e^{x+3y} + xe^{x+3y}, 3xe^{x+3y} - 2)$, $\nabla z(P) = (e^{-3}, -2)$. Piano tangente: $z = 2 + e^{-3}x - 2(y+1)$ ovvero $e^{-3}x - 2y - z = 0$.

# Compito $\mathbb{C}$

1) $p$: a volte $VERA$ a volte $FALSA$, ad esempio se $x=0$ e $y=0$, $x+y=0$, mentre se $x=0$ e $y=1$, $x+y\neq 0$; $q$: $FALSA$, tutti i multipli di $4$ sono pari; $r$: $VERA$, il quadrato. Tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg(q\ o\ r)$ | $(q\ \Rightarrow\ \neg p)$ | $\neg(q\ o\ r)\Rightarrow(q\ \Rightarrow\ \neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |

2) La parola $STORIA$ è formata da 6 lettere distinte, i suoi possibili anagrammi sono $6!=720$; la parola $STORICISTICO$ è formata da 12 lettere con le $S, T, O, C$ che si ripetono 2 volte e la $I$ che si ripete 3 volte, i suoi possibili anagrammi sono $\dfrac{12!}{(2!)^4\cdot 3!}=4.989.600$.

3) $g(h(x))=g(\cos(8+x))=e^{1-\cos(8+x)}$;
$h(f(g(x)))=h(f(e^{1-x}))=h(1-\log_3(2e^{1-x}))=\cos(9-\log_3(2e^{1-x}))$;
$f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)=f\left(\dfrac{1}{e^{1-x}}\right)=f\left(e^{x-1}\right)=1-\log_3(2e^{x-1})$; per determinare l'espressione dell'inversa, posto $y=1-\log_3(2e^{x-1})$ risulta $\log_3(2e^{x-1})=1-y$ da cui $2e^{x-1}=3^{1-y}\Rightarrow e^{x-1}=\dfrac{3^{1-y}}{2}\Rightarrow x-1=\log\left(\dfrac{3^{1-y}}{2}\right)\Rightarrow$
$x=\log\left(\dfrac{3^{1-y}}{2}\right)+1$, inversa: $y=\log\left(\dfrac{3^{1-x}}{2}\right)+1$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\log^2 x=0$, quindi

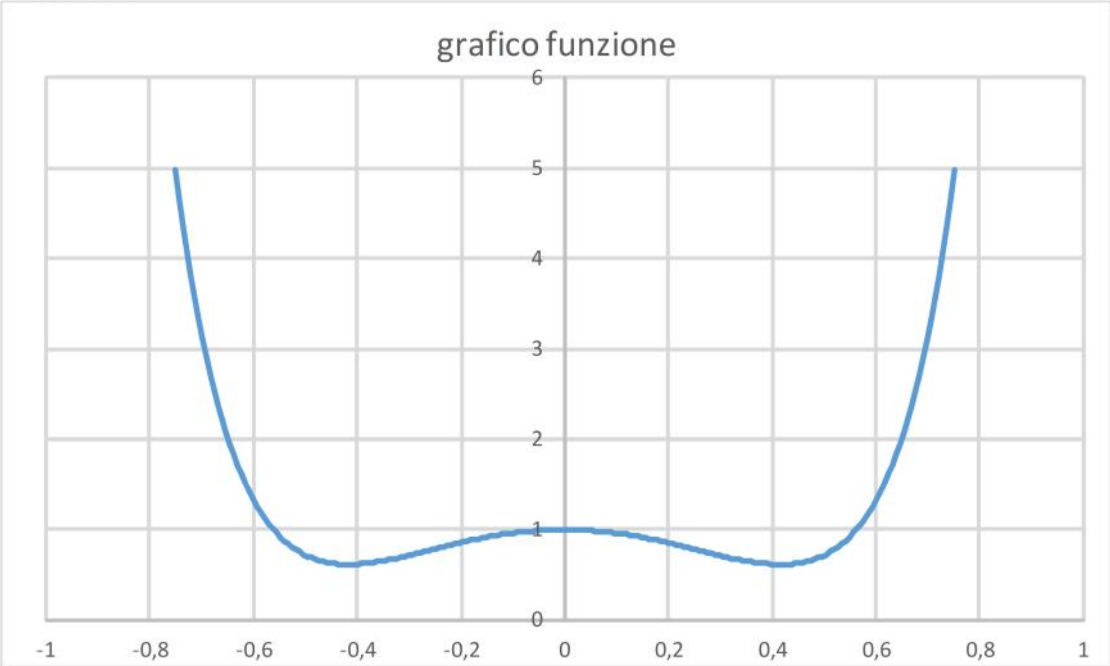
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\log^2 x}-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\log^2 x}-1}{x\cdot\log^2 x}\cdot\frac{\log^2 x}{x^3}=1\cdot\frac{(\to+\infty)}{(\to 0^+)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+6x^2}{x^3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{x}\right)^x=e^6.$$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$. $y(-x)=e^{4(-x)^2}-8(-x)^2=e^{4x^2}-8x^2=y(x)$; funzione pari, la studiamo solo sul semiasse positivo ed operiamo per simmetria.
Segno: $e^{4x^2}-8x^2>0\Rightarrow e^{4x^2}>8x^2$, disequazione che non è risolvibile algebricamente, il segno della funzione viene studiato dopo la crescenza e la decrescenza.
Intersezioni: $\begin{cases} y=e^{4x^2}-8x^2\\ x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=e^0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=1\\ x=0\end{cases}$. Intersezione con l'asse delle ordinate nel punto $(0,1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x^2}-8x^2=+\infty$, perché $8x^2=o\left(e^{4x^2}\right)$ per $x\to+\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{4x^2}-8x^2}{x}=+\infty$, in quanto come sopra risulta $8x^2$ e $x$ infinitesimi rispetto a $e^{4x^2}$ per $x\to+\infty$, la funzione non presenta asintoti;
Crescenza e decrescenza: $y'=e^{4x^2}\cdot 8x-16x=8x\left(e^{4x^2}-2\right)$.
$8x\left(e^{4x^2}-2\right)>0\Rightarrow e^{4x^2}-2>0\Rightarrow e^{4x^2}>2\Rightarrow x^2>\dfrac{1}{4}\log 2\Rightarrow x>\sqrt{\log 2}/2$.

Funzione strettamente crescente in $[\sqrt{\log 2}/2, +\infty[$, strettamente decrescente in $[0, \sqrt{\log 2}/2]$. $y\left(\sqrt{\log 2}/2\right)=e^{\log 2}-2\log 2=2-2\log 2>0$, la funzione

presenta massimo relativo in $(0,1)$ e minimo assoluto in $\left(\sqrt{\log 2}/2, 2-2\log 2\right)$, dal segno del minimo assoluto si deduce che la funzione è strettamente positiva.
Grafico:




6) $\displaystyle\int \frac{x+6}{x^2+5x+6}\,dx = \int \frac{x+6}{(x+2)(x+3)}\,dx$; per la teoria sugli integrali delle funzioni razionali fratte esistono $A$ e $B$ tali che

$\displaystyle\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+3)} = \frac{x+6}{(x+2)(x+3)}$ ovvero

$\displaystyle\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+6}{(x+2)(x+3)}$.

Posto $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \end{cases}$ quindi:

$$\int \frac{x+6}{x^2+5x+6}\,dx = \int \frac{4}{(x+2)}\,dx - \int \frac{3}{(x+3)}\,dx =$$

$4\log|x+2| - 3\log|x+3| + c$.

7) Per la formula del differenziale $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$. Posto $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$ e $h = 0.02$, risulta: $f(x_0) = \sqrt[3]{8} = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(x_0) = \dfrac{1}{12}$ da cui

$\sqrt[3]{8.02} \simeq 2 + \dfrac{1}{12} \cdot 0.02 = \dfrac{1201}{600} = 2,001\overline{6}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix}$.

$z(P) = e^{-7}$, $\nabla z = \left(-e^{2y+7x} - 7xe^{2y+7x}, 3 - 2xe^{2y+7x}\right)$,
$\nabla z(P) = (6e^{-7}, 3+2e^{-7})$. Piano tangente $z = e^{-7} + 6e^{-7}(x+1) + (3+2e^{-7})y$ ovvero $6e^{-7}x + (3+2e^{-7})y - z = -7e^{-7}$.

## Compito $\mathbb{D}$

1) $p$: $FALSA$, ad esempio se $x=1$ e $y=0$, $x-y\neq 0$; $q$: a volte $VERA$ a volte $FALSA$, ad esempio se $x=0$ e $y=1$, $3x+2y=2$, mentre se $x=1$ e $y=0$, $3x+2y\neq 2$; $r$: $VERA$. Tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(q\Leftrightarrow \neg r)$ | $(\neg p\Leftrightarrow r)$ | $(q\Leftrightarrow \neg r)$ $o$ $(\neg p\Leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

2) La parola $CAMERINO$ è formata da $8$ lettere distinte, i suoi possibili anagrammi sono $8! = 40.320$; la parola $CAMERETTA$ è formata da $9$ lettere con le $A$, $E$, $T$ che si ripetono 2 volte, i suoi possibili anagrammi sono $\dfrac{9!}{(2!)^3} = 45.360$.

3) $g(f(x)) = g(1-\log_2(4+x)) = e^{1-\log_2(4+x)}$;
$f(h(g(x))) = f(h(e^x)) = f(\cos(8-e^x)) = 1-\log_2(4+\cos(8-e^x))$;
$f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right) = f\left(\dfrac{1}{e^x}\right) = f(e^{-x}) = 1-\log_2(4+e^{-x})$; per determinare l'espressione dell'inversa, posto $y = 1-\log_2(4+e^{-x})$ risulta
$\log_2(4+e^{-x}) = 1-y$ da cui
$4+e^{-x} = 2^{1-y} \Rightarrow e^{-x} = 2^{1-y}-4 \Rightarrow -x = \log\left(2^{1-y}-4\right) \Rightarrow$
$x = -\log\left(2^{1-y}-4\right)$, inversa: $y = -\log\left(2^{1-x}-4\right)$.

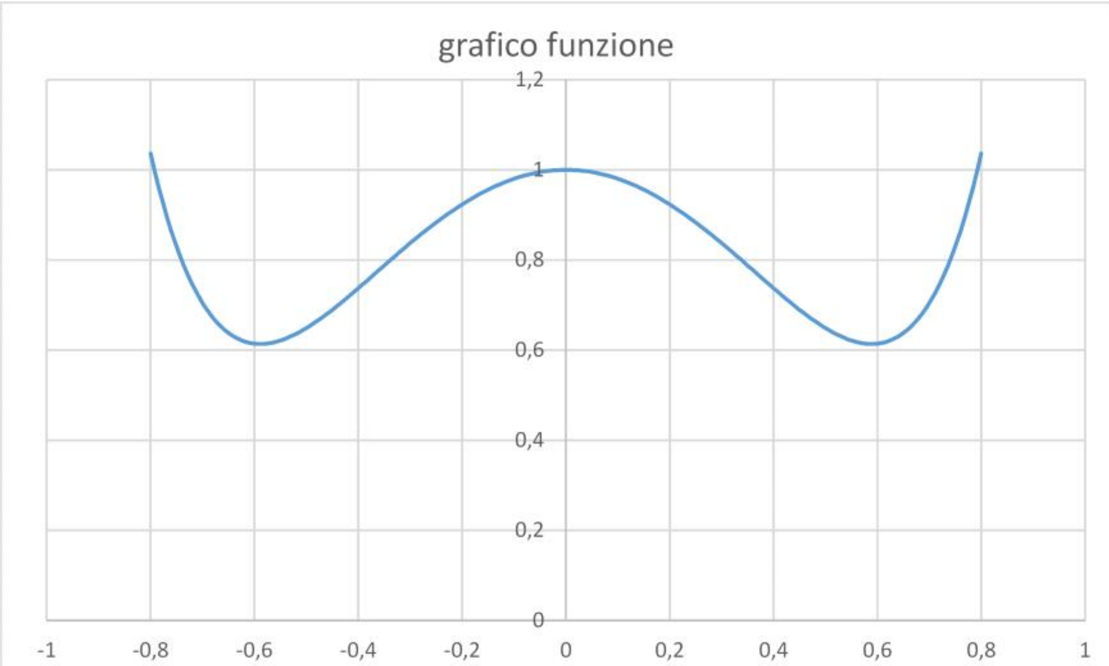
4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\log^3 x = 0$, quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\log^3 x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\log^3 x}-1}{x\cdot\log^3 x}\cdot\log^3 x = 1\cdot(\to -\infty) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-6x}{x^3}\right)^{-x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x^2}\right)^{-x^2} = e^6.$$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$. $y(-x) = e^{2(-x)^2}-4(-x)^2 = e^{2x^2}-4x^2 = y(x)$; funzione pari, la studiamo solo sul semiasse positivo ed operiamo per simmetria.
Segno: $e^{2x^2}-4x^2>0 \Rightarrow e^{2x^2}>4x^2$, disequazione che non è risolvibile algebricamente, il segno della funzione viene studiato dopo la crescenza e la decrescenza.
Intersezioni: $\begin{cases} y = e^{2x^2}-4x^2 \\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=e^0 \\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0\end{cases}$. Intersezione con l'asse delle ordinate nel punto $(0,1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x^2}-4x^2 = +\infty$, perché $4x^2 = o\left(e^{2x^2}\right)$ per $x\to+\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x^2}-4x^2}{x} = +\infty$, in quanto come sopra risulta $4x^2$ e $x$ infinitesimi rispetto a $e^{2x^2}$ per $x\to+\infty$, la funzione non presenta asintoti;
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{2x^2}\cdot 4x-8x = 4x\left(e^{2x^2}-2\right)$.
$4x\left(e^{2x^2}-2\right)>0 \Rightarrow e^{2x^2}-2>0 \Rightarrow e^{2x^2}>2 \Rightarrow x^2>\dfrac{1}{2}\log 2 \Rightarrow x>\sqrt{\log 2/2}$.

Funzione strettamente crescente in $[\sqrt{\log 2/2}, +\infty[$, strettamente decrescente in $[0, \sqrt{\log 2/2}]$. $y\left(\sqrt{\log 2/2}\right) = e^{\log 2}-2\log 2 = 2-2\log 2>0$, la funzione presenta massimo relativo in $(0,1)$ e minimo assoluto in $\left(\sqrt{\log 2/2}, 2-2\log 2\right)$, dal segno del minimo assoluto si deduce che la funzione è strettamente positiva.
Grafico:




6) $\displaystyle\int \frac{6x-1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{6x-1}{(x+3)(x-2)}\,dx$ ; per la teoria sugli integrali delle funzioni razionali fratte esistono $A$ e $B$ tali che

$\displaystyle\frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{6x-1}{(x+3)(x-2)}$ ovvero

$\displaystyle\frac{(A+B)x+(-2A+3B)}{(x+3)(x-2)} = \frac{6x-1}{(x+3)(x-2)}$.

Posto $\begin{cases} A+B=6 \\ -2A+3B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=19/5 \\ B=11/5 \end{cases}$ quindi:

$$\int \frac{6x-1}{x^2+x-6}\,dx = \int \frac{19/5}{(x+3)}\,dx + \int \frac{11/5}{(x-2)}\,dx =$$

$$\frac{19}{5}\log|x+3| + \frac{11}{5}\log|x-2| + c\,.$$

7) Per la formula del differenziale $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$. Posto $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$ e $h = 0.1$, risulta: $f(x_0) = \sqrt[3]{27} = 3$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ , $f'(x_0) = \dfrac{1}{27}$ da cui $\sqrt[3]{27.1} \simeq 3 + \dfrac{1}{27} \cdot 0.1 = \dfrac{801}{200} = 3{,}0\overline{037}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}$.
$z(P) = 3$, $\nabla z = (-ye^{-2y},\ -xe^{-2y} + 2xye^{-2y})$, $\nabla z(P) = (0,\ -1)$. Piano tangente: $z = 3 - y$ ovvero $y + z = 3$.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)
20 febbraio 2015
Compito $\mathbb{A}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q\ e\ r$ | $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ | $p\ o\ q$ | $(p\ o\ q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |

Per ipotesi la proposizione $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ è falsa e quindi consideriamo solo la seconda, terza e quarta riga della tavola, come è facile notare non possiamo concludere che $(p\ o\ q) \Rightarrow r$ è falsa.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -4 \vee x \geq 4\} = ]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$ ;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 3^x < \sqrt[5]{9}\} = \{x \in \mathbb{R}: 3^x < 3^{\frac{2}{5}}\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 2/5\} = ]-\infty, 2/5[$.
$A \cup B = ]-\infty, 2/5[ \cup [4, +\infty[$, $A \cap B = ]-\infty, -4]$,
$\delta(A \cup C(B)) = \delta(]-\infty, -4] \cup [2/5, +\infty[) = \{-4, 2/5\}$,
$\delta(C(A) \cap B) = \delta(]-4, 2/5[) = \{-4, 2/5\}$.

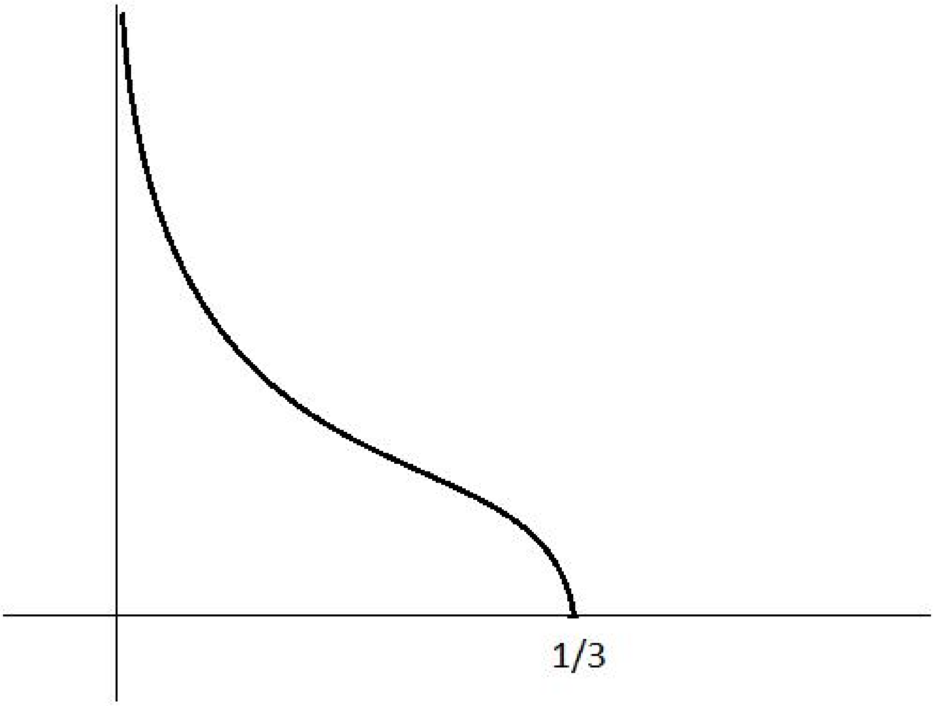
3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = a - 3$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = 1 - a$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = 1 - b$,
$\lim_{x \to b^+} f(x) = b - 6$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $a - 3 = 1 - a$ e $1 - b = b - 6$ ovvero $a = 2$ e $b = 7/2$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(-x) + arctg\, 4x}{x} = \lim_{x \to 0} \left( -\frac{sen(-x)}{-x} + 4\frac{arctg\, 4x}{4x} \right) =$
$-1 + 4 = 3$;
$\lim_{x \to \infty} 4x\, log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 4\, log\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = 4 \cdot loge^{-1} = -4$.

5) $C.E.$: $2^{\frac{1}{x}} - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \geq 2^3 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{x} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - 3x}{x} \geq 0 \Rightarrow$
$0 < x \leq 1/3$; $C.E. = ]0, 1/3]$.
Segno: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$, perché si tratta di una radice quadrata.
Intersezioni: $\begin{cases} y = \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 8} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 8} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} - 8 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 0 \end{cases}$.
Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(1/3, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 8} = \sqrt{2^{\frac{1}{(\to 0^+)}} - 8} = \sqrt{2^{(\to +\infty)} - 8} = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$.
Crescenza e decrescenza:
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 8}} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \log 2 \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2^{\frac{1}{x}} \cdot \log 2}{2x^2\sqrt{2^{\frac{1}{x}} - 8}}. \; y' < 0, \forall x \in ]0, 1/3[.$$

Funzione strettamente decrescente nel $C.E.$, la funzione presenta minimo assoluto in $(1/3, 0)$; nota che $\lim_{x \to (1/3)^-} y' = -\infty$, $(1/3, 0)$ è punto a tangente verticale.

Grafico:




6) Integriamo per parti: $\int_0^{2\pi} (x \cdot cos\, 3x)\, dx =$

$$\left( x \cdot \frac{sen\, 3x}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left( 1 \cdot \frac{sen\, 3x}{3} \right) dx = \left( x \cdot \frac{sen\, 3x}{3} + \frac{cos\, 3x}{9} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

7) Affinché il prodotto $A \cdot X$ sia definito è necessario che la matrice $X$ abbia 2 righe, inoltre affinché $A \cdot X = B^T \cdot A^T$ si deve verificare che $X$ ha lo stesso numero di colonne di $A^T$ ovvero 2, quindi $X$ è una matrice 2x2: $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. Le matrici $A$ e $B$ sono simmetriche quindi $B^T \cdot A^T = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ da cui

$$A \cdot X = B^T \cdot A^T \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$.

$z(P) = 12$, $\nabla z = (2e^{2x-y} + 6x, -e^{2x-y} + 4)$, $\nabla z(P) = (8, 3)$. Piano tangente: $z = 12 + 8(x-1) + 3(y-2)$ ovvero $8x + 3y - z = 2$.

# Compito $\mathbb{B}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q\ o\ r$ | $p \Rightarrow (q\ o\ r)$ | $p\ o\ q$ | $(p\ o\ q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | | |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |

Per ipotesi la proposizione $p \Rightarrow (q\ o\ r)$ è vera e quindi escludiamo la quarta riga della tavola, come è facile notare non possiamo concludere che $(p\ o\ q) \Rightarrow r$ è vera.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| < 4\} = \{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 4\} = ]-4, 4[$ ;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 4^x < \sqrt[6]{16}\} = \{x \in \mathbb{R}: 4^x < 4^{\frac{2}{6}}\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 1/3\} = ]-\infty, 1/3[$.
$A \cup B = ]-\infty, 4[$, $A \cap B = ]-4, 1/3[$,
$\delta(A \cup C(B)) = \delta(]-4, +\infty[) = \{-4\}$,
$\delta(C(A) \cap B) = \delta(]-\infty, -4]) = \{-4\}$.

3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -1 - a$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = 4 + a$; $\lim_{x \to b^-} f(x) = 4 + b$, $\lim_{x \to b^+} f(x) = 5 - b$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $-1 - a = 4 + a$ e $4 + b = 5 - b$ ovvero $a = -5/2$ e $b = 1/2$.

4)
$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+3x) - arcsen(-x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left( 3\frac{log(1+3x)}{3x} + \frac{arcsen(-x)}{-x} \right) = 3$$
$$+1 = 4;\ \lim_{x \to \infty} 3x\, log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} 3\, log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 3 \cdot log\, e = 3.$$

5) $C.E.$: $3^{-\frac{1}{x}} - 3 \geq 0 \Rightarrow 3^{-\frac{1}{x}} \geq 3 \Rightarrow -\frac{1}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} \leq 0 \Rightarrow$
$-1 \leq x < 0$; $C.E. = [-1, 0[$.

Segno: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$, perché si tratta di una radice quadrata.

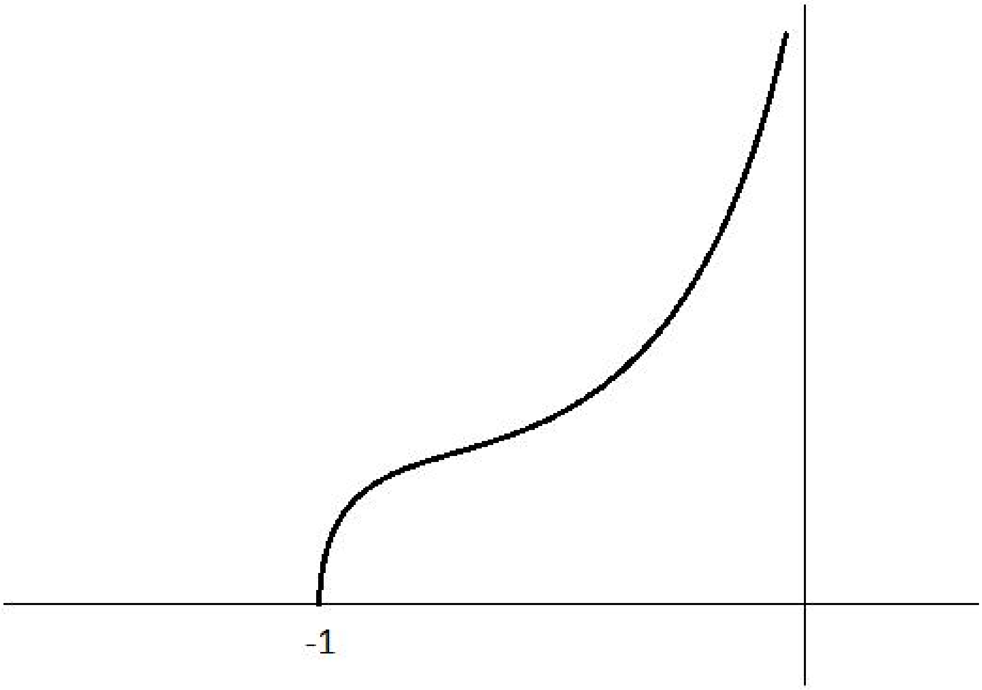
Intersezioni:
$$\begin{cases} y = \sqrt{3^{-\frac{1}{x}} - 3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3^{-\frac{1}{x}} - 3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{-\frac{1}{x}} - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$
Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(-1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{3^{-\frac{1}{x}} - 3} = \sqrt{3^{-\frac{1}{(\to 0^-)}} - 3} = \sqrt{3^{(\to +\infty)} - 3} = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{3^{-\frac{1}{x}} - 3}} \cdot 3^{-\frac{1}{x}} \cdot \log 3 \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3^{-\frac{1}{x}} \cdot \log 3}{2x^2\sqrt{3^{-\frac{1}{x}} - 3}}$.

$y' > 0, \forall x \in ]-1, 0[$. Funzione strettamente crescente nel $C.E.$, la funzione presenta minimo assoluto in $(-1, 0)$; nota che $\lim_{x \to (-1)^+} y' = +\infty$, $(-1, 0)$ è punto a tangente verticale.

Grafico:




6) Integriamo per parti: $\displaystyle\int_0^{\pi} (x \cdot sen\,3x)\,dx \;=$

$$\left(x \cdot \left(-\frac{cos\,3x}{3}\right)\right)\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(1 \cdot \frac{cos\,3x}{3}\right)dx = \left(-\,x \cdot \frac{cos\,3x}{3} + \frac{sen\,3x}{9}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$= \dfrac{\pi}{3}$.

7) Affinché il prodotto $A \cdot X$ sia definito è necessario che la matrice $X$ abbia 2 righe, inoltre affinché $A \cdot X = B \cdot A^T$ si deve verificare che $X$ ha lo stesso numero di colonne di $A^T$ ovvero 2, quindi $X$ è una matrice 2x2: $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. La matrice $A$ è simmetrica quindi $B \cdot A^T = B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ da cui

$$A \cdot X = B \cdot A^T \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$.
$z(P) = -2$, $\nabla z = (e^{x-3y} - 2, \,-3e^{x-3y} + 6y)$, $\nabla z(P) = (-1, 3)$. Piano tangente: $z = -2 - (x-3) + 3(y-1)$ ovvero $x - 3y + z = -2$.

# Compito $\mathbb{C}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q\ e\ r$ | $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ | $p\ e\ q$ | $(p\ e\ q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | | |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | | |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | | |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |

Per ipotesi la proposizione $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ è vera e quindi non consideriamo la seconda, terza e quarta riga della tavola, come è facile notare non possiamo concludere che $(p\ e\ q) \Rightarrow r$ è falsa, anzi possiamo concludere l'opposto ovvero $(p\ e\ q) \Rightarrow r$ è sicuramente vera.

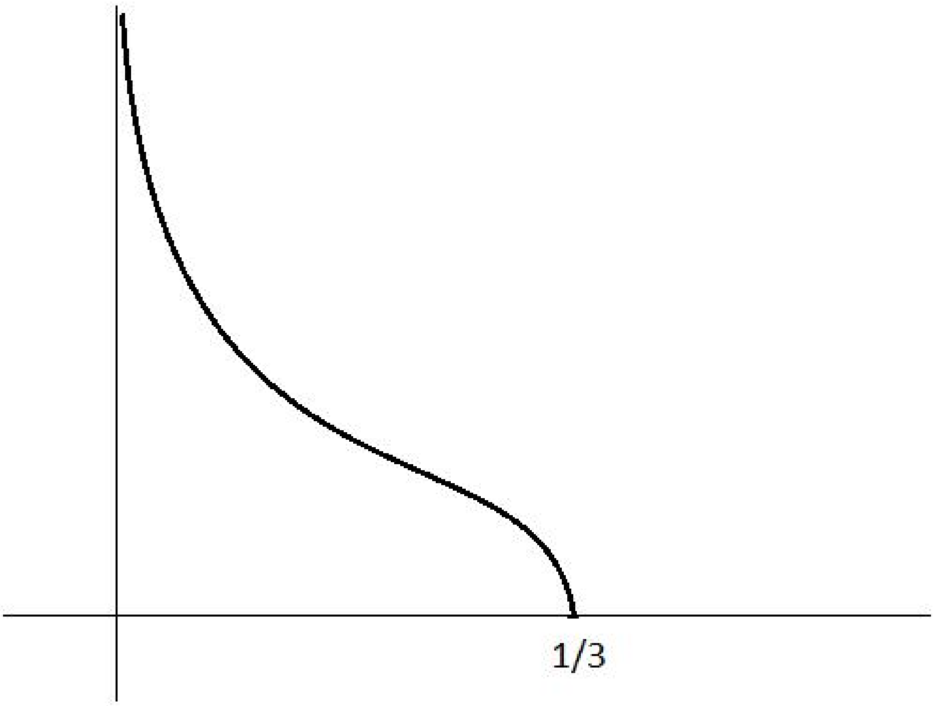
2) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$ ;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 5^x \geq \sqrt[3]{25}\} = \{x \in \mathbb{R}: 5^x \geq 5^{\frac{2}{3}}\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 2/3\} = [2/3, +\infty[$.
$A \cup B = [-2, +\infty[$, $A \cap B = [2/3, 2]$,
$\delta(A \cap C(B)) = \delta([-2, 2/3[) = \{-2, 2/3\}$,
$\delta(C(A) \cup B) = \delta(]-\infty, -2[ \cup [2/3, +\infty[) = \{-2, 2/3\}$.

3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 4 + a$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 2 - a$; $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 2 - b$,
$\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = -2 + b$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se
$4 + a = 2 - a$ e $2 - b = -2 + b$ ovvero $a = -1$ e $b = 2$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\, x - arcsen\, 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left( \dfrac{tg\, x}{x} - 3 \dfrac{arcsen\, 3x}{3x} \right) = 1 - 3 = -2$;
$\lim\limits_{x \to \infty} x \log\left(1 + \dfrac{5}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \log\left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x = \log e^5 = 5$.

5) $C.E.$: $3^{\frac{1}{x}} - 27 \geq 0 \Rightarrow 3^{\frac{1}{x}} \geq 3^3 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{x} - 3 \geq 0 \Rightarrow \dfrac{1 - 3x}{x} \geq 0 \Rightarrow$
$0 < x \leq 1/3$; $C.E. = ]0, 1/3]$.
Segno: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$, perché si tratta di una radice quadrata.
Intersezioni:
$$\begin{cases} y = \sqrt{3^{\frac{1}{x}} - 27} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3^{\frac{1}{x}} - 27} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{\frac{1}{x}} - 27 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 0 \end{cases}.$$
Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(1/3, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{3^{\frac{1}{x}} - 27} = \sqrt{3^{\frac{1}{(\to 0^+)}} - 27} = \sqrt{3^{(\to +\infty)} - 27} = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$.
Crescenza e decrescenza:
$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{3^{\frac{1}{x}} - 27}} \cdot 3^{\frac{1}{x}} \cdot \log 3 \cdot \left( -\dfrac{1}{x^2} \right) = -\dfrac{3^{\frac{1}{x}} \cdot \log 3}{2x^2\sqrt{3^{\frac{1}{x}} - 27}}$. $y' < 0, \forall x \in ]0, 1/3[$.
Funzione strettamente decrescente nel $C.E.$, la funzione presenta minimo assoluto in $(1/3, 0)$; nota che $\lim\limits_{x \to (1/3)^-} y' = -\infty$, $(1/3, 0)$ è punto a tangente verticale.

Grafico:




6) Integriamo per parti: $\displaystyle\int_0^{\pi} (x \cdot cos\,2x)\,dx =$

$$\left(x \cdot \frac{sen\,2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(1 \cdot \frac{sen\,2x}{2}\right)dx = \left(x \cdot \frac{sen\,2x}{2} + \frac{cos\,4x}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = 0\,.$$

7) Affinché il prodotto $A \cdot X$ sia definito è necessario che la matrice $X$ abbia 2 righe, inoltre affinché $A \cdot X = B \cdot A$ si deve verificare che $X$ ha lo stesso numero di colonne di $A$ ovvero 2, quindi $X$ è una matrice 2x2: $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$.

$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ da cui

$$A \cdot X = B \cdot A \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix}$.

$z(P) = -3$, $\nabla z = \left(2e^{2x-y^2} + 2,\ -2ye^{2x-y^2} - 4\right)$, $\nabla z(P) = (4,\ -8)$. Piano tangente: $z = -3 + 4(x-2) - 8(y-2)$ ovvero $4x - 8y - z = -5$.

Compito $\mathbb{D}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q\ o\ r$ | $p \Rightarrow (q\ o\ r)$ | $p\ e\ q$ | $(p\ e\ q) \Rightarrow r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | | |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |

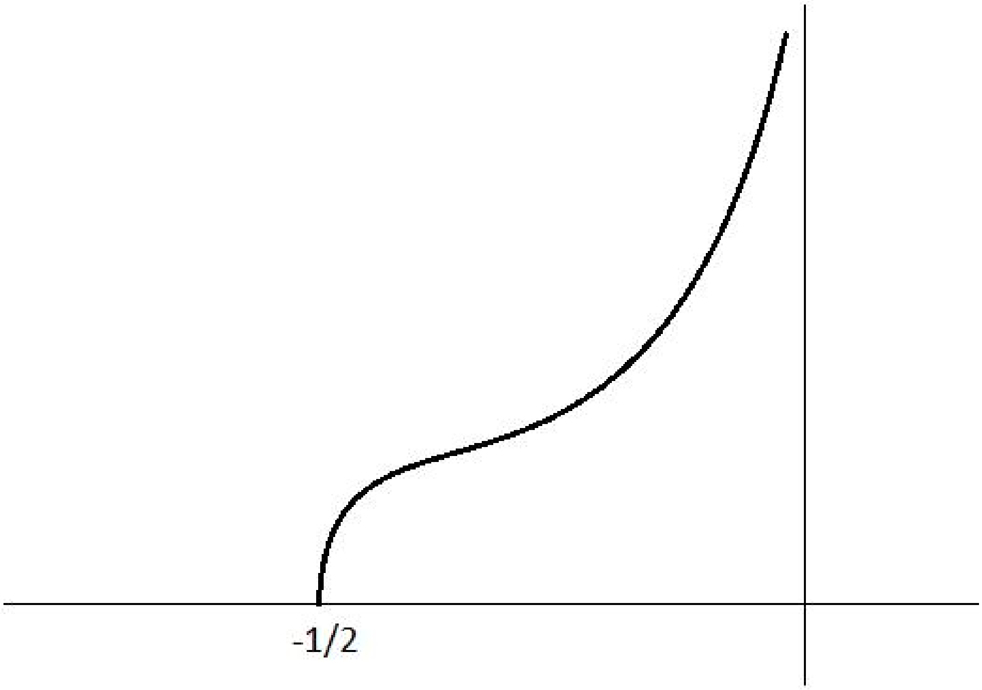
Per ipotesi la proposizione $p \Rightarrow (q\ o\ r)$ è falsa e quindi consideriamo solo la quarta riga della tavola, come è facile notare possiamo concludere che $(p\ e\ q) \Rightarrow r$ è vera.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| > 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -2 \vee x > 2\} = ]-\infty, -2[ \cup ]2, +\infty[$ ;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \geq \sqrt[3]{32}\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \geq 2^{\frac{5}{3}}\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 5/3\} = [5/3, +\infty[$.
$A \cup B = ]-\infty, -2[ \cup [5/3, +\infty[$, $A \cap B = ]2, +\infty[$,
$\delta(A \cap C(B)) = \delta(]-\infty, -2[) = \{-2\}$,
$\delta(C(A) \cup B) = \delta([-2, +\infty[) = \{-2\}$.

3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -3 - a$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = 2 + a$; $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = 2 + b$, $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = 3 - b$. La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $-3 - a = 2 + a$ e $2 + b = 3 - b$ ovvero $a = -5/2$ e $b = 1/2$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\,4x - log(1-x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(4\dfrac{sen\,4x}{4x} + \dfrac{log(1-x)}{-x}\right) = 4 + 1 = 5$;
$\lim\limits_{x \to \infty} x\,log\left(1 - \dfrac{3}{x}\right) = \lim\limits_{x \to \infty} log\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)^x = log\,e^{-3} = -3$.

5) $C.E.$: $2^{-\frac{1}{x}} - 4 \geq 0 \Rightarrow 2^{-\frac{1}{x}} \geq 2^2 \Rightarrow -\dfrac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{x} + 2 \leq 0 \Rightarrow \dfrac{1+2x}{x} \leq 0 \Rightarrow$
$-1/2 \leq x < 0$; $C.E. = [-1/2, 0[$.
Segno: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$, perché si tratta di una radice quadrata.
Intersezioni:
$$\begin{cases} y = \sqrt{2^{-\frac{1}{x}} - 4} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2^{-\frac{1}{x}} - 4} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-\frac{1}{x}} - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1/2 \\ y = 0 \end{cases}.$$
Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(-1/2, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{2^{-\frac{1}{x}} - 4} = \sqrt{2^{-\frac{1}{(\to 0^-)}} - 4} = \sqrt{2^{(\to +\infty)} - 4} = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2^{-\frac{1}{x}} - 4}} \cdot 2^{-\frac{1}{x}} \cdot \log 2 \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2^{-\frac{1}{x}} \cdot \log 2}{2x^2\sqrt{2^{-\frac{1}{x}} - 4}}$.
$y' > 0, \forall x \in ]-1/2, 0[$. Funzione strettamente crescente nel $C.E.$, la funzione presenta minimo assoluto in $(-1/2, 0)$; nota che $\lim\limits_{x \to (-1/2)^+} y' = +\infty$,
$(-1/2, 0)$ è punto a tangente verticale.
Grafico:




6) Integriamo per parti: $\displaystyle\int_0^{2\pi} (x \cdot sen\, 2x)\, dx =$

$$\left( x \cdot \left( -\frac{cos\, 2x}{2} \right) \right) \Bigg|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \left( 1 \cdot \frac{cos\, 2x}{2} \right) dx =$$

$$\left( -\, x \cdot \frac{cos\, 2x}{2} + \frac{sen\, 2x}{2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = -\, \pi\, .$$

7) Affinché il prodotto $A \cdot X$ sia definito è necessario che la matrice $X$ abbia 2 righe, inoltre affinché $A \cdot X = B^T \cdot A$ si deve verificare che $X$ ha lo stesso numero di colonne di $A$ ovvero 2, quindi $X$ è una matrice 2x2: $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. La matrice $B$ è simmetrica quindi $B^T \cdot A = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ da cui

$$A \cdot X = B \cdot A^T \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z = z(P) + \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

$z(P) = -5$, $\nabla z = \left(4xe^{2x^2-8y} - 1,\, -8e^{2x^2-8y} - 4\right)$, $\nabla z(P) = (7,\, -12)$. Piano tangente: $z = -5 + 7(x-2) - 12(y-1)$ ovvero $7x - 12y - z = 7$.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)
28 marzo 2015
Compito Unico

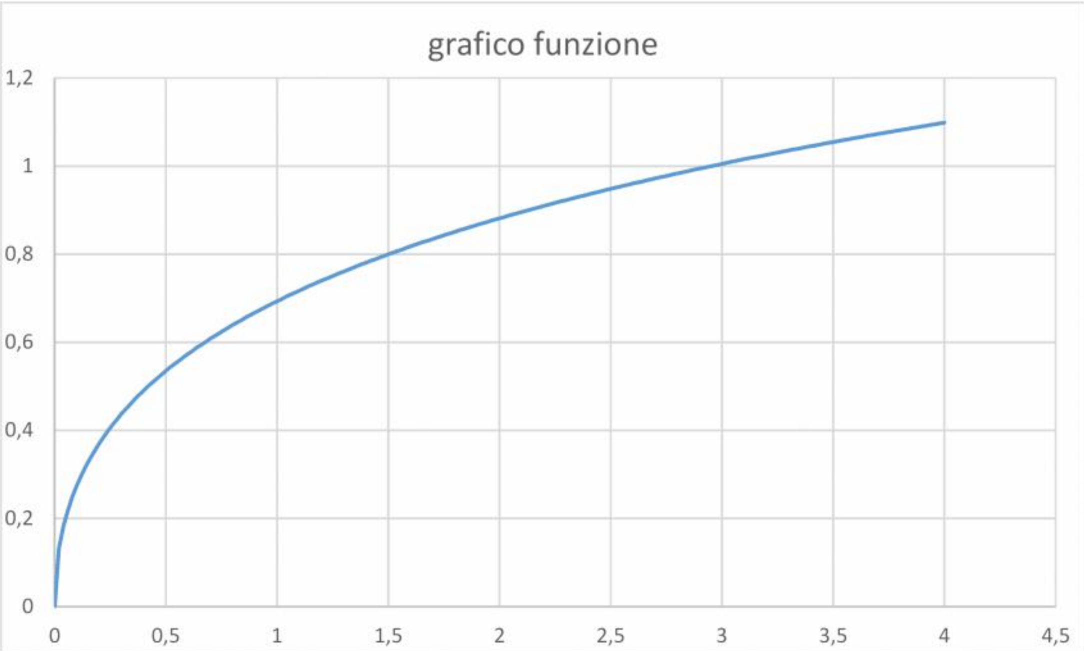
1) Due possibili coppie di intervalli $A$ e $B$ sono ad esempio $A=[-2,4]$ e $B=[3,5]$ oppure $A=[-2,5]$ e $B=[3,4]$.

2) Le possibili squadre maschili distinte che l'insegnante può formare sono date dalle combinazioni semplici dei 12 studenti presi 6 a 6 ovvero $\binom{12}{6}=924$, allo stesso modo quelle femminili sono $\binom{8}{6}=28$.

3) Con $f(x)=cos\,x$ risulta $f(g(x))=cos(g(x))=cos(log\,x)$ da cui facilmente $g(x)=log\,x$. $g\left(\frac{1}{g(x)}\right)=g\left(\frac{1}{log\,x}\right)=log\left(\frac{1}{log\,x}\right)=-log(log\,x)$;
$g\left(e^{f(x)}\right)=log\left(e^{f(x)}\right)=f(x)=cos\,x$.

4) Per $x\to-\infty$, $e^x$ e $sen\,x$ sono o-piccoli di $x^2$ e $e^x$ e $cos\,x$ sono o-piccoli di $x^3$, pertanto $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x+x^2+sen\,x}{e^x+x^3+cos\,x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{o(x^2)+x^2+o(x^2)}{o(x^3)+x^3+o(x^3)}=$
$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$
$\lim_{x\to0}\frac{sen\,x+sen\,3x}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{sen\,x}{x}+3\frac{sen\,3x}{3x}\right)=1+3=4.$

5) $C.E.$: $1+\sqrt{x}>0\Rightarrow\sqrt{x}>-1$ verificata $\forall x\geq0$; $C.E.=[0,+\infty[$.
Segno: $log\left(1+\sqrt{x}\right)\geq0\Rightarrow1+\sqrt{x}\geq1\Rightarrow\sqrt{x}\geq0,\forall x\in C.E.$.
Intersezioni:
$$\begin{cases}y=log\left(1+\sqrt{x}\right)\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}log\left(1+\sqrt{x}\right)=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+\sqrt{x}=1\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x}=0\\y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$
. Unica intersezione con gli assi nell'origine degli stessi $(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x\to+\infty}log\left(1+\sqrt{x}\right)=log\left(1+\sqrt{(\to+\infty)}\right)=log(\to+\infty)=+\infty$,
$\lim_{x\to+\infty}\frac{log\left(1+\sqrt{x}\right)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=0$, la funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y'=\frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$.
$y'>0,\forall x\in]0,+\infty[$. Funzione strettamente crescente nel $C.E.$, la funzione presenta minimo assoluto in $(0,0)$; nota che $\lim_{x\to0^+}y'=+\infty$, $(0,0)$ è punto a tangente verticale.
Concavità e convessità:
$$y''=-\frac{\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)+2\cancel{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\cancel{\sqrt{x}}}}{\left(2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^2}=-\frac{2+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)\right)^2}.$$
$y''<0,\forall x\in]0,+\infty[$. Funzione strettamente concava nel $C.E.$, la funzione non presenta flessi.
Grafico:




6) Integriamo per parti: $\displaystyle\int_0^3 xe^{3-x}\,dx \ =$

$$\left(-x\cdot e^{3-x}\right)\Big|_0^3 - \int_0^3 \left(-1\cdot e^{3-x}\right)dx = \left(-x\cdot e^{3-x} - e^{3-x}\right)\Big|_0^3 =$$

$$\left(-3\cdot e^{3-3} - e^{3-3}\right) - \left(-0\cdot e^{3-0} - e^{3-0}\right) = e^3 - 4.$$

7) La funzione di equazione $y = x + sen\,x$ è somma di funzioni continue e derivabili in $[0,\pi]$, quindi ad essa è applicabile il Teorema di Lagrange; $y' = 1 + cos\,x$ e $\dfrac{y(\pi)-y(0)}{\pi-0} = \dfrac{(\pi+sen\,\pi)-(0+sen\,0)}{\pi} = 1$ . Per ottenere il valore che soddisfa al Teorema basta porre $1 + cos\,x = 1$ ovvero $cos\,x = 0$ da cui $x = \pi/2$.

8) $\nabla f = (6x, 4y+16)$.

$FOC$: $\begin{cases} 6x = 0 \\ 4y + 16 = 0 \end{cases}$, che ha come soluzione il punto $A(0,\,-4)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 24$.

$SOC$: $|\mathcal{H}f(A)| = 24 > 0$; $f''_{xx}(A) = 6 > 0$. $A$ minimo.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)

3 giugno 2015

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di appartenenza:

| $A$ | $B$ | $C$ | $A\cap B$ | $A\cap \mathcal{C}(C)$ | $A\cap B\subseteq C$ | $A\cap \mathcal{C}(C)\subseteq B$ | $A\subseteq C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $F$ | | |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $V$ | $F$ | |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $V$ | $V$ |

Dato che le inclusioni $A\cap B\subseteq C$ e $A\cap \mathcal{C}(C)\subseteq B$ sono verificate per ipotesi, non consideriamo la seconda e la quarta riga della tavola, per le rimanenti sei righe l'inclusione $A\subseteq C$ è verificata e concludiamo con certezza che essa è soddisfatta.

2) Per costruire un numero pari di sei cifre abbiamo $9$ possibili modi di scegliere la prima cifra, $10^4$ modi di scegliere le cifre dalla seconda alla quinta e $5$ modi possibili di scegliere l'ultima cifra; i numeri possibili sono quindi $9\cdot 10^4\cdot 5 = 450.000$. Per costruire invece un numero pari di sei cifre che presenta una ed una sola volta la cifra $3$, dobbiamo considerare due casi distinti: primo caso il $3$ è la prima cifra, per questa alternativa abbiamo $9^4$ modi di scegliere le cifre dalla seconda alla quinta e $5$ modi possibili di scegliere l'ultima cifra; secondo caso il $3$ è una fra la seconda e la quinta cifra, per questa alternativa abbiamo $4$ modi di scelta su dove posizionare la cifra $3$, $8$ modi di scegliere la prima cifra, $9^3$ modi di scegliere le rimanenti cifre dalla seconda alla quinta e $5$ modi possibili di scegliere l'ultima cifra; i numeri possibili sono quindi $9^4\cdot 5+4\cdot 8\cdot 9^3\cdot 5 = 280.665$.

3) Se $y$ presenta asintoto obliquo di equazione $y=2x$, si deve verificare che $\lim_{x\to\infty} ax+b+\dfrac{c}{x^2+x+1}-2x\ =0$ e questa condizione si verifica se e solo se $a=2$ e $b=0$, la condizione di passaggio per il punto $(1,0)$ impone $a+b+\dfrac{c}{3}=0$ ovvero $c=\ -6$.

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3tg\,x}-1}{arctg(sen\,2x)}\ =\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{3tg\,x}-1}{3tg\,x}\cdot\frac{3tg\,x}{x}}{\frac{arctg(sen\,2x)}{sen\,2x}\cdot\frac{sen\,2x}{2x}\cdot 2}\ =\ \frac{1\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2}\ =\ \frac{3}{2}.$$

Per $x\to\ +\infty$, $e^{-x}$, $x^3$ e $x^2$ sono o-piccoli di $e^x$, pertanto

$$\lim_{x\to\ +\infty} e^{\frac{e^{-x}+x^3}{e^x-x^2}}\ =\ \lim_{x\to\ +\infty} e^{\frac{o(e^x)+o(e^x)}{e^x-o(e^x)}}\ =\ \lim_{x\to\ +\infty} e^{\frac{o(e^x)}{e^x}}\ =e^0=1.$$

5) $C.E.$: $x\geq 0$; $C.E.=[0,+\infty[$.

Segno: $e^{x+\sqrt{x}}>0, \forall x\in C.E.$ perché si tratta di un'esponenziale.

Intersezioni: $\begin{cases} y=e^{x+\sqrt{x}} \\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=e^{0+\sqrt{0}} \\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=e^{0} \\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0\end{cases}$. Unica intersezione con gli assi nel punto $(0,1)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x\to\ +\infty} e^{x+\sqrt{x}}\ =e^{(\to+\infty)+\sqrt{(\to+\infty)}}=e^{(\to+\infty)}\ =\ +\infty,$$

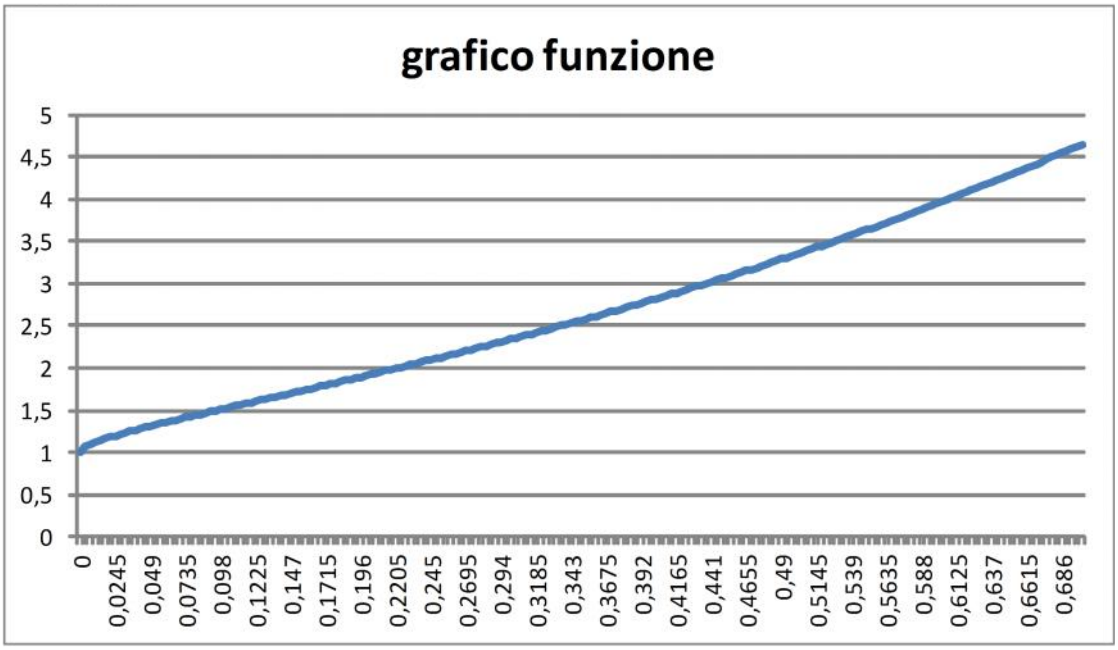
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x+\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot e^{\sqrt{x}} = +\infty$, perché per $x \to +\infty$, $x$ è un o-piccolo di $e^x$, la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x+\sqrt{x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$. $y' > 0, \forall x \in ]0, +\infty[$.

Funzione strettamente crescente nel $C.E.$, la funzione presenta minimo assoluto in $(0, 1)$; nota che $\lim\limits_{x \to 0^+} y' = +\infty$, $(0, 1)$ è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: dato che la funzione presenta un unico punto di flesso, la caratteristica che $\lim\limits_{x \to 0^+} y' = +\infty$ implica la concavità della funzione in un intorno destro di $0$.

Grafico:




6) Posto $arctg\, 2x = t$, risulta $2x = tg\, t \Rightarrow x = \frac{1}{2} tg\, t$ da cui $dx = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\, t\right) dt$.

Quindi $\int \frac{arctg\, 2x}{1 + 4x^2}\, dx = \int \frac{t}{1 + 4\left(\frac{1}{2} tg\, t\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\, t\right) dt =$

$\int \frac{t/2}{\cancel{1 + tg^2\, t}} \left(\cancel{1 + tg^2\, t}\right) dt = \int t/2\, dt = \frac{1}{4} t^2 + k = \frac{1}{4}(arctg\, 2x)^2 + k.$

7) Per la formula del differenziale se la funzione $f$ è derivabile in $x_0$, può essere approssimata nel punto $x_0 + h$ tramite la formula $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$.

Scelta $f(x) = log(1 + x)$, $x_0 = 0$ e $h = \frac{1}{12}$ risulta: $f(0) = log\, 1 = 0$,

$f'(x) = \frac{1}{1 + x}$ e $f'(0) = 1$, quindi l'approssimazione cercata è

$log\left(1 + \frac{1}{12}\right) \simeq \frac{1}{12}$.

8) $\nabla f = (3ax^2y + 2, ax^3 + 2by)$ con $\nabla f(1, 1) = (3a + 2, a + 2b)$, sotto la condizione $\nabla f(1, 1) = (29, 25)$ si ottiene facilmente $a = 9$ e $b = 8$; la funzione è $f(x, y) = 9x^3y + 8y^2 + 2x$. Veniamo ora alla determinazione della natura dei punti critici: $\nabla f = (27x^2y + 2, 9x^3 + 16y)$.

$FOC$: $\begin{cases} 27x^2y+2=0 \\ 9x^3+16y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27x^2\left(-\dfrac{9x^3}{16}\right)+2=0 \\ y=-\dfrac{9x^3}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^5=\dfrac{32}{243} \\ y=-\dfrac{9x^3}{16} \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$, unico punto critico $A(2/3,\,-1/6)$.

$\mathcal{H}f=\begin{bmatrix} 54xy & 27x^2 \\ 27x^2 & 16 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f|=864xy-729x^4$.

$SOC$: $|\mathcal{H}f(A)|=864\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{6}\right)-729\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=-240<0$. $A$ sella.

**Università degli Studi di Siena**

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)

4 luglio 2015

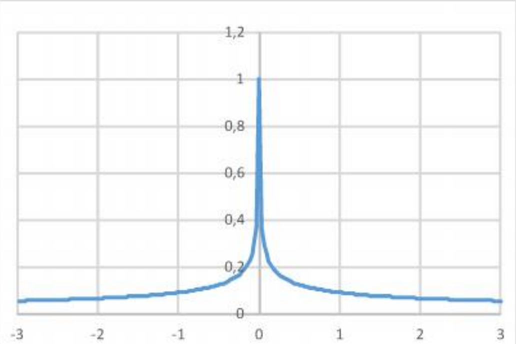
Compito Unico

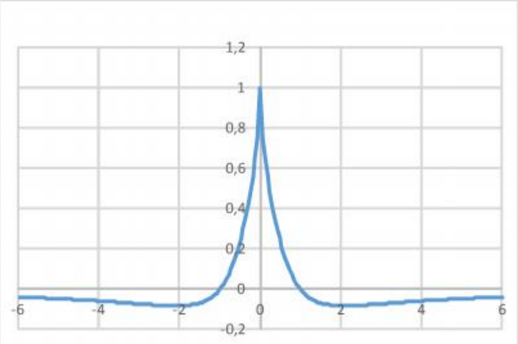
1) Se la proposizione composta $p\ e\ q$ è sempre falsa, le proposizioni semplici $p$ e $q$ non possono essere contemporaneamente vere, costruiamo quindi la tavola di verita solo nei tre casi di interesse:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $p\ o\ q$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p\ o\ q)$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |

2) $\mathbb{A} = \mathcal{C}(]-\infty, -2[\cup[3, +\infty[) = [-2, 3[$, allo stesso modo si ottiene $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathcal{C}(]-\infty, -2[\cup[3, \pi[\cup]3\pi, +\infty[) = [-2, 3[\cup[\pi, 3\pi]$ e dato che $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono due intervalli disgiunti facilmente si ha $\mathbb{B} = [\pi, 3\pi]$. Per le leggi di De Morgan $\mathcal{C}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{B}) = \mathcal{C}(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$ e quindi $\delta(\mathcal{C}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{B})) = \delta(]-\infty, -2[\cup[3, \pi[\cup]3\pi, +\infty[) = \{-2, 3, \pi, 3\pi\}$ mentre $\mathcal{D}(\mathcal{C}(\mathbb{A}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{B})) = ]-\infty, -2] \cup [3, \pi] \cup [3\pi, +\infty[$.

3) Di seguito sono proposti due possibili grafici di funzioni che soddisfano le quattro condizioni richieste.




4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sen^2x}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sen^2x}-1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sqrt{1+sen^2x}+1}{\sqrt{1+sen^2x}+1} =$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{(1-\cos x)\cdot\left(\sqrt{1+sen^2x}+1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen^2x}{x^2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\left(\sqrt{1+sen^2x}+1\right)} =$$
$\dfrac{1}{\frac{1}{2}\cdot 2} = 1$ . (NB il limite è facilmente calcolabile anche tramite il Teorema di de l'Hôpital)

Posto $\dfrac{1}{x} = y$, il limite proposto può essere riscritto come:

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot sen\,y\cdot\cos y = \lim_{y\to 0}\cdot\frac{sen\,y}{y}\cdot\cos y = 1\cdot 1 = 1.$$

5) $C.E.$: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1;\ C.E. = ]1, +\infty[$.

Segno: $\log x^2 - \log(x-1) > 0 \Rightarrow \log x^2 > \log(x-1) \Rightarrow x^2 > x-1 \Rightarrow x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in C.E.$ perché il $\Delta$ dell'espressione di secondo grado è pari a $-3 < 0$. Non esistono intersezioni con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 1} \log x^2 - \log(x-1) \; = \log 1 - \log(\to 0^+) = +\infty$, $A.V.$ di equazione $x = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} \log x^2 - \log(x-1) \; = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{x^2}{x-1} \; = \lim_{x \to +\infty} \log \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)} \; = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x^2 - \log(x-1)}{x} \; = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x^2}{x} - \frac{\log(x-1)}{x} \; = 0$, perché per $x \to +\infty$, $\log x^2$ e $\log(x-1)$ sono o-piccoli di $x$.

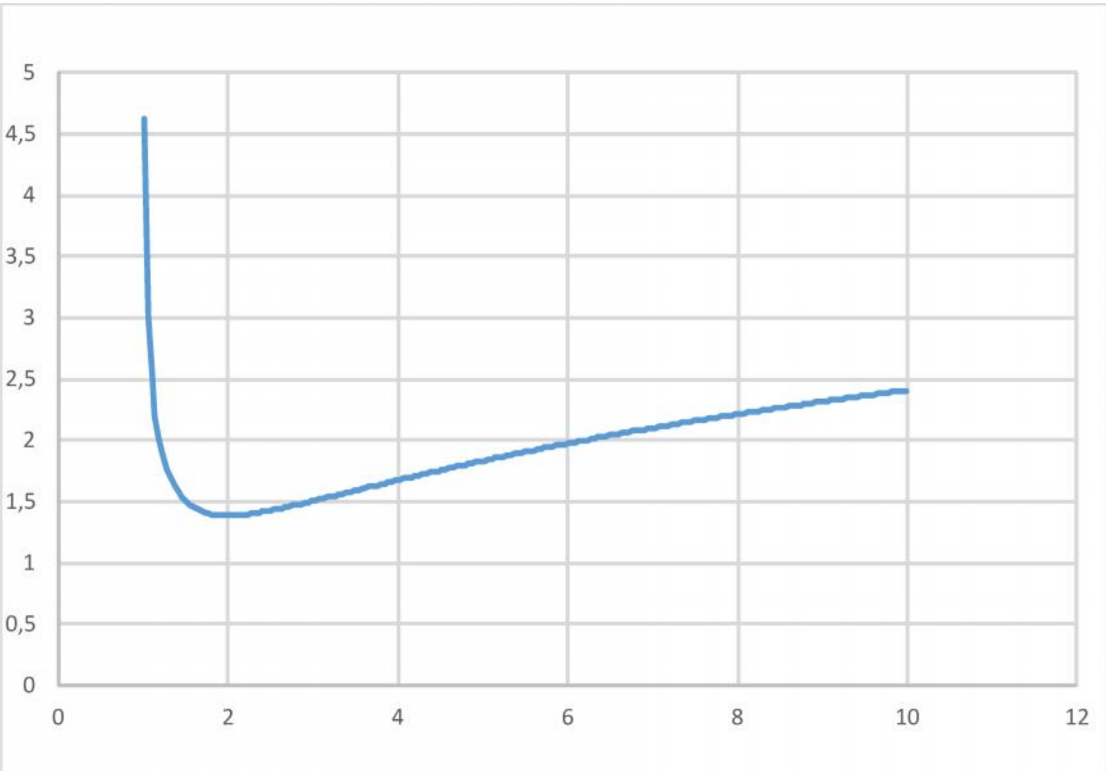
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)}$. $y' > 0, \forall x > 2$.

Funzione strettamente decrescente in $]1, 2]$, strettamente crescente in $[2, +\infty[$, la funzione presenta minimo assoluto paria a $y(2) = \log 4$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{x^2 - x - (x-2)(2x-1)}{(x(x-1))^2} = \frac{-x^2 + 4x - 2}{(x(x-1))^2}$. $y'' > 0$ se $-x^2 + 4x - 2 > 0$ ovvero $x^2 - 4x + 2 < 0$, vera se $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$.

Funzione strettamente convessa in $]1, 2+\sqrt{2}]$, strettamente concava in $[2+\sqrt{2}, +\infty[$, la funzione presenta flesso di ascissa $2+\sqrt{2}$ e ordinata $y\left(2+\sqrt{2}\right)$.

Grafico:




6) Integriamo per parti: $\int (x^2+1)e^{-x}\,dx = -(x^2+1)e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx =$

$-(x^2+1)e^{-x} - 2xe^{-x} + \int 2e^{-x}\,dx = -(x^2+1)e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + k =$

$-(x^2+2x+3)e^{-x} + k$.

7) I polinomi di MacLaurin di quarto grado delle funzioni $sen\, x$, $e^{2x^2}$ e $cos\, x$ sono

rispettivamente: $P_1(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, $P_2(x) = 1 + 2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2!}$ e

$P_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ . Moltiplichiamo i primi due polinomi ed eliminiamo i termini di grado superiore al quarto per ottenere il polinomio di $sen\, x \cdot e^{2x^2}$: $x + \frac{11}{6}x^3$, ed in conclusione sommiamo $P_3(x)$ al polinomio ottenuto per avere il polinomio cercato: $P(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{11}{6}x^3 + \frac{x^4}{24}$ .

8) $\nabla f = (36x^2 - y^2, -2xy + 12)$.

$FOC$: $\begin{cases} 36x^2 - y^2 = 0 \\ -2xy + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36x^2 - \frac{36}{x^2} = 0 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$ , che ha come soluzione i punti $P_{1,2}(\pm 1, \pm 6)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 72x & -2y \\ -2y & -2x \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -144x^2 - 4y^2$.

$SOC$: $|\mathcal{H}f| < 0$ in $P_{1,2}$, pertanto i punti $(\pm 1, \pm 6)$ sono punti di sella.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)

7 settembre 2015

Compito Unico

1) Consideriamo le possibili casistiche che si possono verificare per le tre proposizioni semplici $p$, $q$ e $r$ e che sono riportate qui sotto:

$$\begin{array}{ccc} p & q & r \\ V & V & V \\ V & V & F \\ V & F & V \\ V & F & F \\ F & V & V \\ F & V & F \\ F & F & V \\ F & F & F \end{array}.$$

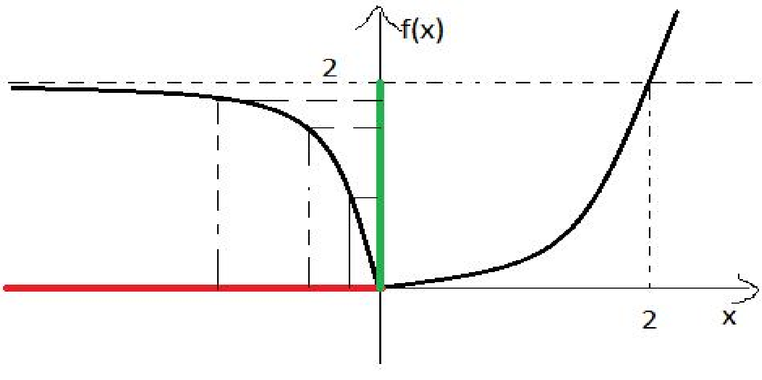
Se $p$ e $q$ non possono essere contemporaneamente vere i primi due casi non possono verificarsi, così come non può verificarsi l'ultimo caso perché è quello dove tutte e tre le proposizioni sono false, infine da $q$ falsa segue $r$ falsa esclude i casi tre e sette. Rimane da studiare verità o falsità della proposizione solo in tre casi:

$$\begin{array}{cccccc} p & q & r & \neg(q\ e\ \neg r) & (p\ o\ q) & \neg(q\ e\ \neg r) \Rightarrow (p\ o\ q) \\ V & F & F & V & V & V \\ F & V & V & V & V & V \\ F & V & F & F & V & V \end{array}.$$

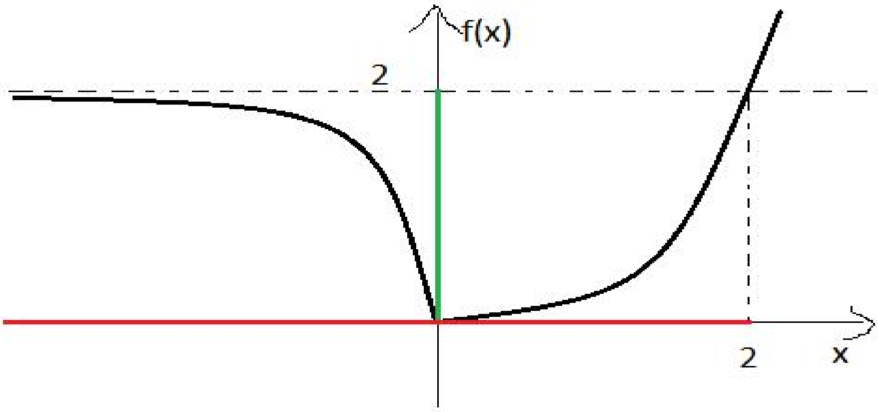
La proposizione è vera.

2) Nel primo caso (3 maschi e 2 femmine) vi sono $\binom{12}{3}$ modi distinti di scegliere i maschi e $\binom{8}{2}$ modi distinti di scegliere le femmine, in totale $\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{2} = 6.160$ squadre possibili. Nel secondo caso vi sono due possibilità (3 maschi e 2 femmine o 2 maschi e 3 femmine), la prima possibilità è stata già analizzata, per la seconda le squadre possibili sono $\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{3} = 3.696$; in totale $9.856$ squadre distinte.

3)




Dal grafico sopra riportato è facile notare che l'insieme $]-\infty, 0]$ (in rosso sulle ascisse) ha immagini che cadono nella parte in verde delle ordinate $f(]-\infty,0]) = [0,2[$. Consideriamo ora il grafico della pagina successiva, l'insieme $[0,2]$ (in verde sulle ordinate) ha elementi che sono immagini dell'insieme $]-\infty, 0]$ ma anche dell'insieme $]0,2]$, ne segue $f^{-1}([0,2]) = ]-\infty, 2]$ (in rosso sulle ascisse).




4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen\,x} - \sqrt{1 - sen\,x}}{2x} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen\,x} - \sqrt{1 - sen\,x}}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1 + sen\,x} + \sqrt{1 - sen\,x}}{\sqrt{1 + sen\,x} + \sqrt{1 - sen\,x}} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + sen\,x) - (1 - sen\,x)}{2x \cdot \left(\sqrt{1 + sen\,x} + \sqrt{1 - sen\,x}\right)} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2} sen\,x}{\cancel{2}x \cdot \left(\sqrt{1 + sen\,x} + \sqrt{1 - sen\,x}\right)} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen\,x}{x}}{\sqrt{1 + sen\,x} + \sqrt{1 - sen\,x}} = \frac{1}{2}.$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + e^{e^x}}{e^{x + e^x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^{e^x}}\left(e^{-e^x} + 1\right)}{e^x \cdot \cancel{e^{e^x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-e^x} + 1}{e^x} = \frac{e^{(\to -\infty)} + 1}{e^{(\to +\infty)}} =$
$\frac{1}{(\to +\infty)} = 0.$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Segno: $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ perché la funzione è un'esponenziale.

Intersezioni: $\begin{cases} y = e^{1-e^x} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = e^{1-e^0} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = e^0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$, intersezione con l'asse delle ordinate nel punto $A(0, 1)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} e^{1-e^x} = e^{1-e^{(\to -\infty)}} = e^{1-0} = e$, $A.O.sx$ di equazione $y = e$;

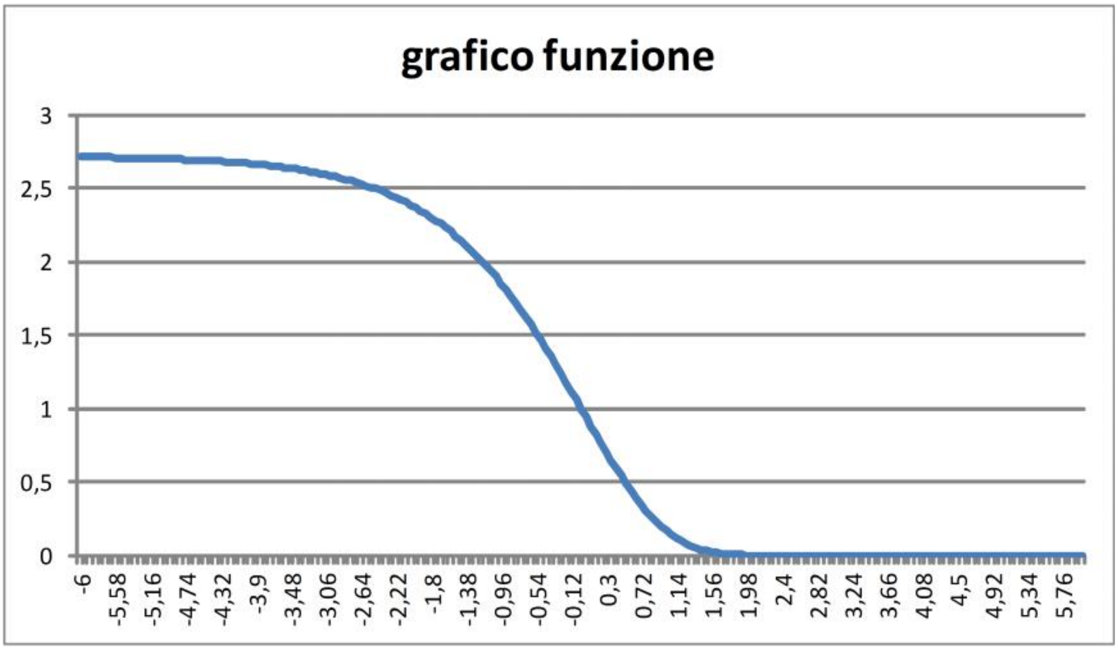
$\lim_{x \to +\infty} e^{1-e^x} = e^{1-e^{(\to +\infty)}} = e^{(\to -\infty)} = 0$, $A.O.dx$ di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{1-e^x} \cdot (-e^x) = -e^{1+x-e^x}$. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Funzione strettamente decrescente nel suo $C.E.$.

Concavità e convessità: $y'' = -e^{1+x-e^x} \cdot (1 - e^x)$. $y'' > 0$ se $1 - e^x < 0$ ovvero $e^x > 1$, vera se $x > 0$. Funzione strettamente convessa in $[0, +\infty[$, strettamente concava in $]-\infty, 0]$, la funzione presenta flesso di coordinate $(0, 1)$.

Grafico:




6) $\displaystyle\int_0^a x\,dx = \int_0^a x^2\,dx \Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{3}$ ; dato che $a$ è positivo dividiamo entrambe le parti per $a^2$ ed otteniamo: $\dfrac{1}{2} = \dfrac{a}{3}$ da cui $a = \dfrac{3}{2}$.

7) Posto $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ riscriviamo la relazione come:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ ovvero

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ da cui

$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ 2x_3 & 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 & 3x_2 \\ 2x_3 + 2x_4 & 3x_4 \end{bmatrix}$. Per la condizione $2x_3 = 2x_3 + 2x_4$ risulta $x_4 = 0$ e di conseguenza da $x_2 + 2x_4 = 3x_2$ si ha $x_2 = 0$; infine da $x_1 + 2x_3 = 2x_1 + 2x_2$ si ottiene $x_1 = 2x_3$. La matrice cercata è quindi una qualsiasi matrice del tipo $\begin{bmatrix} 2x_3 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}$ con $x_3 \neq 0$.

8) $f'_x = yz^3 - cos(xz^2) \cdot z^2$; $\quad f'_y = xz^3$; $\quad f'_z = 3xyz^2 - cos(xz^2) \cdot 2xz$.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)

22 settembre 2015

Compito Unico

1) *I METODO* (con il ragionamento): se $A \cap \mathcal{C}(B) = \emptyset$, $A \subseteq B$ in quanto non vi sono elementi di $A$ che non appartengono a $B$; inoltre $(A \cap C) \subseteq A$ e quindi banalmente $(A \cap C) \subseteq B$.

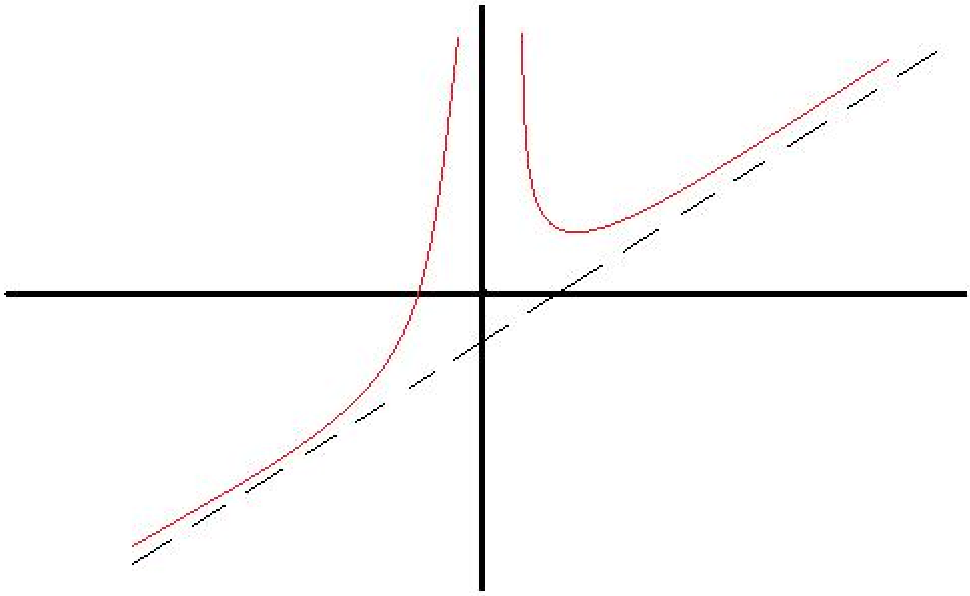
*II METODO* (con la tavola di appartenenza):

| $A$ | $B$ | $C$ | $\mathcal{C}(B)$ | $A \cap \mathcal{C}(B)$ | $A \cup B$ | $\mathcal{C}(A \cup B)$ | $C \cap \mathcal{C}(A \cup B)$ | $A \cap C$ | $(A \cap C) \subseteq B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $V$ |
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ | | | | | |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | | | | | |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | | |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ |

Per la condizione $A \cap \mathcal{C}(B) = \emptyset$ escludiamo le righe tre e quattro, per la condizione $C \cap \mathcal{C}(A \cup B) = \emptyset$ escludiamo la riga sette; nelle cinque righe significative che restano è facile notare che la condizione $(A \cap C) \subseteq B$ è sempre verificata.

2) La parola *MARITO* è formata da sei lettere distinte, i suoi possibili anagrammi sono $6! = 720$; la parola *MATEMATICA* è invece formata da 10 lettere delle quali la *A* si presente tre volte e la *M* e la *T* due volte, i suoi possibili anagrammi sono $\dfrac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151.200\,.$

3) Un possibile grafico è riportato di seguito:



4) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{e^x - 1} - 1}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x + sen\, x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} + \frac{sen\, x}{x} = log\, 2 + 1 = log(2e).$$

5) $C.E.$: $x \neq 0$.

Segno: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché la funzione è un'esponenziale.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{e^x}{x}} = e^{\frac{e^{(\to -\infty)}}{(\to -\infty)}} = e^{\frac{(\to 0)}{(\to -\infty)}} = e^{(\to 0)} = 1$, $A.O.sx$ di equazione $y = 1$;

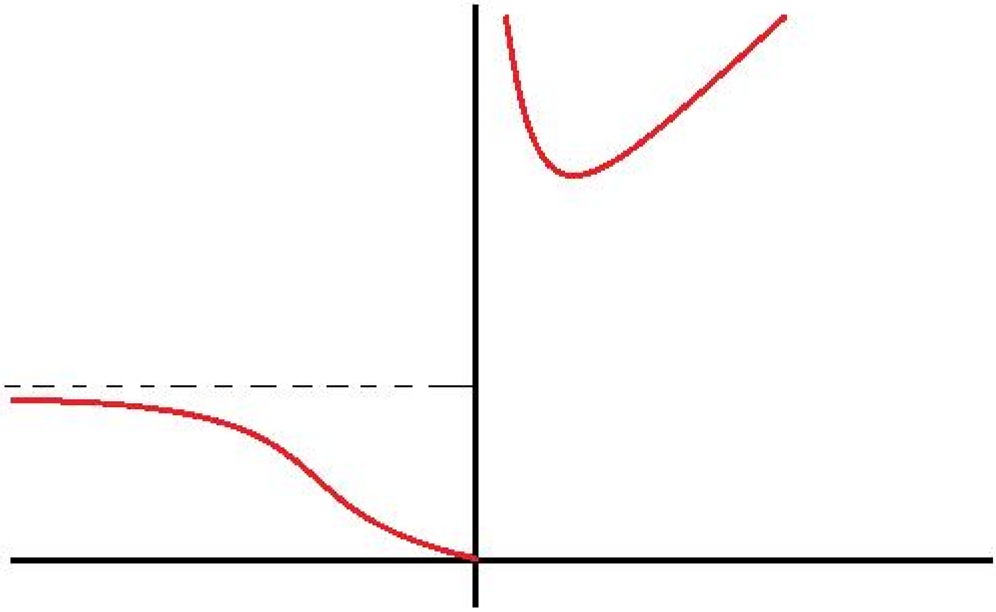
$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{e^x}{x}} = e^{\frac{e^{(\to 0)}}{(\to 0^-)}} = e^{(\to -\infty)} = 0$;

$\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{e^x}{x}} = e^{\frac{e^{(\to 0)}}{(\to 0^+)}} = e^{(\to +\infty)} = +\infty$, $A.V.$ di equazione $x = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{e^x}{x}} = e^{\frac{e^{(\to +\infty)}}{(\to +\infty)}} = e^{(\to +\infty)} = +\infty$, in quanto per $x \to +\infty$ $x = o(e^x)$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{e^x}{x}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{e^x}{x} - \log x} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{e^x - x\log x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{e^x}{x}} = +\infty$, in quanto per $x \to +\infty$ $x\log x = o(e^x)$; la funzione non presenta asintoti obliqui.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{\frac{e^x}{x}} \cdot \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^{\frac{e^x}{x}+x}}{x^2}(x-1)$. $y' > 0$ se $x - 1 > 0$ ovvero $x > 1$. Funzione strettamente crescente in $[1, +\infty[$, strettamente decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 1]$. Minimo relativo pari a $y(1) = e^e$ per $x = 1$.
Grafico:



6) $\int_1^e \left(3x + sen\,x + \frac{1}{2x}\right) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - cos\,x + \frac{1}{2}\log|x|\right]_1^e =$
$\left(\frac{3}{2}e^2 - cos\,e + \frac{1}{2}\log e\right) - \left(\frac{3}{2} - cos\,1 + \frac{1}{2}\log 1\right) =$
$\frac{3}{2}e^2 - \frac{3}{2} - cos\,e + cos\,1 + \frac{1}{2}$.

7) Le due funzioni hanno derivate pari a $y' = 3e^{3x}$ e $y' = 4e^{2x}$; affinché le rette tangenti alle due curve siano parallele deve risultare $3e^{3x} = 4e^{2x}$ da cui segue $e^x = \frac{4}{3}$; $x_0 = \log\frac{4}{3}$. Per quanto riguarda l'equazioni delle rette tangenti, per la prima funzione risulta: $y\left(\log\frac{4}{3}\right) = e^{3\cdot\log\frac{4}{3}} - 3 = \frac{64}{27} - 3 = -\frac{17}{27}$ e $y'\left(\log\frac{4}{3}\right) = 3e^{3\cdot\log\frac{4}{3}} = \frac{64}{9}$; retta tangente: $y = \frac{64}{9}\left(x - \log\frac{4}{3}\right) - \frac{17}{27}$. Nella seconda funzione $y\left(\log\frac{4}{3}\right) = 2e^{2\cdot\log\frac{4}{3}} = \frac{32}{9}$; retta tangente: $y = \frac{64}{9}\left(x - \log\frac{4}{3}\right) + \frac{32}{9}$.

8) $\nabla f = (6x^2 - 6, -2y)$.

$FOC$: $\begin{cases} 6x^2 - 6 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$ , punti critici $A(1,0)$ e $B(-1,0)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 12x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -24x$.

$SOC$: $|\mathcal{H}f(A)| = -24 < 0$ . $A$ punto di sella.

$|\mathcal{H}f(B)| = 24 > 0$, $f''_{yy}(B) = -2 < 0$. $B$ punto di massimo.

# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)

10 ottobre 2015

Compito Unico

1) *PRIMO METODO (con il ragionamento)*: se $\mathcal{C}(A \cup C) \subseteq \mathcal{C}(B)$ allora $B \subseteq (A \cup C)$, dalla condizione $(A \cap B) \subseteq C$ deriva che non possono esistere elementi appartenenti ad $A$ e $B$ ma non a $C$ e quindi $B \subseteq C$.

*SECONDO METODO (con la tavola di appartenenza)*:

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \cap B$ | $(A \cap B) \subseteq C$ | $A \cup C$ | $\mathcal{C}(A \cup C)$ | $\mathcal{C}(B)$ | $\mathcal{C}(A \cup C) \subseteq \mathcal{C}(B)$ | $B \subseteq C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ | $V$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $V$ |
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $F$ | | | | | |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $V$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $V$ | $V$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $V$ | $V$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $V$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $V$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $F$ | |
| $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $V$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $V$ | $V$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $V$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $V$ | $V$ |

La condizione $(A \cap B) \subseteq C$ esclude il verificarsi del secondo caso mentre la condizione $\mathcal{C}(A \cup C) \subseteq \mathcal{C}(B)$ esclude il verificarsi del sesto caso, nei rimanenti sei è sempre verificata la condizione $B \subseteq C$ pertanto concludiamo con certezza $B \subseteq C$.

2) Ricordiamo che $\mathbb{C}_{n,k} = \mathbb{C}_{n,n-k}$ e pertanto $\mathbb{C}_{n,4} = \mathbb{C}_{n,7}$ se e solo se $n - 4 = 7$ ovvero $n = 11$.

3) $f(g(x)) = f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ ; $g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ . Per l'espressione dell'inversa di $f(g(x))$ poniamo $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ da cui $y^2 = \dfrac{1-x}{1+x}$ e quindi $y^2(1+x) = 1-x$ con $x = \dfrac{1-y^2}{1+y^2}$ ; l'espressione dell'inversa di $f(g(x))$ è $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ . Nel caso di $g(f(x))$ abbiamo $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow$

$y\left(1+\sqrt{x}\right) = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1-y}{1+y}$ da cui $x = \left(\dfrac{1-y}{1+y}\right)^2$ ; espressione dell'inversa $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$ .

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{sen(sen\,x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{sen(sen\,x)}{sen\,x} \cdot \frac{sen\,x}{x}} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1.$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{e^x - x}}{x} = \frac{e^{e^{(\to -\infty)} - (\to -\infty)}}{(\to\ -\infty)} = \frac{e^{(\to 0) - (\to -\infty)}}{(\to\ -\infty)} = \frac{(\to\ +\infty)}{(\to\ -\infty)} = -\infty$$

perché con $x \to -\infty, x = o(e^x)$.

Entrambi i limiti possono essere risolti anche tramite il Teorema di de L'Hôpital, per il primo si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{sen(sen\,x)} = \frac{0}{0}\ FI,\ \overset{\mathcal{H}}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{1}{cos(sen\,x) \cdot cos\,x} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1.$$

Sul secondo abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{e^x - x}}{x} = \frac{+\infty}{-\infty}\ FI,\ \overset{\mathcal{H}}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{e^x - x}(e^x - 1)}{1} =$$

$$\frac{e^{(\to +\infty)}((\to 0)-1)}{1} = -\infty.$$

5) $C.E.$: $x>0$, $C.E. = \mathbb{R}_{++}$. (Nota che per $x>0$ si ha $e^{x+logx} = e^x \cdot e^{logx} = e^x \cdot x$)

Segno: $y>0, \forall x \in C.E.$ perché la funzione è un'esponenziale.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0} e^{x+logx} = e^{(\to 0)+(\to -\infty)} = e^{(\to -\infty)} = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} e^{x+logx} = e^{(\to +\infty)+(\to +\infty)} = e^{(\to +\infty)} = +\infty$.

Eventuale asintoto obliquo:

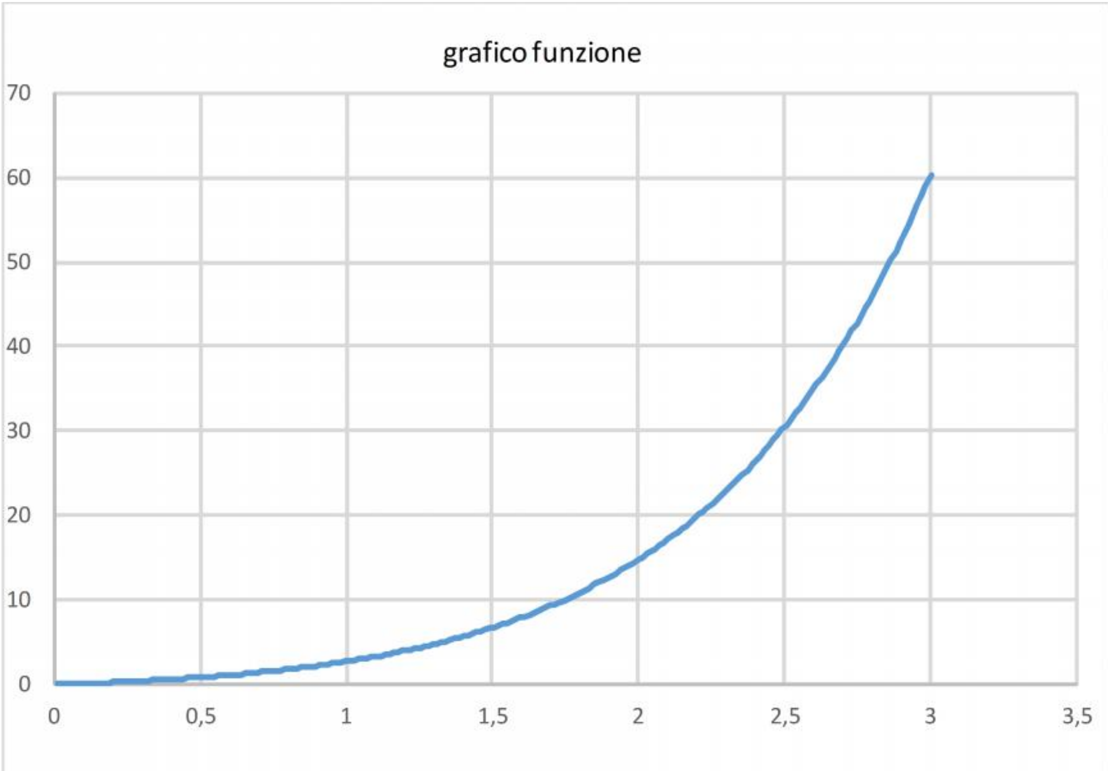
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x+logx}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \cdot e^{logx}}{x} = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty.$$

La funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x+logx} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)$. $y'>0, \forall x \in \mathbb{R}_{++}$. Funzione strettamente crescente nel suo $C.E.$.

Concavità e convessità: $y'' = e^{x+logx} \cdot \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + e^{x+logx} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{x+logx} \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)$. $y''>0, \forall x \in \mathbb{R}_{++}$. Funzione strettamente convessa in $]0, +\infty[$.

Grafico:




6) Integriamo entrambi i membri; da $\int_0^a (2x+1)\,dx = \int_a^3 (2x+1)\,dx$ si ha $\left[x^2+x\right]_0^a = \left[x^2+x\right]_a^3$ da cui si ottiene: $a^2+a = 12 - (a^2+a)$, equazione che può essere riscritta come $a^2+a-6=0$ ovvero $(a+3)(a-2)=0$. Dato che $a$ deve essere compreso fra 0 e 3, l'unica soluzione accettabile è $a=2$.

7) Se $X$ ha modulo unitario $x_1^2 + x_2^2 = 1$, inoltre

$$X^T A X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$$

$x_1(x_1 + x_2) + x_2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2$, pertanto $X$ deve soddisfare le condizioni $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \pm\sqrt{2}/2 \\ x_2 = \mp\sqrt{2}/2 \end{cases}$. I vettori a modulo unitario che soddisfano la condizione $X^T A X = 0$ sono quindi $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

8) $f'_x = \dfrac{1 \cdot xyz - (x - z) \cdot yz}{(xyz)^2} = \dfrac{1}{x^2 y}$ ; $\qquad f'_y = -\dfrac{(x - z) \cdot xz}{(xyz)^2} = \dfrac{z - x}{xy^2 z}$ ;

$$f'_z = \frac{-1 \cdot xyz - (x - z) \cdot xy}{(xyz)^2} = -\frac{1}{yz^2}\,.$$