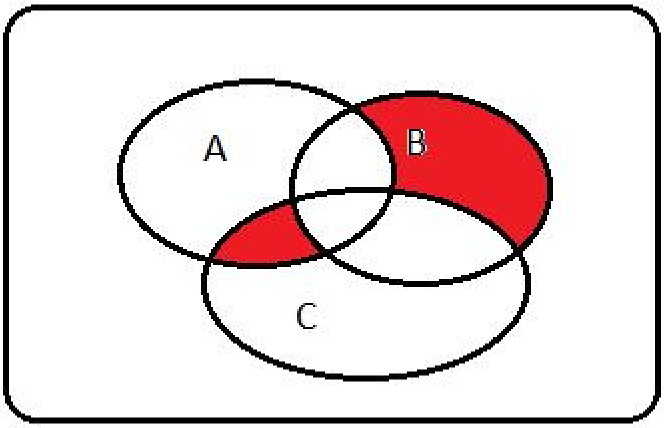
Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 15-16)

11 novembre 2015

Compito $\mathbb{A}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è
$\left(A \cap C \cap \mathcal{C}(B)\right) \cup \left(B \cap \mathcal{C}(A \cup C)\right)$.



2) $$\frac{(n-5)!-(n-6)!}{(n-6)!-(n-7)!} = \frac{(n-6)!\big((n-5)-1\big)}{(n-7)!\big((n-6)-1\big)} = \frac{(n-6)(n-\cancel{7})!(n-6)}{(n-\cancel{7})!(n-7)} =$$

$\frac{(n-6)^2}{(n-7)}$. Posto $\frac{(n-6)^2}{(n-7)} = 4$ si ha $\frac{(n-6)^2}{(n-7)} - 4 = 0$ che può essere riscritta come $\frac{(n-8)^2}{(n-7)} = 0$ da cui $n = 8$.

3) $$f(g(x)) = \begin{cases} f(5) & \text{per } x \leq -1 \\ f(0) & \text{per } -1 < x < 1 \\ f(-5) & \text{per } 1 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{per } x \leq -1 \\ 0 & \text{per } -1 < x < 1; \\ -3 & \text{per } 1 \leq x \end{cases}$$

$$f(f(x)) = \begin{cases} f(-3) & \text{per } x \leq -2 \\ f(0) & \text{per } -2 < x < 2 \\ f(3) & \text{per } 2 \leq x \end{cases} = \begin{cases} -3 & \text{per } x \leq -2 \\ 0 & \text{per } -2 < x < 2 = f(x). \\ 3 & \text{per } 2 \leq x \end{cases}$$

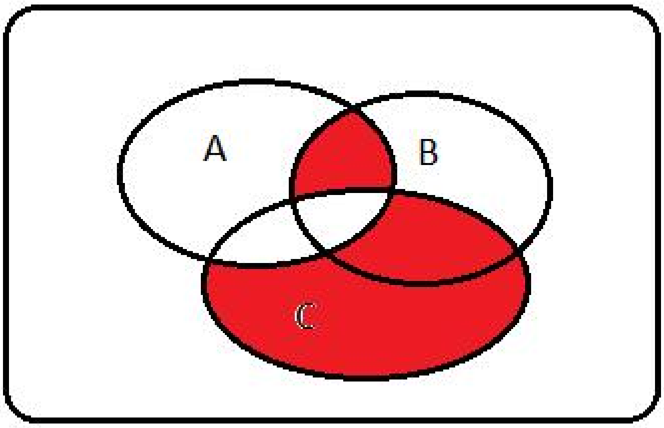
4) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen(1-\cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(1-\cos x)}{1-\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1+x+2x^2}{x-2x^2+x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+2\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x}-2+x\right)} = \frac{0+0+2}{0-2+(\to -\infty)} = 0.$$

5) $\lim_{x \to 3} (5x-11) = 4$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha
$|(5x-11)-4| = |5x-15| = 5|x-3|$, posto $5|x-3| < \epsilon$ risulta $|x-3| < \epsilon/5$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{5}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{B}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è
$\big(A \cap B \cap \mathcal{C}(C)\big) \cup \big(C \cap \mathcal{C}(A)\big)$.



2) $\dfrac{(n-7)!-(n-8)!}{(n-8)!-(n-9)!} = \dfrac{(n-8)!\big((n-7)-1\big)}{(n-9)!\big((n-8)-1\big)} = \dfrac{(n-8)(n\cancel{-9})!(n-8)}{(n\cancel{-9})!(n-9)} =$
$\dfrac{(n-8)^2}{(n-9)}$. Posto $\dfrac{(n-8)^2}{(n-9)} = 4$ si ha $\dfrac{(n-8)^2}{(n-9)} - 4 = 0$ che può essere riscritta come $\dfrac{(n-10)^2}{(n-9)} = 0$ da cui $n = 10$.

3) $g(f(x)) = \begin{cases} g(-3) & \text{per } x \leq -2 \\ g(0) & \text{per } -2 < x < 2 \\ g(3) & \text{per } 2 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 5 & \text{per } x \leq -2 \\ 0 & \text{per } -2 < x < 2; \\ -5 & \text{per } 2 \leq x \end{cases}$

$g(g(x)) = \begin{cases} g(5) & \text{per } x \leq -1 \\ g(0) & \text{per } -1 < x < 1 \\ g(-5) & \text{per } 1 \leq x \end{cases} = \begin{cases} -5 & \text{per } x \leq -1 \\ 0 & \text{per } -1 < x < 1 \\ 5 & \text{per } 1 \leq x \end{cases} = -g(x).$

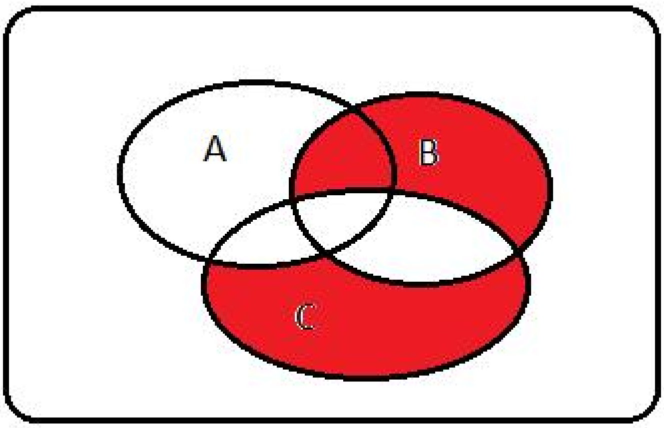
4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-cos(senx)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-cos(senx)}{sen^2x} \cdot \dfrac{sen^2x}{x^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1-x+2x^4}{3-2x^2+x^4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\cancel{x^4}\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} + 2\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 1\right)} = \dfrac{0-0+2}{0-0+1} = 2.$

5) $\lim\limits_{x \to -3} (5x+11) = -4$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $|(5x+11)+4| = |5x+15| = 5|x+3|$, posto $5|x+3| < \epsilon$ risulta $|x+3| < \epsilon/5$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{5}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{C}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è
$\big(B \cap \mathcal{C}(C)\big) \cup \big(C \cap \mathcal{C}(A \cup B)\big)$.



2) $\dfrac{(n-3)!-(n-4)!}{(n-4)!-(n-5)!} = \dfrac{(n-4)!\big((n-3)-1\big)}{(n-5)!\big((n-4)-1\big)} = \dfrac{(n-4)\cancel{(n-5)!}(n-4)}{\cancel{(n-5)!}(n-5)} =$

$\dfrac{(n-4)^2}{(n-5)}$. Posto $\dfrac{(n-4)^2}{(n-5)} = 4$ si ha $\dfrac{(n-4)^2}{(n-5)} - 4 = 0$ che può essere riscritta come $\dfrac{(n-6)^2}{(n-5)} = 0$ da cui $n = 6$.

3) $f(g(x)) = \begin{cases} f(4) & \text{per } x \leq -1 \\ f(0) & \text{per } -1 < x < 1 \\ f(-6) & \text{per } 1 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 3 & \text{per } x \leq -1 \\ 0 & \text{per } -1 < x < 1; \\ -1 & \text{per } 1 \leq x \end{cases}$

$g(g(x)) = \begin{cases} g(4) & \text{per } x \leq -1 \\ g(0) & \text{per } -1 < x < 1 \\ g(-6) & \text{per } 1 \leq x \end{cases} = \begin{cases} -6 & \text{per } x \leq -1 \\ 0 & \text{per } -1 < x < 1. \\ 4 & \text{per } 1 \leq x \end{cases}$

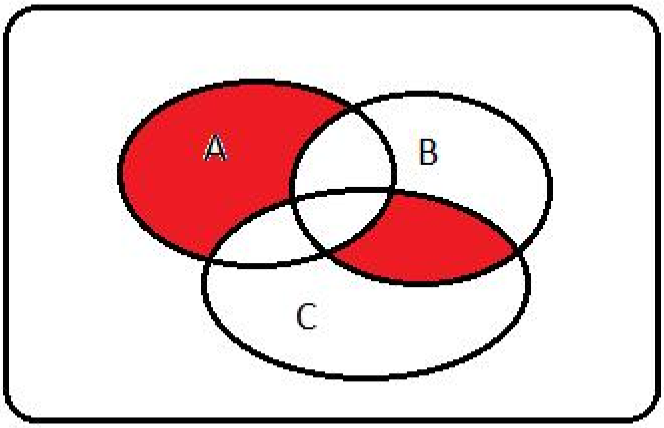
4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(log(1+x))}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(log(1+x))}{log(1+x)} \cdot \dfrac{log(1+x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5 + x^3 - 2}{x^3 - 2x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cancel{x^3}\big(3x^2 + 1 - \frac{2}{x^3}\big)}{\cancel{x^3}\big(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}\big)} = \dfrac{(\to +\infty) + 1 - 0}{1 - 0 + 0} = +\infty$.

5) $\lim\limits_{x \to 1}(3x-13) = -10$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $|(3x-13)+10| = |3x-3| = 3|x-1|$, posto $3|x-1| < \epsilon$ risulta $|x-1| < \epsilon/3$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{3}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{D}$

1) L'insieme evidenziato in rosso nella figura che segue è
$\big(A \cap \mathcal{C}(B \cup C)\big) \cup \big(B \cap C \cap \mathcal{C}(A)\big)$.



2) $\dfrac{(n-1)!-(n-2)!}{(n-2)!-(n-3)!} = \dfrac{(n-2)!\big((n-1)-1\big)}{(n-3)!\big((n-2)-1\big)} = \dfrac{(n-2)\cancel{(n-3)!}(n-2)}{\cancel{(n-3)!}(n-3)} =$
$\dfrac{(n-2)^2}{(n-3)}$. Posto $\dfrac{(n-2)^2}{(n-3)} = 4$ si ha $\dfrac{(n-2)^2}{(n-3)} - 4 = 0$ che può essere riscritta come $\dfrac{(n-4)^2}{(n-3)} = 0$ da cui $n = 4$.

3) $g(f(x)) = \begin{cases} g(-1) & \text{per } x \le -4 \\ g(0) & \text{per } -4 < x < 4 \\ g(3) & \text{per } 4 \le x \end{cases} = \begin{cases} 4 & \text{per } x \le -4 \\ 0 & \text{per } -4 < x < 4; \\ -6 & \text{per } 4 \le x \end{cases}$

$f(f(x)) = \begin{cases} f(-1) & \text{per } x \le -4 \\ f(0) & \text{per } -4 < x < 4 \\ f(3) & \text{per } 4 \le x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le -4 \\ 0 & \text{per } -4 < x < 4 = 0. \\ 0 & \text{per } 4 \le x \end{cases}$

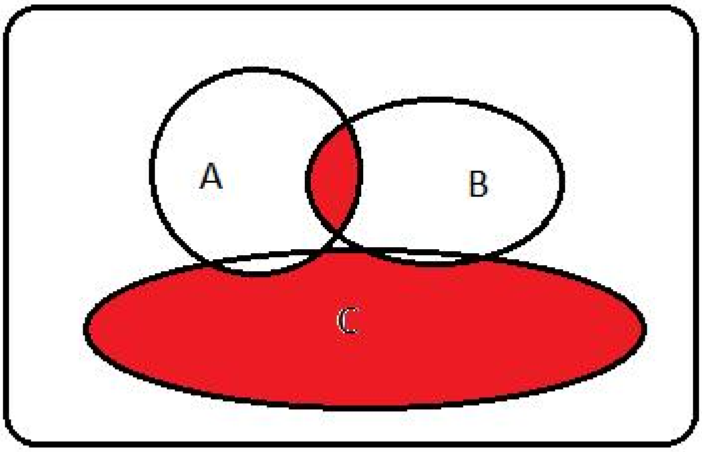
4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + sen\, x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + sen\, x)}{sen\, x} \cdot \dfrac{sen\, x}{x} = 1 \cdot 1 = 1\,;$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^4 + x^3 - 2}{5x^3 - 2x^2 + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x^3}\big(2x + 1 - \frac{2}{x^3}\big)}{\cancel{x^3}\big(5 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^3}\big)} = \dfrac{(\to -\infty) + 1 - 0}{5 - 0 + 0} =$
$-\infty.$

5) $\lim\limits_{x \to -1} (3x + 5) = 2$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $|(3x + 5) - 2| = |3x + 3| = 3|x + 1|$, posto $3|x + 1| < \epsilon$ risulta $|x + 1| < \epsilon/3$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{3}$, limite verificato.

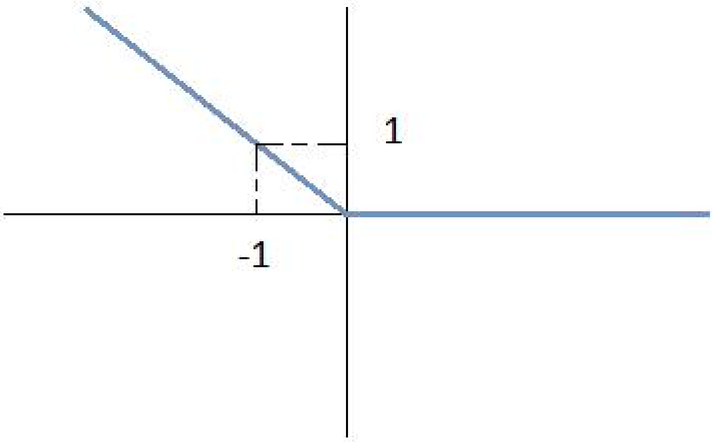
Compito $\mathbb{E}$

1) L'insieme $\big(A \cap B \cap \mathcal{C}(C)\big) \cup \big(\mathcal{C}(A \cup B) \cap C\big)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



2) $p(x) = \left(3+x^2\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 3^k \cdot \left(x^2\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 3^k \cdot x^{40-2k}$; i termini del polinomio di grado 2 e 32 si ottengono se $40-2k=2$ e $40-2k=32$ da cui $k=19$ e $k=4$ e quindi $c_2 = \binom{20}{19} \cdot 3^{19}$ e $c_{32} = \binom{20}{4} \cdot 3^4$.

3)



Il grafico della funzione è riportato sopra in blu, $f([-1,1]) = [0,1]$ e $f^{-1}([-1,1]) = [-1,+\infty[$.

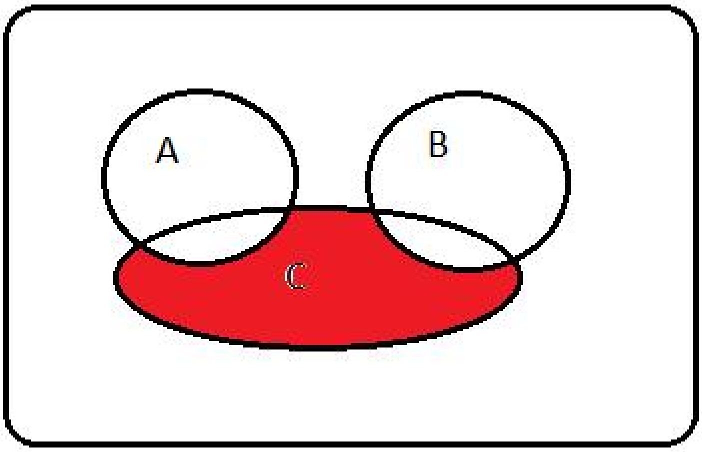
4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,3x}{sen^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos\,3x}{9x^2} \cdot \frac{x^2}{sen^2 x} \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 = \frac{9}{2}$;

$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x^2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^2$.

5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1+\frac{3}{x} = 1$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{x+3}{x} - 1\right| = \left|\frac{3}{x}\right|$, posto $\left|\frac{3}{x}\right| < \epsilon$ risulta $|x| > 3/\epsilon$ da cui $x < -3/\epsilon \vee x > 3/\epsilon$, $\delta_\epsilon = -\frac{3}{\epsilon}$, limite verificato.

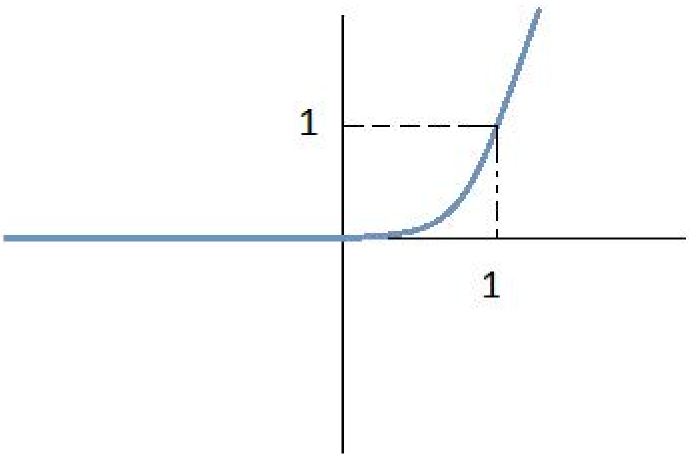
Compito $\mathbb{F}$

1) L'insieme $\left(A \cap B \cap \mathcal{C}(C)\right) \cup \left(\mathcal{C}(A \cup B) \cap C\right)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



2) $p(x) = \left(2 + x^3\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 2^k \cdot \left(x^3\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 2^k \cdot x^{60-3k}$; i termini del polinomio di grado 3 e 33 si ottengono se $60 - 3k = 3$ e $60 - 3k = 33$ da cui $k = 19$ e $k = 9$ e quindi $c_3 = \binom{20}{19} \cdot 2^{19}$ e $c_{33} = \binom{20}{9} \cdot 2^9$.

3)



Il grafico della funzione è riportato sopra in blu, $f([-1,1]) = [0,1]$ e $f^{-1}([-1,1]) =]-\infty, 1]$.

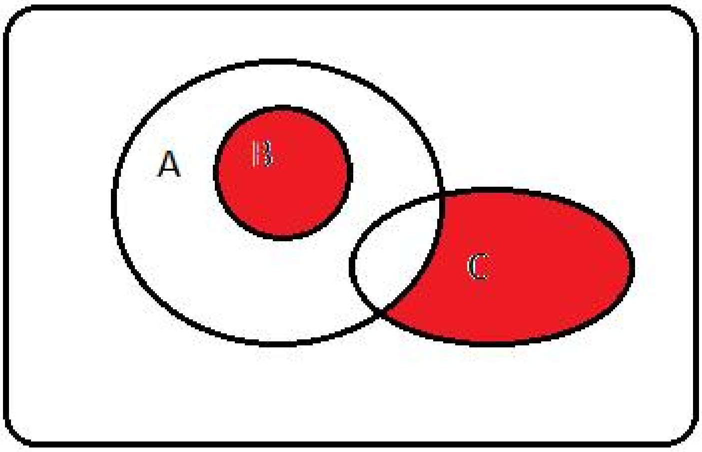
4) $\lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x^2)}{sen^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1+2x^2)}{2x^2} \cdot \frac{x^2}{sen^2 x} \cdot 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$;

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{x^2}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = e^{-3}$.

5) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{2x-1}{x} - 2\right| = \left|-\frac{1}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$, posto $\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$ risulta $|x| > 1/\epsilon$ da cui $x < -1/\epsilon \vee x > 1/\epsilon$, $\delta_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

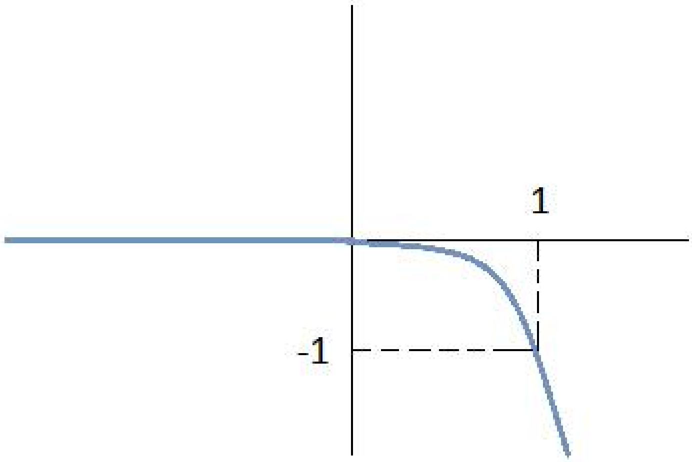
Compito $\mathbb{G}$

1) L'insieme $\left(A \cap B \cap \mathcal{C}(C)\right) \cup \left(\mathcal{C}(A \cup B) \cap C\right)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



2) $p(x) = \left(1 + 2x^2\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 1^k \cdot \left(2x^2\right)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} \cdot 2^{20-k} \cdot x^{40-2k}$; i termini del polinomio di grado 2 e 12 si ottengono se $40 - 2k = 2$ e $40 - 2k = 12$ da cui $k = 19$ e $k = 14$ e quindi $c_2 = \binom{20}{19} \cdot 2$ e $c_{12} = \binom{20}{14} \cdot 2^6$.

3)



Il grafico della funzione è riportato sopra in blu, $f([-1,1]) = [-1,0]$ e $f^{-1}([-1,1]) =]-\infty, 1]$.

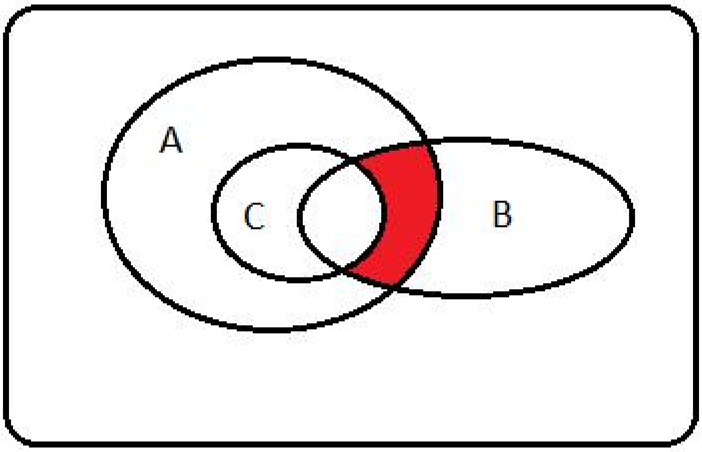
4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos(sen\, x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - cos(sen\, x)}{sen^2 x} \cdot \frac{sen^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^3 + x}{x^3}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e.$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5x+1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{5x+1}{x} - 5\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$, posto $\left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$ risulta $|x| > 1/\epsilon$ da cui $x < -1/\epsilon \vee x > 1/\epsilon$, $\delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

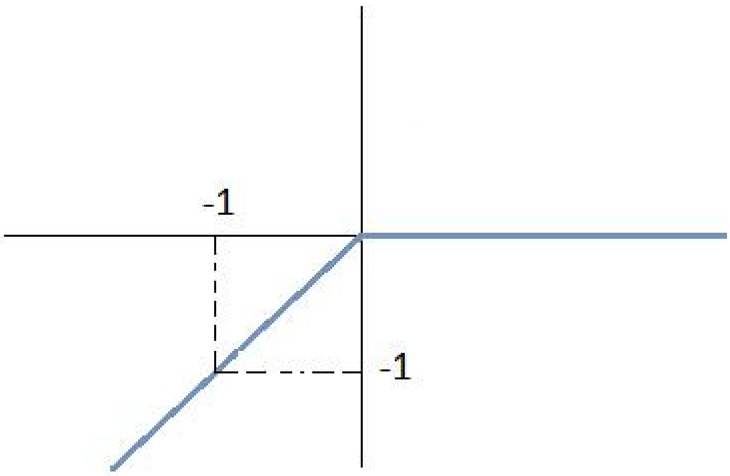
Compito $\mathbb{H}$

1) L'insieme $\big(A \cap B \cap \mathcal{C}(C)\big) \cup \big(\mathcal{C}(A \cup B) \cap C\big)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



2) $p(x) = \left(1+4x^2\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 1^k \cdot \left(4x^2\right)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \cdot 4^{10-k} \cdot x^{20-2k}$; i termini del polinomio di grado 4 e 14 si ottengono se $20-2k=4$ e $20-2k=14$ da cui $k=8$ e $k=3$ e quindi $c_4 = \binom{10}{8} \cdot 4^2$ e $c_{14} = \binom{10}{3} \cdot 4^7$.

3)



Il grafico della funzione è riportato sopra in blu, $f([-1,1]) = [-1,0]$ e $f^{-1}([-1,1]) = [-1,+\infty[$.

4) $\lim_{x\to 0} \frac{tg^2(sen\,x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{tg^2(sen\,x)}{sen^2 x} \cdot \frac{sen^2 x}{x^2} = 1 \cdot 1 = 1;$

$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+5x}{x^3}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{5}{x^2}\right)^{x^2} = e^5.$

5) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{x-3}{x} - 1\right| = \left|-\frac{3}{x}\right| = \left|\frac{3}{x}\right|$, posto $\left|\frac{3}{x}\right| < \epsilon$ risulta $|x| > 3/\epsilon$ da cui $x < -3/\epsilon \vee x > 3/\epsilon$, $\delta_\epsilon = \frac{3}{\epsilon}$, limite verificato.

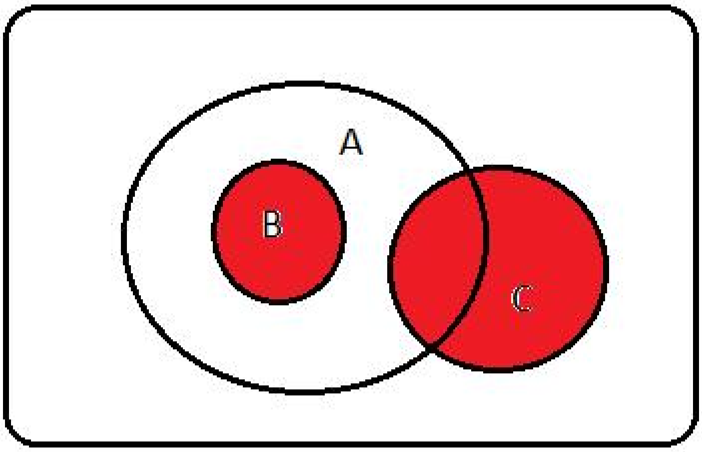
Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 15-16)

25 gennaio 2016

Compito $\mathbb{A}$

1) L'insieme $\big(A \cap (B \cup C)\big) \cup \big(C \cap \mathcal{C}(A \cap B)\big)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



2) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 62, le 26 lettere minuscole, le 26 lettere maiuscole e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 62^8; nel caso che il codice debba essere composto da tre lettere minuscole, tre lettere maiuscole e due cifre abbiamo: $\binom{8}{3}$ modi distinti di posizionare sul codice le tre minuscole, $\binom{5}{3}$ modi distinti di posizionare sul codice le tre maiuscole, 26^3 modi distinti di scelta per le minuscole, 26^3 modi distinti di scelta per le maiuscole e 10^2 modi distinti di scelta per le cifre, pertanto i possibili codici sono $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot 26^6 \cdot 10^2$.

3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(sen\, x)}{1 - cos(-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-cos(sen\, x)}{sen^2\, x}}{\frac{1-cos(-x)}{(-x)^2}} \cdot \frac{sen^2 x}{x^2} = \frac{1/2}{1/2} \cdot 1 = 1$;

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} 3^x = \lim_{x \to -\infty} 2^x = \lim_{x \to -\infty} 4^x = 0$; pertanto

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x + 2^x + x^2}{4^x + x^4 + x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

4) Una possibile funzione è $g(x) = e^x$. Infatti $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^2}{e^x} = 0$, mentre

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{1 - x^2} = 0$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$, $C.E. = [0, +\infty[$.

Segno: $y > 0, \forall x \in C.E.$, perché la funzione è un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0, 1)$.

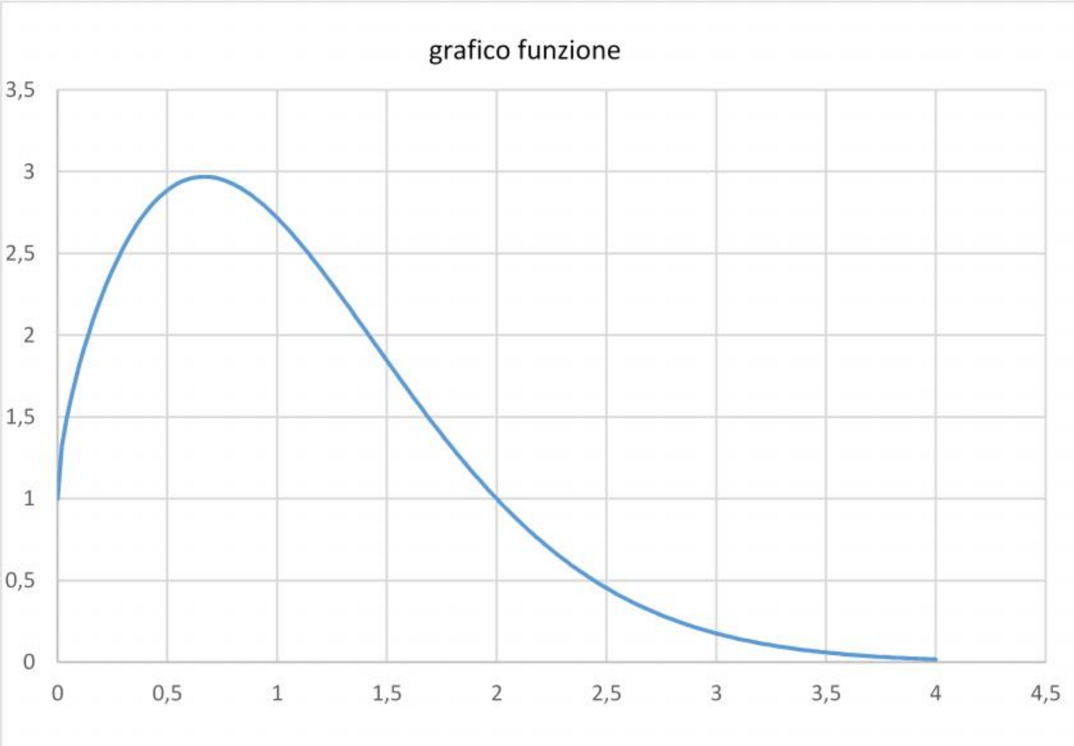
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} e^{-(x-2)\sqrt{x}} = e^{(\to -\infty)\cdot(\to +\infty)} = e^{\to -\infty} = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza:

$$y' = e^{-(x-2)\sqrt{x}} \cdot \left(-\sqrt{x} - \frac{x-2}{2\sqrt{x}} \right) = e^{-(x-2)\sqrt{x}} \cdot \frac{2 - 3x}{2\sqrt{x}}.$$

$y' > 0 \Rightarrow 2-3x>0 \Rightarrow 0<x<2/3$. Funzione strettamente crescente in $[0,2/3]$, strettamente decrescente in $[2/3,+\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $\left(\frac{2}{3}, e^{\frac{4}{9}}\sqrt{6}\right)$; nota che $\lim_{x\to 0^+} y' = +\infty$, $(0,1)$ è punto a tangente verticale.
Concavità e convessità: l'esistenza di un massimo assoluto positivo per $x=2/3$, associata all'esistenza dell'asintoto orizzontale dx con un unico punto di flesso porta a concludere che il flesso ha ascissa maggiore di $2/3$ e la funzione è concava a sinistra del flesso e convessa a destra.
Grafico:



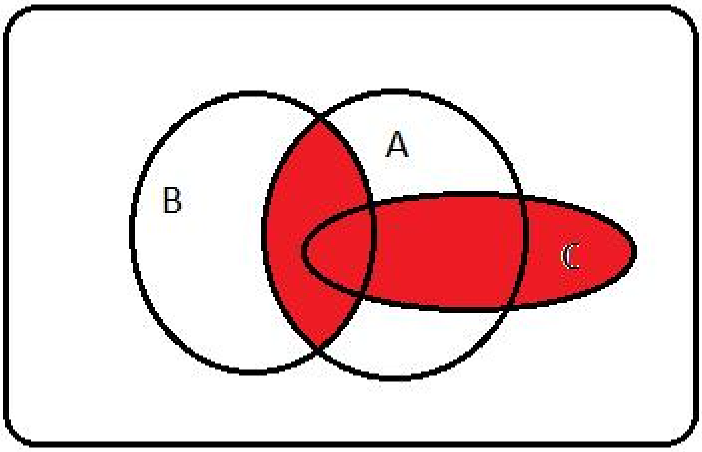
6) $\int_2^4 \left(x^2+\frac{1}{x}+\frac{2}{1-x}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}+\log|x|-2\log|1-x|\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3}+\log 4-2\log 3\right) - \left(\frac{8}{3}+\log 2-2\log 1\right) = \frac{56}{3}+\log\frac{2}{9}$.

7) La retta cercata appartiene al fascio proprio di rette per $P(1,-2)$ con coefficiente angolare pari alla derivata di y in x_0 (condizione di parallelismo con la retta tangente), pertanto la retta ha equazione: $y+2=y'(2)\cdot(x-1)$; con $y'=6x+e^{x-2}$ da cui $y'(2)=13$. Soluzione: $y+2=13(x-1)$ ovvero $y=13x-15$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z-z(P)=\nabla z(P)\cdot\begin{pmatrix}x-1\\ y-0\end{pmatrix}$.
$z(P)=-2$, $\nabla z=(2xsen\,y-3, x^2cos\,y-sen\,y)$, $\nabla z(P)=(-3,1)$. Equazione del piano tangente: $z+2=-3(x-1)+y$ oppure $3x-y+z=1$.

Compito $\mathbb{B}$

1) L'insieme $\big(A\cap(B\cup C)\big)\cup\big(C\cap\mathcal{C}(A\cap B)\big)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



2) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 62, le 26 lettere minuscole, le 26 lettere maiuscole e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 62^6; nel caso che il codice debba essere composto da due lettere minuscole, due lettere maiuscole e due cifre abbiamo: $\binom{6}{2}$ modi distinti di posizionare sul codice le due minuscole, $\binom{4}{2}$ modi distinti di posizionare sul codice le due maiuscole, 26^2 modi distinti di scelta per le minuscole, 26^2 modi distinti di scelta per le maiuscole e 10^2 modi distinti di scelta per le cifre, pertanto i possibili codici sono $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 26^4\cdot 10^2$.

3) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{tg(1-cos\,x)}{1-cos(tg\,x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{tg(1-cos\,x)}{1-cos\,x}}{\frac{1-cos(tg\,x)}{tg^2x}}\cdot\frac{\frac{1-cos\,x}{x^2}}{\frac{tg^2x}{x^2}}=\frac{1}{1/2}\cdot\frac{1/2}{1}=1\,;$

$\displaystyle \lim_{x\to+\infty}4^{-x}=\lim_{x\to+\infty}2^{-x}=\lim_{x\to+\infty}3^{-x}=0$; pertanto

$\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{4^{-x}+2^{-x}+x^2}{3^{-x}-x^4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x^4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2+1}=0.$

4) Una possibile funzione è $g(x)=e^{-x}$. Infatti $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{1-x^2}=0$, mentre $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{e^{-x}}=0$.

5) $C.E.$: $2-x\geq 0\Rightarrow x\leq 2$, $C.E.=\,]-\infty,2]$.
Segno: $y>0,\forall x\in C.E.$, perché la funzione è un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0,1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

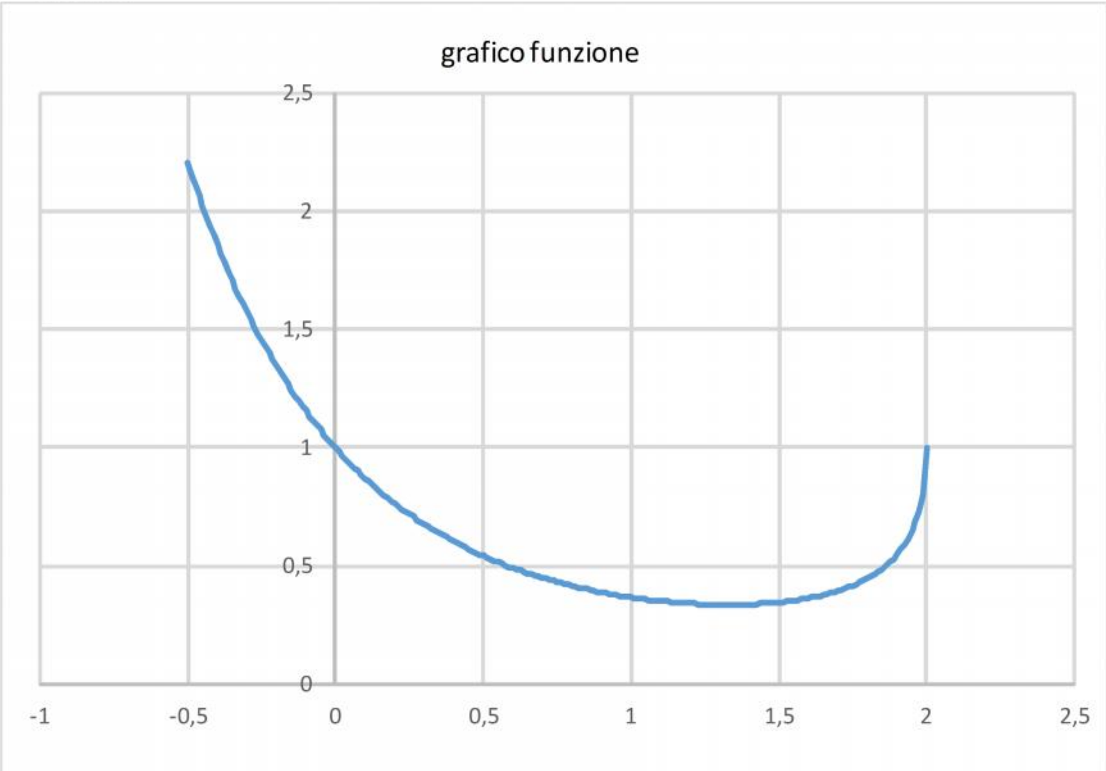
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{-x\sqrt{2-x}}=e^{(\to+\infty)\cdot(\to+\infty)}=e^{\to+\infty}=+\infty;$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x\sqrt{2-x}}}{x}=+\infty$; in quanto per $x\to-\infty$ x è o-piccolo di e^{-x} che a sua volta è o-piccolo di $e^{-x\sqrt{2-x}}$, la funzione non presenta asintoti; $y(2)=1$.

Crescenza e decrescenza:

$$y'=e^{-x\sqrt{2-x}}\cdot\left(-\sqrt{2-x}-x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}\right)=e^{-x\sqrt{2-x}}\cdot\frac{3x-4}{2\sqrt{2-x}}.$$

$y' > 0 \Rightarrow 3x - 4 > 0 \Rightarrow 4/3 < x < 2$. Funzione strettamente crescente in $[4/3, 2]$, strettamente decrescente in $]-\infty, 4/3]$, la funzione presenta minimo assoluto in $\left(\frac{4}{3}, e^{-\frac{4}{9}\sqrt{6}}\right)$; nota che $\lim_{x \to 2^-} y' = +\infty$, $(2, 1)$ è punto a tangente verticale.
Concavità e convessità: l'esistenza di un minimo assoluto positivo per $x = 4/3$, associata alla non esistenza di punti di flesso porta a concludere che la funzione è convessa in tutto il suo $C.E.$.
Grafico:



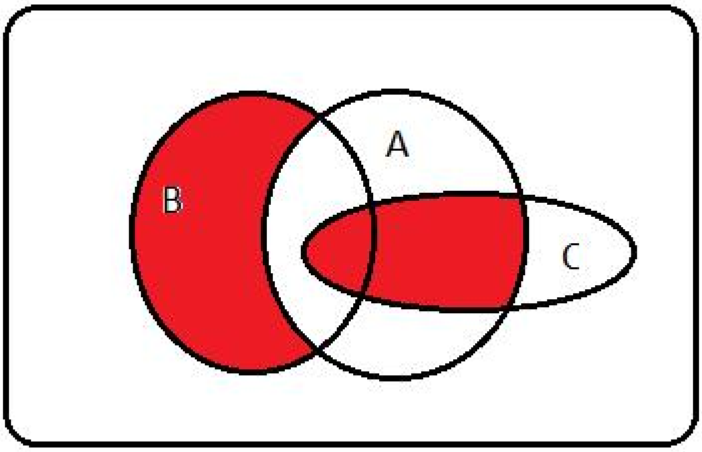
6) $\int_4^5 \left(x^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{3-x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2\log|x| + \log|3-x|\right]_4^5 =$
$\left(\frac{125}{3} + 2\log 5 + \log 2\right) - \left(\frac{64}{3} + 2\log 4 + \log 1\right) = \frac{61}{3} + \log\frac{25}{8}$.

7) La retta cercata appartiene al fascio proprio di rette per $P(0, -2)$ con coefficiente angolare pari alla derivata di y in x_0 (condizione di parallelismo con la retta tangente), pertanto la retta ha equazione: $y + 2 = y'(2) \cdot x$; con $y' = -8x - e^{2-x}$ da cui $y'(2) = -17$. Soluzione: $y + 2 = -17 \cdot x$ ovvero $y = -17x - 2$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x+2 \\ y-0 \end{pmatrix}$.
$z(P) = 2$, $\nabla z = (3x^2 sen\, y, x^3 cos\, y - 2\, sen\, y - 3\,)$, $\nabla z(P) = (0, -11)$.
Equazione del piano tangente: $z - 2 = 0 \cdot (x+2) - 11y$ oppure $11y + z = 2$.

Compito $\mathbb{C}$

1) L'insieme $\big(C \cap (A \cup B)\big) \cup \big(B \cap \mathcal{C}(A \cup C)\big)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



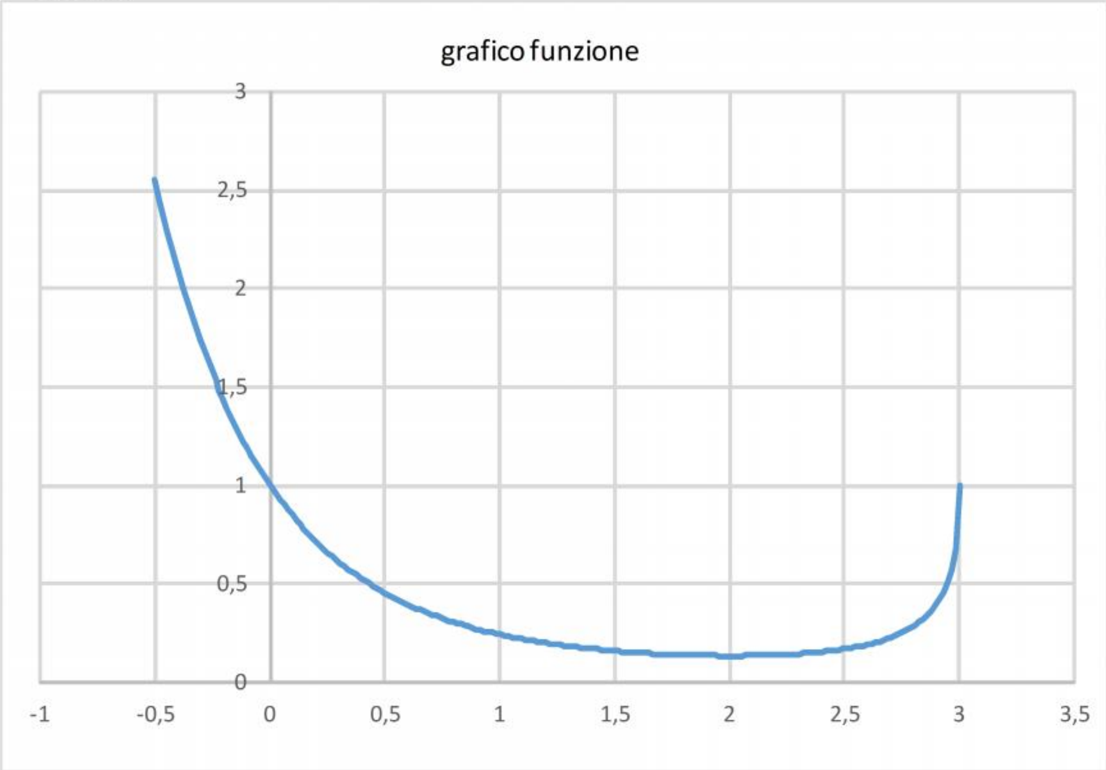
2) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 62, le 26 lettere minuscole, le 26 lettere maiuscole e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 62^{10}; nel caso che il codice debba essere composto da quattro lettere minuscole, quattro lettere maiuscole e due cifre abbiamo: $\binom{10}{4}$ modi distinti di posizionare sul codice le quattro minuscole, $\binom{6}{4}$ modi distinti di posizionare sul codice le quattro maiuscole, 26^4 modi distinti di scelta per le minuscole, 26^4 modi distinti di scelta per le maiuscole e 10^2 modi distinti di scelta per le cifre, pertanto i possibili codici sono $\binom{10}{4} \cdot \binom{6}{4} \cdot 26^8 \cdot 10^2$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{tg\,x - sen\,x} - 1}{x + x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{tg\,x - sen\,x} - 1}{tg\,x - sen\,x} \cdot \left(\dfrac{tg\,x}{x} - \dfrac{sen\,x}{x}\right) \cdot \dfrac{1}{1+x} =$
$1 \cdot (1-1) \cdot 1 = 0$;
Per $x \to -\infty$, 2^{-x} e x^2 sono o-piccoli di 4^{-x} così come x^4 e x^2 sono o-piccoli di 3^{-x}; pertanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4^{-x} + 2^{-x} + x^2}{3^{-x} - x^4 - x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4^{-x}}{3^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x =$
$+\infty$.

4) Una possibile funzione è $g(x) = e^{-x}$. Infatti $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^3 - 2} = 0$, mentre $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 2}{e^{-x}} = 0$.

5) $C.E.$: $3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$, $C.E. =]-\infty, 3]$.
Segno: $y > 0, \forall x \in C.E.$, perché la funzione è un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0, 1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x\sqrt{3-x}} = e^{(\to +\infty)\cdot(\to +\infty)} = e^{\to +\infty} = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x\sqrt{3-x}}}{x} = +\infty$; in quanto per $x \to -\infty$ x è o-piccolo di e^{-x} che a sua volta è o-piccolo di $e^{-x\sqrt{3-x}}$, la funzione non presenta asintoti; $y(3) = 1$.
Crescenza e decrescenza:
$$y' = e^{-x\sqrt{3-x}} \cdot \left(-\sqrt{3-x} - x \cdot \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}\right) = e^{-x\sqrt{3-x}} \cdot \frac{3(x-2)}{2\sqrt{3-x}}.$$

$y' > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow 2 < x < 3$. Funzione strettamente crescente in $[2, 3]$, strettamente decrescente in $]-\infty, 2]$, la funzione presenta minimo assoluto in $\left(2, e^{-2}\right)$; nota che $\lim_{x \to 3^-} y' = +\infty$, $(3, 1)$ è punto a tangente verticale.
Concavità e convessità: l'esistenza di un minimo assoluto positivo per $x = 2$, associata alla non esistenza di punti di flesso porta a concludere che la funzione è convessa in tutto il suo $C.E.$.
Grafico:



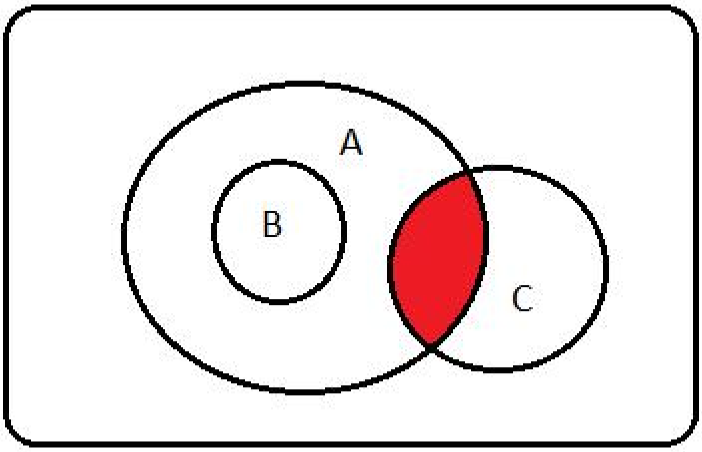
6) $\int_3^5 \left(x^3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{2-x}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2\log|x| - \log|2-x|\right]_3^5 =$
$\left(\frac{625}{4} - 2\log 5 - \log 3\right) - \left(\frac{81}{4} - 2\log 3 - \log 1\right) = 136 + \log \frac{3}{25}$.

7) La retta cercata appartiene al fascio proprio di rette per $P(3, -1)$ con coefficiente angolare pari alla derivata di y in x_0 (condizione di parallelismo con la retta tangente), pertanto la retta ha equazione: $y + 1 = y'(2) \cdot (x - 3)$; con $y' = -3x^2 - 2e^{2x-4}$ da cui $y'(2) = -14$. Soluzione: $y + 1 = -14(x - 3)$ ovvero $y = -14x + 41$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 3 \end{pmatrix}$.
$z(P) = -5$, $\nabla z = (y\cos x + 5\,sen\,x + 3\,y, sen\,x + 3\,x)$, $\nabla z(P) = (12, 0)$.
Equazione del piano tangente: $z + 5 = 12x + 0 \cdot (y - 3)$ oppure $12x - z = 5$.

Compito $\mathbb{D}$

1) L'insieme $\big(C \cap (A \cup B)\big) \cup \big(B \cap \mathcal{C}(A \cup C)\big)$ è rappresentato in rosso nel diagramma di Eulero-Venn che segue:



2) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 62, le 26 lettere minuscole, le 26 lettere maiuscole e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 62^4; nel caso che il codice debba essere composto da una lettera minuscola, una lettera maiuscola e due cifre abbiamo: $\binom{4}{1}$ modi distinti di posizionare sul codice la minuscola, $\binom{3}{1}$ modi distinti di posizionare sul codice la maiuscola, 26 modi distinti di scelta per la minuscola, 26 modi distinti di scelta per la maiuscola e 10^2 modi distinti di scelta per le cifre, pertanto i possibili codici sono $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot 26^2 \cdot 10^2$.

3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen(x - tg\, x)}{sen\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen(x - tg\, x)}{x - tg\, x}}{\frac{sen\, x}{x}} \cdot \left(1 - \frac{tg\, x}{x}\right) = \frac{1}{1} \cdot (1-1) = 0$;

Per $x \to +\infty$, 2^x e x^2 sono o-piccoli di 3^x così come x^4 e x^2 sono o-piccoli di 4^x; pertanto $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x + 2^x + x^2}{4^x + x^4 + x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{4^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$.

4) Una possibile funzione è $g(x) = e^x$. Infatti $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{e^x} = 0$, mentre $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^3 - 2} = 0$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$, $C.E. = [0, +\infty[$.

Segno: $y > 0, \forall x \in C.E.$, perché la funzione è un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0, 1)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

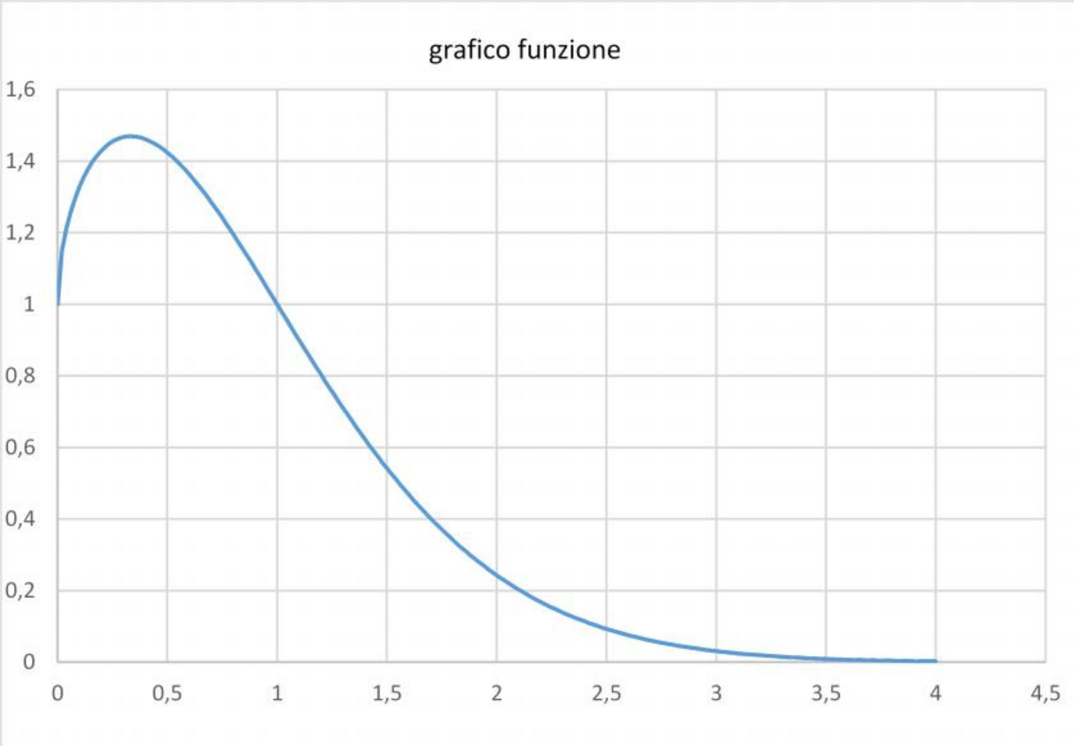
$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} e^{-(x-1)\sqrt{x}} = e^{(\to -\infty)\cdot(\to +\infty)} = e^{\to -\infty} = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza:

$$y' = e^{-(x-1)\sqrt{x}} \cdot \left(-\sqrt{x} - \frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right) = e^{-(x-1)\sqrt{x}} \cdot \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}.$$

$y' > 0 \Rightarrow 1 - 3x > 0 \Rightarrow 0 < x < 1/3$. Funzione strettamente crescente in $[0, 1/3]$, strettamente decrescente in $[1/3, +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $\left(\frac{1}{3}, e^{\frac{2}{9}\sqrt{3}}\right)$; nota che $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} y' = +\infty$, $(0, 1)$ è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: l'esistenza di un massimo assoluto positivo per $x = 1/3$, associata all'esistenza dell'asintoto orizzontale dx con un unico punto di flesso porta a concludere che il flesso ha ascissa maggiore di $1/3$ e la funzione è concava a sinistra del flesso e convessa a destra.
Grafico:



6) $\displaystyle\int_3^4 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2-x}\right) dx \; = \left[\frac{x^2}{2} - \log|x| + \log|2-x|\right]_3^4 =$
$\displaystyle\left(\frac{16}{2} - \log 4 + \log 2\right) \; - \; \left(\frac{9}{2} - \log 3 + \log 1\right) \; = \; \frac{7}{2} + \log\frac{3}{2}\,.$

7) La retta cercata appartiene al fascio proprio di rette per $P(-1,3)$ con coefficiente angolare pari alla derivata di y in x_0 (condizione di parallelismo con la retta tangente), pertanto la retta ha equazione: $y - 3 = y'(1) \cdot (x+1)$; con $y' = 3x^2 - e^{1-x}$ da cui $y'(1) = 2$. Soluzione: $y - 3 = 2(x+1)$ ovvero $y = 2x + 5$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$.
$z(P) = 1$, $\nabla z = (-\,sen\,x - 6, 2\,ysen\,y + y^2cos\,y)$, $\nabla z(P) = (-6, 0)$. Equazione del piano tangente: $z - 1 = -6x$ oppure $6x + z = 1$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 15-16)

23 febbraio 2016

Compito $\mathbb{A}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	$p\ o\ q$	$r \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \neg p$	$r \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$
V	V	V	V	V		
V	V	F	V	V		
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V		
F	V	V	V	V		
F	V	F	V	V		
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Per ipotesi almeno una fra le proposizioni composte $(p\ o\ q)$ oppure $(r \Rightarrow q)$ è falsa e quindi consideriamo solo la terza, settima ed ottava riga della tavola, come è facile notare possiamo concludere con certezza che la proposizione composta $(r \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p))$ è vera.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon 6x^2 + 7x - 3 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}\colon (2x+3)(3x-1) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq -3/2 \vee x \geq 1/3\} =]-\infty, -3/2] \cup [1/3, +\infty[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}\colon log_3 x > -2\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 3^{-2}\} =]1/9, +\infty[$;
$A \cup B =]-\infty, -3/2] \cup]1/9, +\infty[$; $A \cap B = [1/3, +\infty[$;
$\delta(A \cup B) = \{-3/2, 1/9\}$; $\mathcal{D}(A \cap B) = [1/3, +\infty[$.

3) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 36, le 26 lettere (minuscole o maiuscole non fa differenza) e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 36^8; nel caso che il codice debba essere composto inizialmente da tre lettere seguite da cinque cifre abbiamo: 26^3 modi distinti di scelta per le tre lettere e 10^5 modi distinti di scelta per le cifre, pertanto i possibili codici sono $26^3 \cdot 10^5$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(1-cosx)}{1-cos^2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(1-cosx)}{1-cosx} \cdot \dfrac{1}{1+cosx} = 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^{x^2-3} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x^2} \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-3} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x\right)^x \cdot \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{-3} = \left(\to e^{-3}\right)^{(\to -\infty)} \cdot (\to 1) = +\infty.$$

5) $C.E.$: $\dfrac{1+e^x}{1-e^x} > 0 \Rightarrow 1 - e^x > 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < 0$, $C.E. =]-\infty, 0[$.

Segno: $y > 0 \Rightarrow log\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{1+e^x}{1-e^x} > 1 \Rightarrow \dfrac{2e^x}{1-e^x} > 0$, vera $\forall x \in C.E.$, funzione strettamente positiva.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} log\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right) = log(1) = 0$, asintoto orizzontale sx di equazione $y = 0$;

$\lim\limits_{x \to 0} log\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right) = log\left(\dfrac{(\to 2)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$.

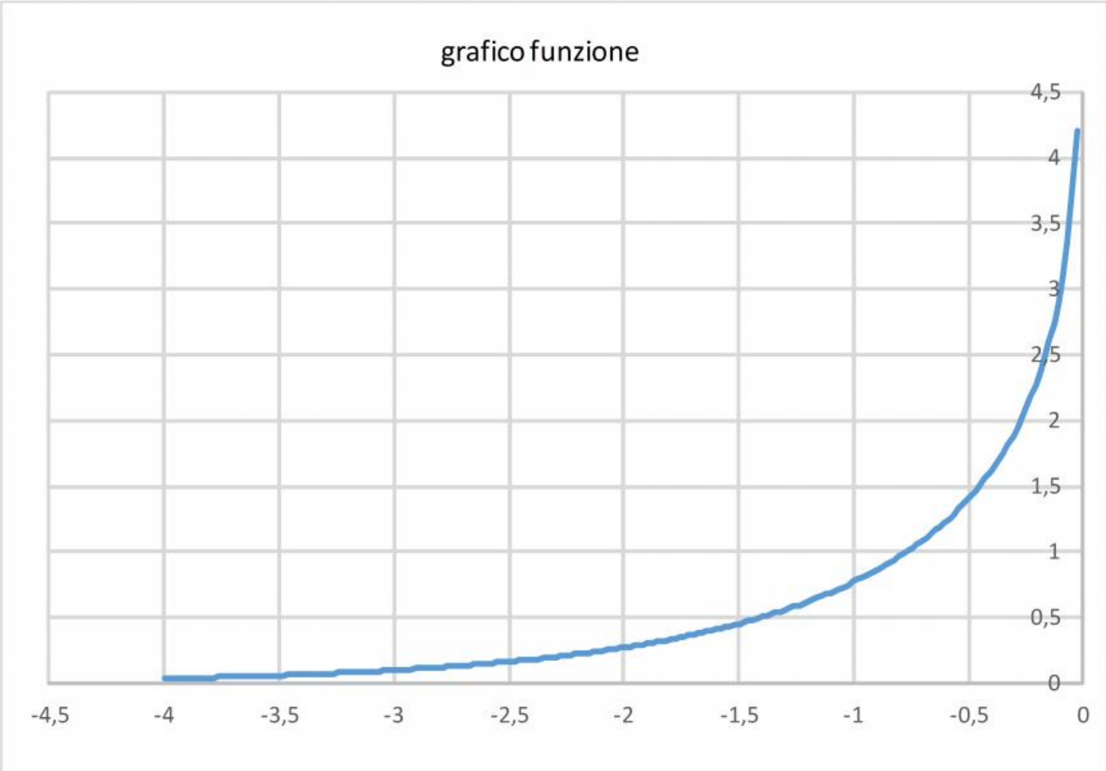
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{1+e^x}{\cancel{1-e^x}}} \cdot \dfrac{e^x(1-e^x) - (1+e^x)(-e^x)}{(1-e^x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{2e^x}{1-e^{2x}}$,

$y' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{2e^x(1-e^{2x}) - 2e^x(-2e^{2x})}{(1-e^{2x})^2} = \dfrac{2e^x(1+e^{2x})}{(1-e^{2x})^2}$,

$y'' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:



6)

$$\int_4^5 \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \right) dx \ = \left[log|x-3| + log|x-2| + log|x-1| \right]_4^5 =$$
$$(log\,2 + log\,3 + log\,4) \ - \ (log\,1 + log\,2 + log\,3) \ = log\,4.$$

7) Un vettore W è parallelo al vettore V se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $W = \lambda V = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$,

da cui segue $W^T \cdot \mathbb{A}^T \cdot W = (\,\lambda \quad -\lambda \quad 0\,) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} =$

$(\,\lambda \quad -\lambda \quad 0\,) \begin{pmatrix} 0 \\ -3\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = 3\lambda^2$, posto $3\lambda^2 = 27$ risulta $\lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3$. I vettori cercati sono: $W_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $W_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

8) $f'_x = z(x+y)^{z-1}$; $\quad f'_y = z(x+y)^{z-1} - z^3$; $\quad f'_z = (x+y)^z log(x+y) - 3yz^2$.

Compito $\mathbb{B}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	$p\ o\ q$	$q \Rightarrow r$	$p \Leftrightarrow r$	$(p \Leftrightarrow r)\ e\ q$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F		
V	F	V	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F		
F	F	V	F			
F	F	F	F			

Per ipotesi entrambe le proposizioni composte $(p\ o\ q)$ e $(q \Rightarrow r)$ sono vere e quindi consideriamo solo le righe ove entrambe sono verificate, come è facile notare (vedi prima riga) non possiamo concludere con certezza che la proposizione composta $((p \Leftrightarrow r)\ e\ q)$ è falsa.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 5x^2 - 19x - 4 < 0\} = \{x \in \mathbb{R}: (5x+1)(x-4) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -1/5 < x < 4\} =]-1/5, 4[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: log_4 x \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 4^{-1}\} = [1/4, +\infty[$;
$A \cup B =]-1/5, +\infty[$; $A \cap B = [1/4, 4[$; $\mathcal{D}(A \cup B) = [-1/5, +\infty[$;
$\delta(A \cap B) = \{1/4, 4\}$.

3) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 36, le 26 lettere (minuscole o maiuscole non fa differenza) e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 36^6; nel caso che il codice debba essere composto inizialmente da tre lettere seguite da tre cifre abbiamo: 26^3 modi distinti di scelta per le tre lettere e 10^3 modi distinti di scelta per le cifre, pertanto i possibili codici sono $26^3 \cdot 10^3 = 260^3$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(senx)}{senx^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(senx)}{sen^2 x} \cdot \frac{\frac{sen^2 x}{x^2}}{\frac{senx^2}{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)^{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^2 =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^2 = (\to e^2)^{(\to 0)} \cdot (\to 1) = 1.$$

5) $C.E.$: $\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0 \Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$, $C.E. =]0, +\infty[$.

Segno: $y > 0 \Rightarrow log\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > 1 \Rightarrow \dfrac{-2}{e^x + 1} > 0$, falsa $\forall x \in C.E.$, funzione strettamente negativa.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0} log\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = log\left(\dfrac{(\to 0^+)}{(\to 2)}\right) = -\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = log(1) = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

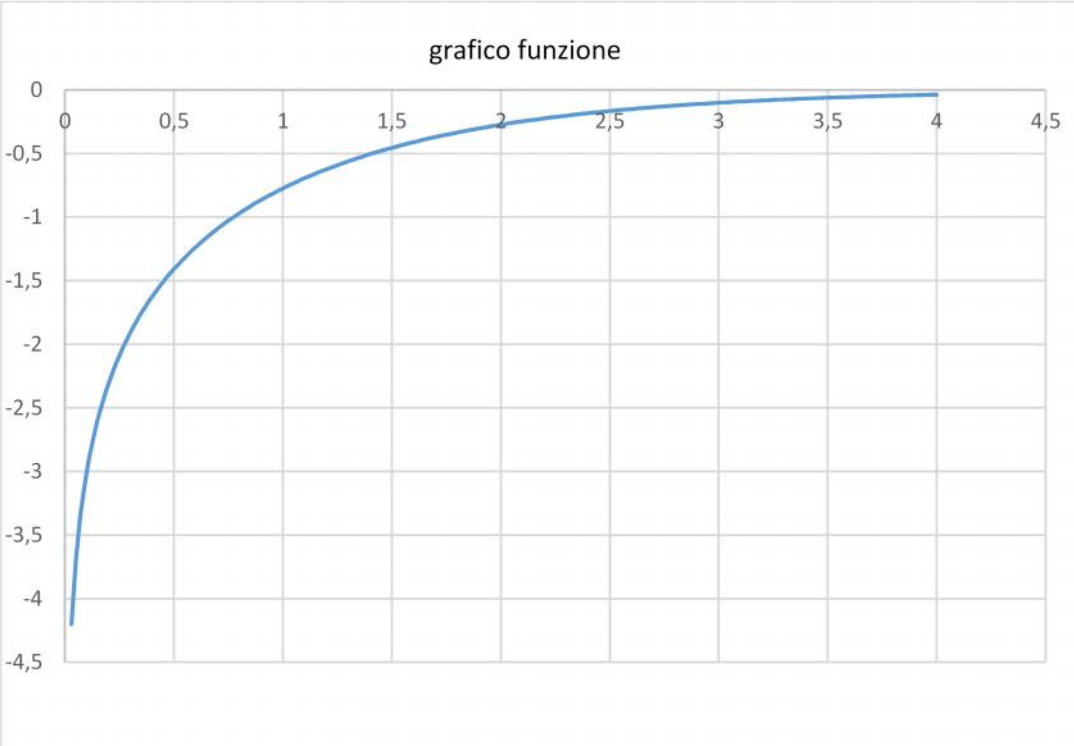
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{e^x - 1}{\cancel{e^x + 1}}} \cdot \dfrac{e^x(e^x+1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x+1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{2e^x}{e^{2x} - 1}$,

$y' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{2e^x(e^{2x}-1)-2e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2} = -\dfrac{2e^x(1+e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}$,

$y''<0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente concava.

Grafico:



6)

$$\int_5^7 \left(\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \Big[log|x-4|+log|x-3|+log|x-2|\Big]_5^7 =$$

$(log\,3+log\,4+log\,5) - (log\,1+log\,2+log\,3) = log\,10.$

7) Un vettore W è parallelo al vettore V se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $W = \lambda V = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$,

da cui segue $W^T \cdot \mathbb{A} \cdot W = (\lambda \quad 0 \quad -\lambda)\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} =$

$(\lambda \quad 0 \quad -\lambda)\begin{pmatrix} -5\lambda \\ 4\lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2$, posto $-2\lambda^2 = -8$ risulta

$\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$. I vettori cercati sono: $W_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $W_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8) $f'_x = -y^{z-x}log\,y$; $\quad f'_y = (z-x)y^{z-x-1}+4y^3z$; $\quad f'_z = y^{z-x}log\,y + y^4$.

Compito $\mathbb{C}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	$p\ e\ q$	$\neg(r \Rightarrow q)$	$q \Leftrightarrow p$	$r\ o\ q$	$(q \Leftrightarrow p) \Rightarrow (r\ o\ q)$
V	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F			
V	F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F			
V	F	F	F	F			
F	F	F	F	F			

Per ipotesi almeno una fra le proposizioni composte $(p\ e\ q)$ oppure $\neg(r \Rightarrow q)$ è vera e quindi consideriamo solo le righe prima, terza, quarta e quinta, come è facile notare (vedi ultima colonna) possiamo concludere con certezza che la proposizione composta $((q \Leftrightarrow p) \Rightarrow (r\ o\ q))$ è vera.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 5x^2 - 19x - 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: (5x+1)(x-4) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -1/5 \vee x \geq 4\} =]-\infty, -1/5] \cup [4, +\infty[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: log_3 x > 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 3^2\} =]9, +\infty[$;
$A \cup B =]-\infty, -1/5] \cup [4, +\infty[$; $A \cap B =]9, +\infty[$;
$\mathcal{D}(A \cup B) =]-\infty, -1/5] \cup [4, +\infty[$; $\delta(A \cap B) = \{9\}$.

3) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 36, le 26 lettere (minuscole o maiuscole non fa differenza) e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 36^8; nel caso che il codice debba essere composto inizialmente da tre cifre seguite da cinque lettere abbiamo: 10^3 modi distinti di scelta per le tre cifre e 26^5 modi distinti di scelta per le lettere, pertanto i possibili codici sono $10^3 \cdot 26^5$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 - tg^2 x)}{sen x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 - tg^2 x)}{tg^2 x} \cdot \dfrac{sen x}{cos^2 x} = -1 \cdot \dfrac{0}{1} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3 + 2}{x^3}\right)^{x^3 - 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^3}\right)^{x^3} \cdot \left(1 + \dfrac{2}{x^3}\right)^{-3} =$
$e^2 \cdot (\to 1) = e^2$.

5) $C.E.$: $\dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} > 0 \Rightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Rightarrow e^{2x} > 1 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$,
$C.E. =]0, +\infty[$.

Segno: $y > 0 \Rightarrow log\left(\dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} > 1 \Rightarrow \dfrac{2}{e^{2x} - 1} > 0$, vera $\forall x \in C.E.$, funzione strettamente positiva.

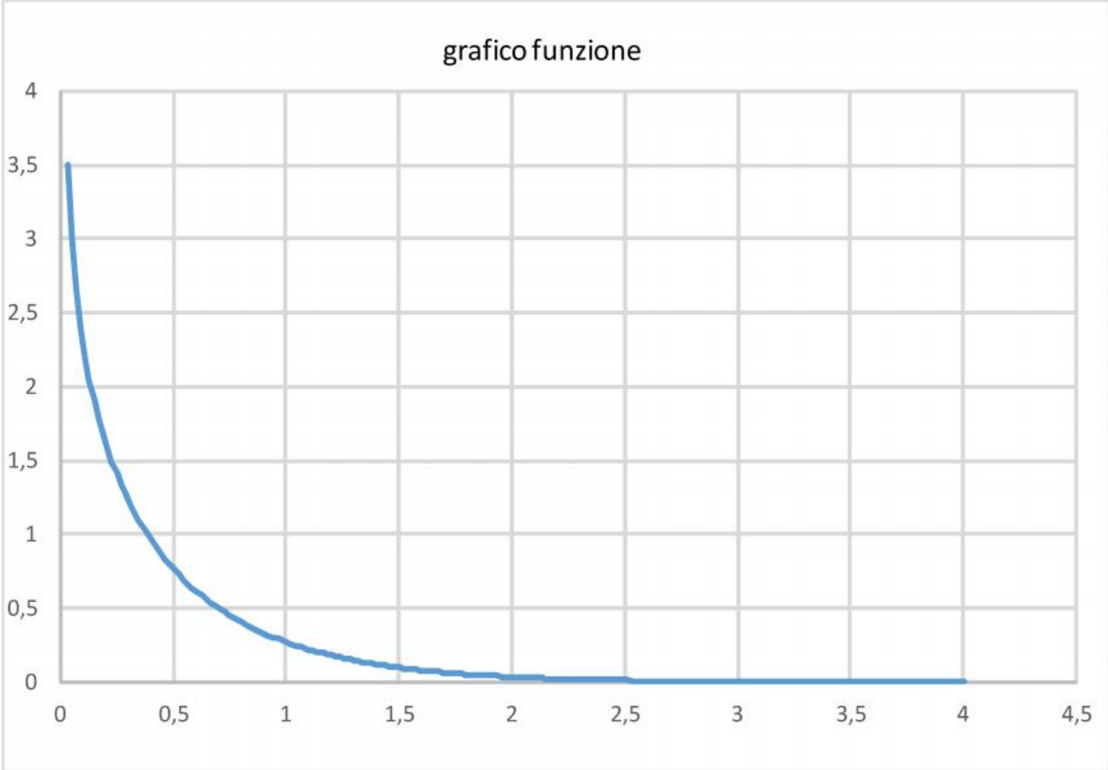
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 0} log\left(\dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right) = log\left(\dfrac{(\to 2)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right) = log(1) = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^{2x}-1}}} \cdot \dfrac{2e^{2x}(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{-4e^{2x}}{e^{4x} - 1}$,
$y' < 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente decrescente.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-8e^{2x}(e^{4x}-1)+4e^{2x}(4e^{4x})}{(e^{4x}-1)^2} = \dfrac{8e^{2x}(1+e^{4x})}{(e^{4x}-1)^2}$,
$y'' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente convessa.
Grafico:



6)
$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+5}\right) dx = \Big[log|x+3| + log|x+4| + log|x+5|\Big]_0^1 =$$
$$(log\,4 + log\,5 + log\,6) - (log\,3 + log\,4 + log\,5) = log\,2.$$

7) Un vettore W è parallelo al vettore V se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $W = \lambda V = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$, da cui segue $W^T \cdot \mathbb{A}^T \cdot W = (0 \quad \lambda \quad \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} =$

$(0 \quad \lambda \quad \lambda) \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ -2\lambda \end{pmatrix} = -2\lambda^2$, posto $-2\lambda^2 = -32$ risulta $\lambda^2 = 16 \Rightarrow \lambda = \pm 4$.

I vettori cercati sono: $W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

8) $f'_x = -3\, z^{y-3x} log\, z - yz$; $\quad f'_y = z^{y-3x} log\, z - xz$; $\quad f'_z = (y-3x) z^{y-3x-1} - xy$.

Compito $\mathbb{D}$

1) Costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q$
V	V	V	F	V	V	F
V	V	F	F	F		
V	F	V	V			
V	F	F	V			
F	V	V	V			
F	V	F	V			
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Per ipotesi la proposizione composta $\neg(p \Leftrightarrow q)$ é falsa e la proposizione composta $(q \Rightarrow r)$ è vera, quindi consideriamo solo la prima e le ultime due righe, come è facile notare (vedi ultime due righe) non possiamo concludere con certezza che la proposizione composta $((p \Rightarrow r) \Rightarrow \neg q)$ è sicuramente falsa.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3x^2 - 8x - 3 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: (3x+1)(x-3) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -1/3 \vee x > 3\} =]-\infty, -1/3[\cup]3, +\infty[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: log_5 x > -2\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 5^{-2}\} =]1/25, +\infty[$;
$A \cup B =]-\infty, -1/3[\cup]1/25, +\infty[$; $A \cap B =]3, +\infty[$;
$\delta(A \cup B) = \{-1/3, 1/25\}$; $\mathcal{D}(A \cap B) = [3, +\infty[$.

3) Se la composizione del codice è libera, i possibili distinti caratteri sono 36, le 26 lettere (minuscole o maiuscole non fa differenza) e le 10 cifre, pertanto i possibili codici sono 36^6; nel caso che il codice debba essere composto inizialmente da due cifre seguite da quattro lettere abbiamo: 10^2 modi distinti di scelta per le due cifre e 26^4 modi distinti di scelta per le lettere, pertanto i possibili codici sono $10^2 \cdot 26^4$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-cos^2 x} - 1}{tg^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen^2 x} - 1}{sen^2 x} \cdot \dfrac{\frac{sen^2 x}{x^2}}{\frac{tg^2 x}{x^2}} = 1 \cdot \dfrac{1}{1} = 1$;

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x+5}{x}\right)^{2+x^3} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{x^3} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^2 \cdot \left(\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x\right)^{x^2} = (\to 1) \cdot (\to e^5)^{(\to +\infty)} = +\infty.$$

5) $C.E.$: $\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} > 0 \Rightarrow 1 - e^{2x} > 0 \Rightarrow e^{2x} < 1 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$,
$C.E. =]-\infty, 0[$.

Segno: $y > 0 \Rightarrow log\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} > 1 \Rightarrow \dfrac{-2e^{2x}}{1 + e^{2x}} > 0$, falsa $\forall x \in C.E.$, funzione strettamente negativa.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 0} log\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right) = log\left(\dfrac{(\to 0^+)}{(\to 2)}\right) = -\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} log\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right) = log(1) = 0$; asintoto orizzontale sx di equazione $y = 0$.

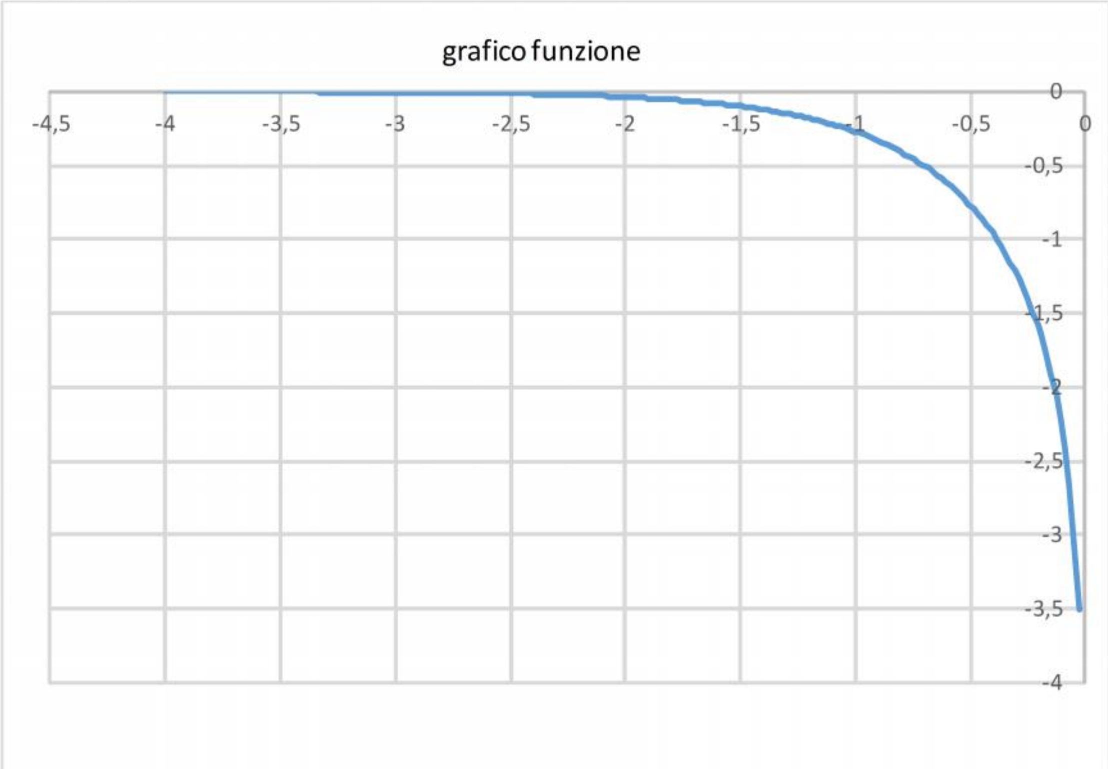
Crescenza e decrescenza:

$$y' = \frac{1}{\frac{1-e^{2x}}{\cancel{1+e^{2x}}}} \cdot \frac{-2e^{2x}(1+e^{2x}) - (1-e^{2x})2e^{2x}}{(1+e^{2x})^{\cancel{2}}} = \frac{-4e^{2x}}{1 - e^{4x}},$$

$y' < 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente decrescente.
Concavità e convessità:

$$y'' = \frac{-8e^{2x}(1-e^{4x}) + 4e^{2x}(-4e^{4x})}{(1-e^{4x})^2} = \frac{-8e^{2x}(1+e^{4x})}{(1-e^{4x})^2}, \; y'' < 0, \forall x \in C.E..$$

Funzione strettamente concava.
Grafico:



6)

$$\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+2}\right) dx = \Big[log|x+4| + log|x+3| + log|x+2|\Big]_{-1}^{0} =$$
$$(log\,4 + log\,3 + log\,2) - (log\,3 + log\,2 + log\,1) = log\,4.$$

7) Un vettore W è parallelo al vettore V se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $W = \lambda V = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix}$,

da cui segue $W^T \cdot \mathbb{A} \cdot W = (-\lambda \quad 0 \quad -\lambda)\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{pmatrix} =$

$(-\lambda \quad 0 \quad -\lambda)\begin{pmatrix} 4\lambda \\ 3\lambda \\ -3\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2$, posto $-\lambda^2 = -4$ risulta

$\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda = \pm 2$. I vettori cercati sono: $W_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $W_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

8) $f'_x = 2(zy)^{2x} log(zy)$; $\quad f'_y = 2x(zy)^{2x-1}z + z^3$; $\quad f'_z = 2x(zy)^{2x-1}y + 3\,yz^2$.

Università degli Studi di Siena

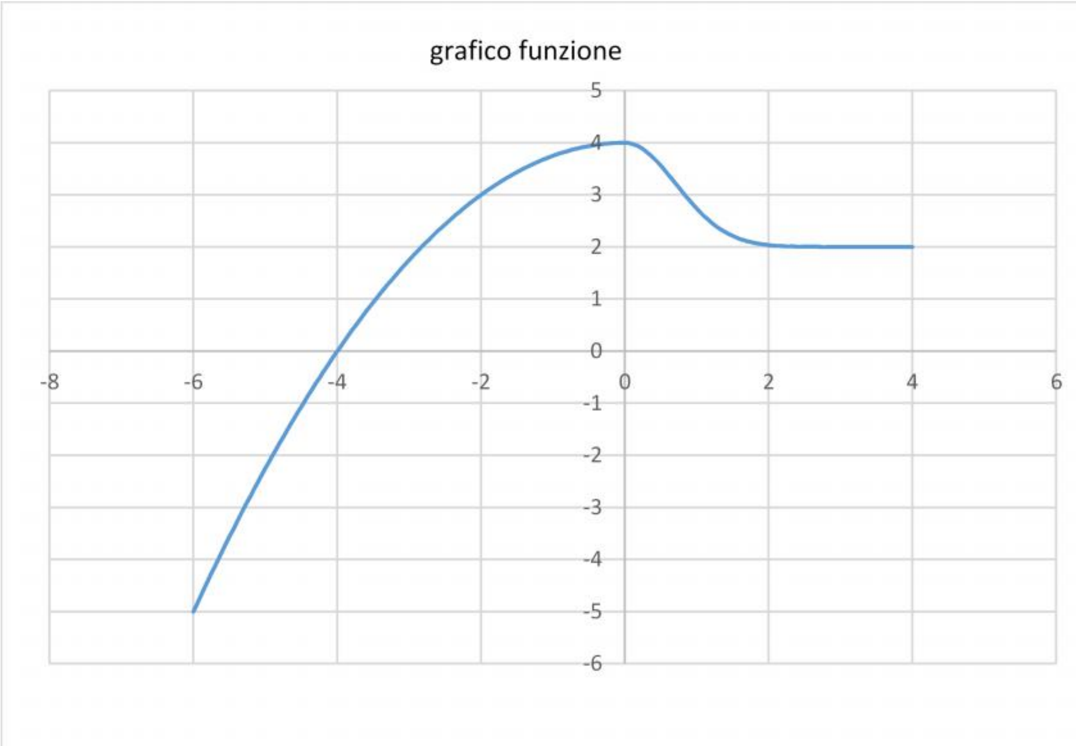
Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 14-15)
19 marzo 2016
Compito Unico

1) Dato che le proposizioni p e r non possono essere entrambe vere o entrambe false consideriamo solo i casi in cui una è vera e l'altra è falsa, costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow \neg r$	$q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r)$	$\neg r \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow \neg r))$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

2) La parola $SIENA$ è formata da cinque lettere tutte diverse fra loro, i suoi possibili anagrammi anche privi di senso sono pertanto $5! = 120$. La parola $SENESE$ invece è formata da sei lettere di cui la esse si ripete due volte e la e tre volte, pertanto i suoi possibili anagrammi anche privi di senso sono $\frac{6!}{2!3!} = 60$.

3) Di seguito un possibile grafico di funzione che soddisfa i punti 1-4.



4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x + sen(sen\, x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen\, x}{x} + \frac{sen(sen\, x)}{sen\, x} \cdot \frac{sen\, x}{x} \right) =$
$1 + 1 \cdot 1 = 2$; per il secondo limite risulta che $3^x = o(x^3)$ e $2^x = o(x^2)$ per $x \to -\infty$, quindi $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 3^x}{x^2 + 2^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$.

5) $C.E.$: $log\, x > 0 \Rightarrow x > 1$, $C.E. =]1, +\infty[$.
Segno: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché rapporto fra due quantità positive.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{log\, x}} = \frac{(\to 1)}{(\to 0^+)} = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 1$;

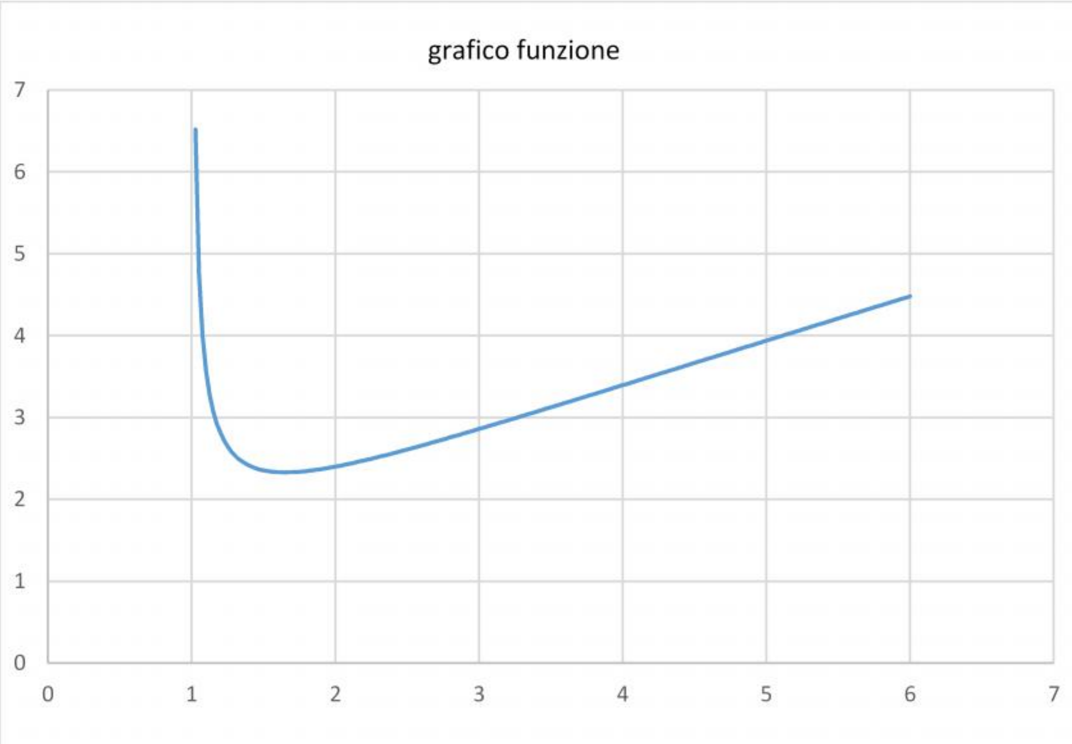
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{\log x}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{\log x}} = +\infty$, perché $\log x = o(x^2)$ per $x \to +\infty$; il limite è facilmente risolvibile anche applicando il Teorema di de l'Hôpital;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\log x}} = 0$, la funzione non presenta asintoto obliquo.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1 \cdot \sqrt{\log x} - \cancel{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log x}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{\left(\sqrt{\log x}\right)^2} = \frac{2\log x - 1}{2\left(\sqrt{\log x}\right)^3}$,

$y' > 0$, se $2\log x - 1 > 0 \Rightarrow \log x > 1/2 \Rightarrow x > e^{1/2} = \sqrt{e}$. Funzione strettamente decresente in $]1, \sqrt{e}]$, strettamente crescente in $[\sqrt{e}, +\infty[$; minimo assoluto della funzione pari a $y\left(\sqrt{e}\right) = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{\log \sqrt{e}}} = \sqrt{2e}$ per $x = \sqrt{e}$.

Concavità e convessità: la conoscenza che la funzione presenta un unico punto di flesso di ascissa maggiore di e insieme al punto di minimo per $x = \sqrt{e}$, porta a concludere che essa è convessa in un intorno destro di 1 e concava altrove.
Grafico:



6) $\int_1^3 \frac{2x^3+1}{x^2}\,dx = \int_1^3 \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[x^2 - \frac{1}{x}\right]_1^3 = \left(9 - \frac{1}{3}\right) - (1-1) = \frac{26}{3}$.

7) Per una funzione derivabile in x_0, l'equazione della sua retta tangente nel punto stesso è $y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$; nel caso proposto si ha $y(0) = \left(1+e^0\right)^2 = 4$, $y' = 2\left(1+e^{2x}\right) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 4\left(1+e^{2x}\right) \cdot e^{2x}$, con $y'(0) = 4\left(1+e^0\right) \cdot e^0 = 8$. La retta tangente ha equazione $y - 4 = 8(x-0)$ ovvero $y = 8x + 4$.

8) $\nabla f = (2(x+y), 2(x+y) + 6y)$.

FOC: $\begin{cases} 2(x+y)=0 \\ 2(x+y)+6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, unico punto critico $O(0,0)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 12$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = 12 > 0$, $f''_{xx}(O) = 2 > 0$. O punto di minimo.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 15-16)
4 giugno 2016
Compito Unico

1)

p	q	r	$\neg q$	$p\ o\ q$	$\neg(p\ e\ r)$	$\neg((p\ o\ q) \Rightarrow r)$	$\neg(p\ e\ r) \Leftrightarrow \neg q$	$\neg((p\ o\ q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg(p\ e\ r) \Leftrightarrow \neg q)$
V	V	V	F	V	F	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	V

2) Se disponiamo solo delle cifre 1, 2, 3, 4, 5 e 6, per formare un numero di sei cifre abbiamo 6 modi distinti di scegliere la prima cifra, 6 modi distinti di scegliere la seconda cifra e così via, i possibili numeri sono pertanto $6^6 = 46.656$. Se invece il numero deve essere pari e le cifre non possono ripetersi, abbiamo 3 modi distinti di scegliere l'ultima cifra (solo le pari), 5 modi distinti di scegliere la penultima cifra (le cifre non possono ripetersi), 4 modi distinti di scegliere la terzultima cifra e così via, i possibili numeri sono pertanto $3 \cdot 5! = 360$.

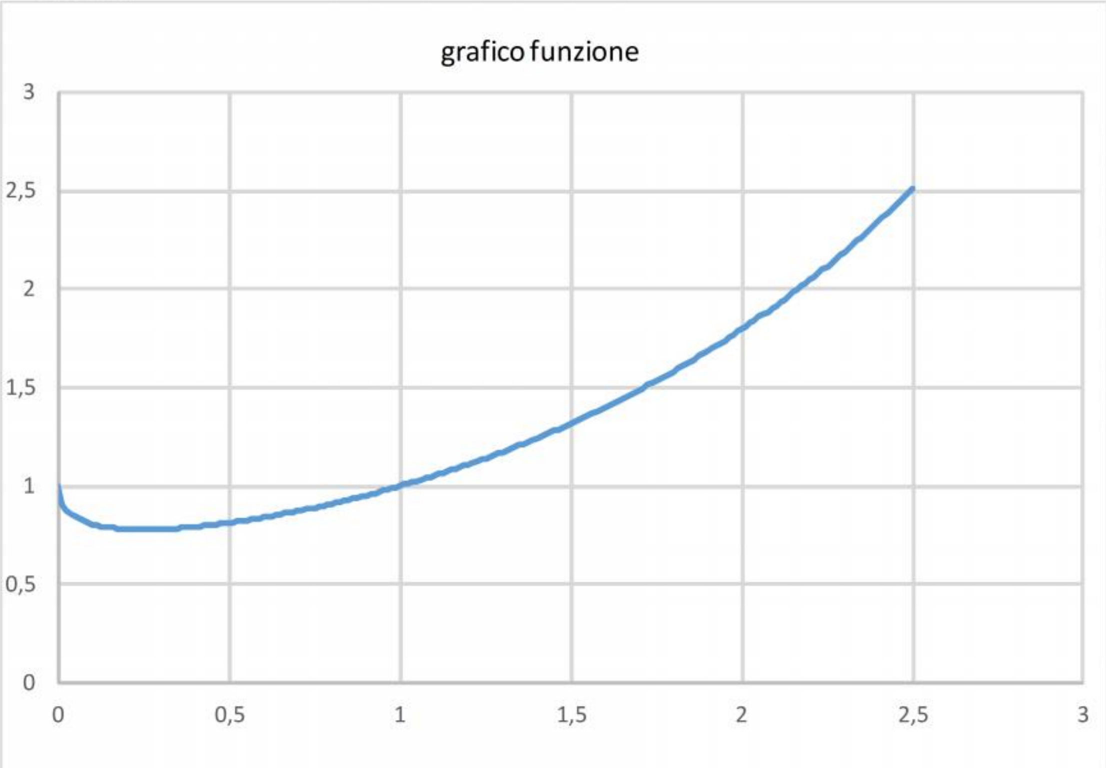
3) $f(g(x)) = f(2x+1) = 2 + (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 3$,
$g(f(x)) = g(2+x^2) = 2(2+x^2) + 1 = 2x^2 + 5$.
$f(g(x)) < g(f(x)) \Rightarrow 4x^2 + 4x + 3 < 2x^2 + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 2 < 0 \Leftrightarrow$
$x^2 + 2x - 1 < 0$; $\Delta = 4 + 4 = 8$, $x_{1,2} = \left(-2 \pm \sqrt{8}\right)/2 = \left(-2 \pm 2\sqrt{2}\right)/2 =$
$-1 \pm \sqrt{2}$. Le soluzioni della disequazione sono: $-1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-\cos x + \operatorname{sen} x} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{1-\cos x + \operatorname{sen} x} - 1}{1 - \cos x + \operatorname{sen} x} \left(\dfrac{1-\cos x}{x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \right) =$
$1(0+1) = 1$; $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2} \right)^{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^2} \right)^{x^2} = e^2$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$, $C.E. = [0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché la funzione è una esponenziale.$y(0) = e^0 = 1$; il punto $(0,1)$ è l'unica intersezione con gli assi ed è punto di stop per il grafico della funzione.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = e^{(\to+\infty)(\to+\infty)} = +\infty$, la funzione non presenta asintoto orizzontale;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x-\sqrt{x}}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x-\sqrt{x}}}{e^{\log x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-\sqrt{x}-\log x} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1-\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)} = e^{(\to+\infty)(\to+\infty)} = +\infty$, la funzione non presenta asintoto obliquo (nota che per $x \to +\infty$, $\log x = o\left(\sqrt{x}\right)$).
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x-\sqrt{x}} \left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \right)$, $y' > 0$, se $1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow$

$2\sqrt{x} > 1 \Rightarrow x > 1/4$. Funzione strettamente decresente in $[0, 1/4]$, strettamente crescente in $[1/4, +\infty[$; massimo relativo in $(0, 1)$, minimo assoluto della funzione pari a $y(1/4) = e^{1/4-\sqrt{1/4}} = e^{-1/4} = 1/\sqrt[4]{e}$ per $x = 1/4$. $\lim\limits_{x\to 0^+} y' = -\infty$; $(0, 1)$ è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = e^{x-\sqrt{x}}\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + e^{x-\sqrt{x}}\left(\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}\right) =$
$e^{x-\sqrt{x}}\left(\left(1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}\right)$, $y'' > 0, \forall x > 0$, perché y'' è prodotto tra fattori positivi. Funzione strettamente convessa.
Grafico:



6) $\displaystyle\int \frac{1+4x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + 2\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = arctg\,x + 2\,log(1+x^2) + c.$

7) L'equazione della retta tangente alla funzione h nel punto $x_0 = 0$ è
$y = h(0) + h'(0)\cdot x$, con $h(0) = f(0)\cdot g(0) = 0$ e
$h'(0) = f'(0)\cdot g(0) + f(0)\cdot g'(0) = 0$; l'equazione richiesta è dunque $y = 0$.

8) $\nabla f = (3x^2 + 2y, 2x + 6y)$.

FOC: $\begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27y^2 + 2y = 0 \\ x = -3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(27y+2) = 0 \\ x = -3y \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} y = 0 \vee y = -2/27 \\ x = -3y \end{cases}$, f presenta due punti critici $O(0,0)$ e $P(2/9, -2/27)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 36x - 4$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = -4 < 0$. O punto di sella.
$|\mathcal{H}f(P)| = 4 > 0$, $f''_{yy}(P) = 6 > 0$. P punto di minimo.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 15-16)
2 luglio 2016
Compito Unico

1) ($PRIMO\ METODO$ - con la logica) Da $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ deriva che $A \cap B = \emptyset$ e $A \cap C = \emptyset$ quindi $B \subseteq \mathcal{C}(A)$ e $C \subseteq \mathcal{C}(A)$, pertanto $B \cap \mathcal{C}(A) = B$ e $C \cup \mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A)$; banalmente risulta $(B \cap \mathcal{C}(A)) \subseteq (C \cup \mathcal{C}(A))$ perché $B \subseteq \mathcal{C}(A)$.
($SECONDO\ METODO$ - con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$\mathcal{C}(A)$	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$B \cap \mathcal{C}(A)$	$C \cup \mathcal{C}(A)$	$(B \cap \mathcal{C}(A)) \subseteq (C \cup \mathcal{C}(A))$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$			
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$			
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$			
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	V
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	V
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	V
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V

Per l'ipotesi $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ dobbiamo escludere le prime tre righe della tavola e come risulta dalle rimanenti cinque concludiamo facilmente la verità della relazione $(B \cap \mathcal{C}(A)) \subseteq (C \cup \mathcal{C}(A))$.

È facile notare che l'ipotesi $A \cap (B \cup C) = \emptyset$ è totalmente irrilevante ai fini della verifica dell'inclusione $(B \cap \mathcal{C}(A)) \subseteq (C \cup \mathcal{C}(A))$, in quanto se $x \in B \cap \mathcal{C}(A)$, allora $x \in \mathcal{C}(A)$ e di conseguenza $x \in C \cup \mathcal{C}(A)$ indipendentemente dalle relazioni fra gli insiemi A, B e C.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: (x-2)(x-3) > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 2 \vee x > 3\} =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^{|x|} < 2\} = \{x \in \mathbb{R}: |x| < 1\} = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 1\} =]-1, 1[$,
$C = \{x \in \mathbb{R}: log(x+1) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x+1 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty[$. Nota che $B \subseteq A$, pertanto $A \cup B = A$ insieme aperto e $A \cap B \cap C = B \cap C = [0, 1[$ insieme nè aperto nè chiuso.

3) Per comporre una targa automobilistica la motorizzazione sanmarinese ha 21 modi distinti per scegliere la lettera e 10^4 modi distinti per scegliere le rimanenti quattro cifre, le targhe distinte sono quindi $21 \cdot 10^4 = 210.000$. Nella seconda ipotesi la possibilità di porre la lettera alla conclusione della targa crea una situazione esattamente speculare a quella nella quale la lettera è posta all'inizio, le targhe distinti in questo caso sono allora pari al doppio del caso precedente ovvero 420.000.

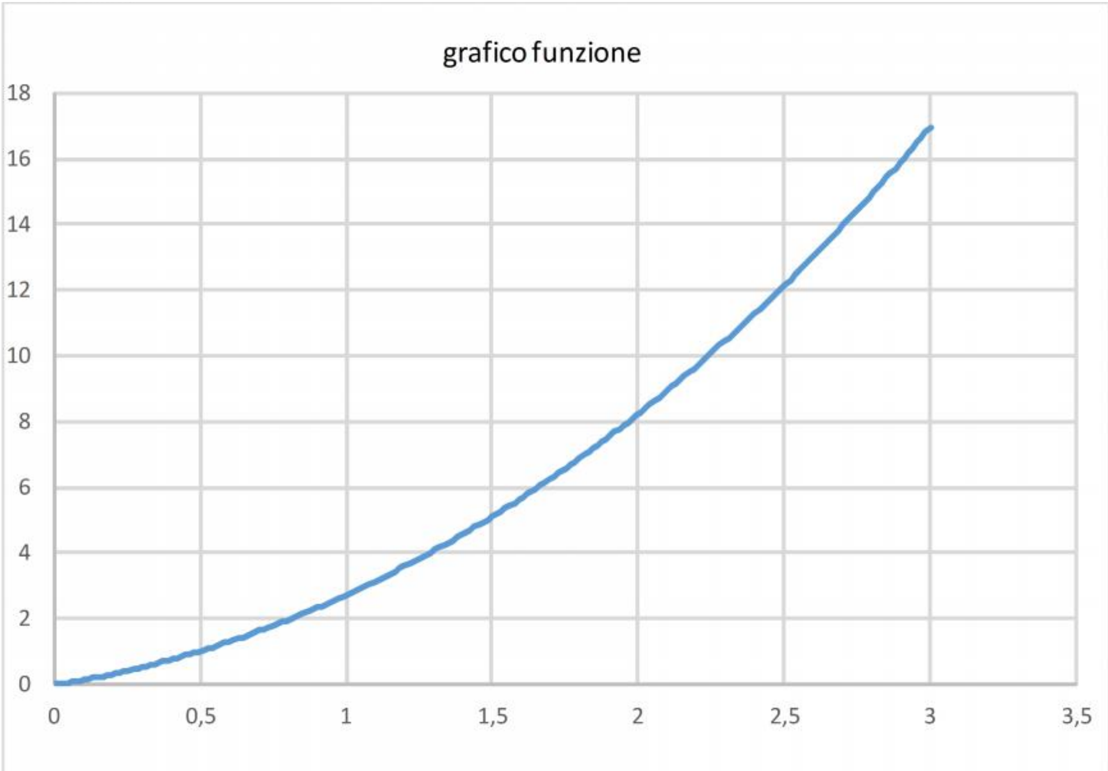
4) Nel primo limite se dividiamo numeratore e denominatore per x otteniamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x + sen\, x^2}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen\, x + sen\, x^2}{x}}{\frac{1 - cos\, x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen\, x}{x} + \frac{sen\, x^2}{x^2} \cdot x}{\frac{1 - cos\, x}{x}} = \frac{(\to 1) + (\to 1) \cdot (\to 0)}{(\to 0)} = \infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2} + e^{2x}}{e^{x^3}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(e^{x^2 - x^3} + e^{2x - x^3} \right) = e^{(\to -\infty)} + e^{(\to -\infty)} = 0,$$ poiché per $x \to +\infty$ $x^2 = o(x^3)$ e $2x = o(x^3)$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$, $C.E. = [0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$ perché la funzione è un prodotto fra una quantitità non negativa x ed una quantitità positiva l'esponenziale.

$y(0) = 0 \cdot e^0 = 0$; $y = 0 \Leftrightarrow xe^{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 0$; l'origine degli assi $O(0,0)$ è l'unica intersezione con gli assi ed è punto di stop per il grafico della funzione.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{\sqrt{x}} = (\to +\infty) \cdot e^{(\to +\infty)} = +\infty$, la funzione non presenta asintoto orizzontale;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}e^{\sqrt{x}}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$, la funzione non presenta asintoto obliquo.
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{\sqrt{x}} + xe^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)e^{\sqrt{x}}$,
$y' > 0, \forall x \in C.E.$ perché prodotto fra due quantità positive. Funzione strettamente crescente nel suo campo di esistenza, minimo assoluto pari a 0 nel punto $x = 0$.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$
$\left(\frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\right)e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)e^{\sqrt{x}}$, $y'' > 0, \forall x > 0$, perché y'' è ancora un prodotto tra fattori positivi. Funzione strettamente convessa.
Grafico:



6) $\int_0^k e^{2x}\,dx = \int_{-1}^0 x^2\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^k = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2k} - \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}e^{2k} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow e^{2k} = \frac{5}{3}$ da cui $2k = log(5/3)$ e quindi $k = \frac{1}{2}log(5/3) = log\sqrt{5/3}$.
7) L'equazione della retta tangente alla funzione h nel punto $x_0 = 0$ è
$y = h(0) + h'(0) \cdot x$, con $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{0}{1} = 0$ e

$h'(0) = \frac{f'(0) \cdot g(0) - f(0) \cdot g'(0)}{(g(0))^2} = \frac{1 \cdot 1 - 0 \cdot 0}{1^2} = 1$; l'equazione richiesta è dunque $y = x$.

8) Il piano tangente alla superficie nel punto $O = (0, 0)$ ha equazione $z - z(O) = (\nabla z(O))^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $z(O) = 0 \cdot 0 + 2 \cdot sen\, 0 - 0 \cdot cos\, 0 = 0$, $\nabla z = (y + 2\, cos\, x + y\, sen\, x, x - cos\, x)$ e $\nabla z(O) = (2, \, -1)$.

L'equazione del piano tangente richiesta è $z - 0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ equivalente a $z = 2x - y$ che può essere riscritta come $2x - y - z = 0$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 15-16)

9 settembre 2016

Compito $\mathbb{Y}$

1) (*PRIMO METODO*: con la logica)

Se la proposizione composta $q \Leftrightarrow r$ è vera, q ed r sono equivalenti quindi $q \Rightarrow (p\ o\ r)$ è equivalente a $q \Rightarrow (p\ o\ q)$, banalmente vera perché q necessariamente implica la disgiunzione $p\ o\ q$.

(*SECONDO METODO*: con la tavola di verità)

p	q	r	$p\ o\ q$	$q \Leftrightarrow r$	$p\ o\ r$	$q \Rightarrow (p\ o\ r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F		
V	F	V	V	F		
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F		
F	F	V	F	F		
F	F	F	F	V		

Per l'ipotesi $(p\ o\ q)$ e $(q \Leftrightarrow r)$ entrambe vere, consideriamo solo la prima, la quarta e la quinta riga, come risulta dalle tre righe concludiamo facilmente la verità della proposizione composta $q \Rightarrow (p\ o\ r)$.

2) Il campo di esistenza della funzione è dato dalle x che soddisfano la condizione $\dfrac{1 - log\,x}{\sqrt{1 + log\,x}} \geq 0$ che è verificata se $1 - log\,x \geq 0$ e $1 + log\,x > 0$ ovvero $-1 < log\,x \leq 1$ da cui segue $1/e < x \leq e$.

$A = \{x \in \mathbb{R}: 1/e < x \leq e\} =]1/e, e]$; insieme nè aperto nè chiuso.

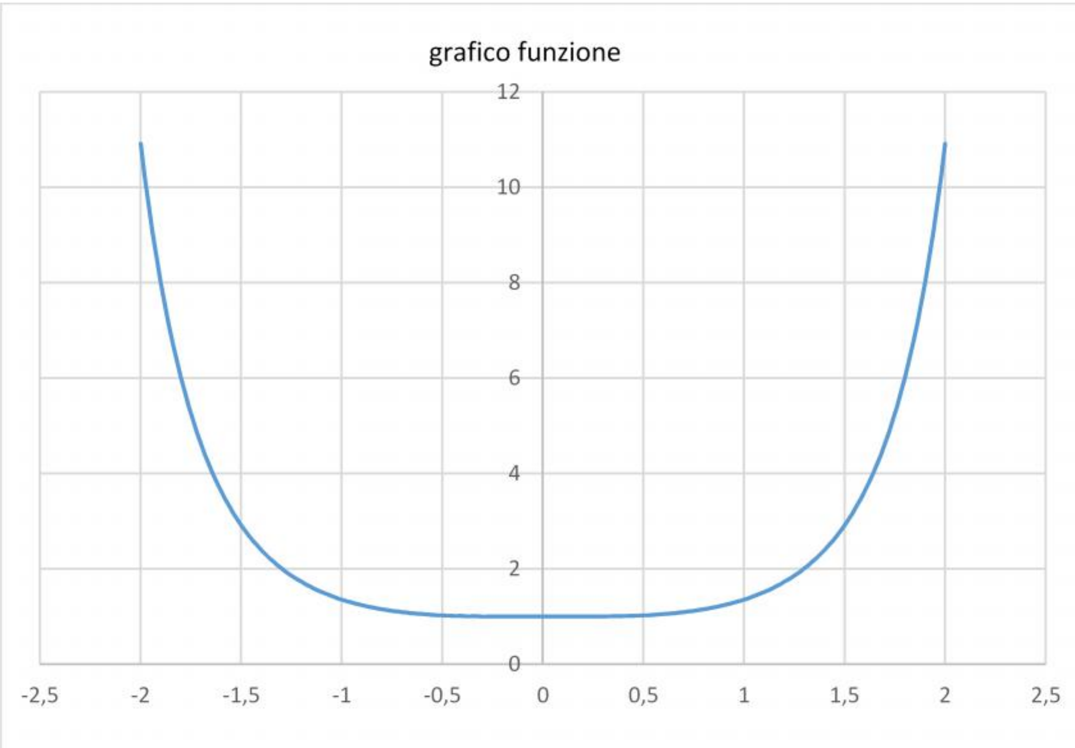
3) Per un numero palindro di cinque cifre abbiamo 9 modi distinti di scegliere la prima cifra, 10 modi distinti di scegliere la seconda cifra e 10 modi distinti di scegliere la terza, pertanto i numeri palindromi di cinque cifre sono $9 \cdot 10^2 = 900$. Un numero è divisibile per 5 se termina per 0 o per 5, se il numero è palindromo esso non può terminare per 0 perché in questo caso anche la prima cifra sarebbe 0 e pertanto per un numero palindro di cinque cifre e divisibile per 5 abbiamo un unico modo distinto di scegliere la prima cifra (il 5), 10 modi distinti di scegliere la seconda cifra e 10 modi distinti di scegliere la terza, in totale $1 \cdot 10^2 = 100$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen\,(2x) + sen^2\,(4x)}{x + 3x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\,(2x) + sen^2\,(4x)}{x(1 + 3x^2)} =$$
$$\lim_{x \to 0} \left(2 \cdot \frac{sen\,(2x)}{2x} + 16x \cdot \frac{sen^2\,(4x)}{(4x)^2} \right) \frac{1}{(1 + 3x^2)} = (2 \cdot 1 + 0 \cdot 1) \cdot 1 = 2;$$
$$\lim_{x \to +\infty} 3^x + 4^{\frac{1}{x}} = 3^{(\to +\infty)} + 4^{(\to 0)} = +\infty.$$

5) $C.E.$: $1 + x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq -1$, verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, $C.E. = \mathbb{R}$.

$y(-x) = \dfrac{e^{(-x)^2}}{1 + (-x)^2} = \dfrac{e^{x^2}}{1 + x^2} = y(x)$, funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché la funzione è un rapporto fra due quantità positive. $y(0) = \frac{e^{0^2}}{1+0^2} = 1$; il punto $(0,1)$ è l'unica intersezione con gli assi.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{1+x^2} = \frac{e^{(\to +\infty)}}{1+(\to +\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata, ma per $x \to +\infty$ il polinomio $1+x^2$ è o-piccolo rispetto a e^{x^2} pertanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{1+x^2} = +\infty$, la funzione non presenta asintoto orizzontale;
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^{x^2}}{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{x+x^3} = +\infty$, dato che anche $x+x^3$ è o-piccolo rispetto a e^{x^2}per $x \to +\infty$, la funzione non presenta asintoto obliquo (i due precedenti limiti sono facilmente risolvibili anche usando il Teorema di de l'Hôpital).
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{e^{x^2} \cdot 2x \cdot (1+x^2) - e^{x^2} \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^3 \cdot e^{x^2}}{(1+x^2)^2}$, $y' \geq 0$, $\forall x \geq 0$. Funzione strettamente cresente in $\mathbb{R}_+$, minimo assoluto della funzione pari a $y(0) = 1$; dato che la funzione non presenta punti di flesso, l'esistenza del minimo assoluto in $x = 0$ insieme alla completa derivabilità della funzione in tutto il suo $C.E.$ implica la convessità della funzione.
Grafico:



6) $\int_0^1 \frac{x^2}{2+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{2+x^3}\,dx = \frac{1}{3} log|2+x^3|\Big|_0^1 = \frac{1}{3} log\, 3 - \frac{1}{3} log\, 2 = \frac{1}{3} log\,(3/2) = log\,\sqrt[3]{3/2}$.

7) La funzione è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi affinché presenti massimo assoluto di coordinate $(1,1)$ devono verificarsi le due condizioni $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$.

$y' = ae^{1-bx} - abxe^{1-bx} = ae^{1-bx}(1-bx)$ e risulta $y(1) = ae^{1-b}$ e $y'(1) = ae^{1-b}(1-b)$; impostiamo il sistema $\begin{cases} ae^{1-b} = 1 \\ ae^{1-b}(1-b) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} ae^{1-b} = 1 \\ 1-b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}.$

8) $f'_x = y - 3z^{-3x} log\, z; \quad f'_y = x - zy^{z-1}; \quad f'_z = -y^z log\, y - 3xz^{-3x-1}.$

Compito $\mathbb{Z}$

1) (*PRIMO METODO*: con la logica)
La proposizione composta $(p\ e\ (r \Rightarrow q))$ è equivalente a $(p\ e\ (\neg r\ o\ q))$; per ipotesi la proposizione composta $p\ e\ q$ è falsa e quindi p e q non possono essere entrambe vere, in particolare se p è vera, q è falsa e dalla falsità di $q \Leftrightarrow r$ si ha che r è vera, da cui la falsità di $\neg r$ ovvero di $(p\ e\ (r \Rightarrow q))$.
(*SECONDO METODO*: con la tavola di verità)

p	q	r	$p\ e\ q$	$q \Leftrightarrow r$	$r \Rightarrow q$	$p\ e\ (r \Rightarrow q)$
V	V	V	V	V		
V	V	F	V	F		
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V		
F	V	V	F	V		
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	V		

Per l'ipotesi $(p\ e\ q)$ e $(q \Leftrightarrow r)$ entrambe false, consideriamo solo la terza, la sesta e la settima riga, come risulta dalle tre righe concludiamo facilmente la falsità della proposizione composta $(p\ e\ (r \Rightarrow q))$.

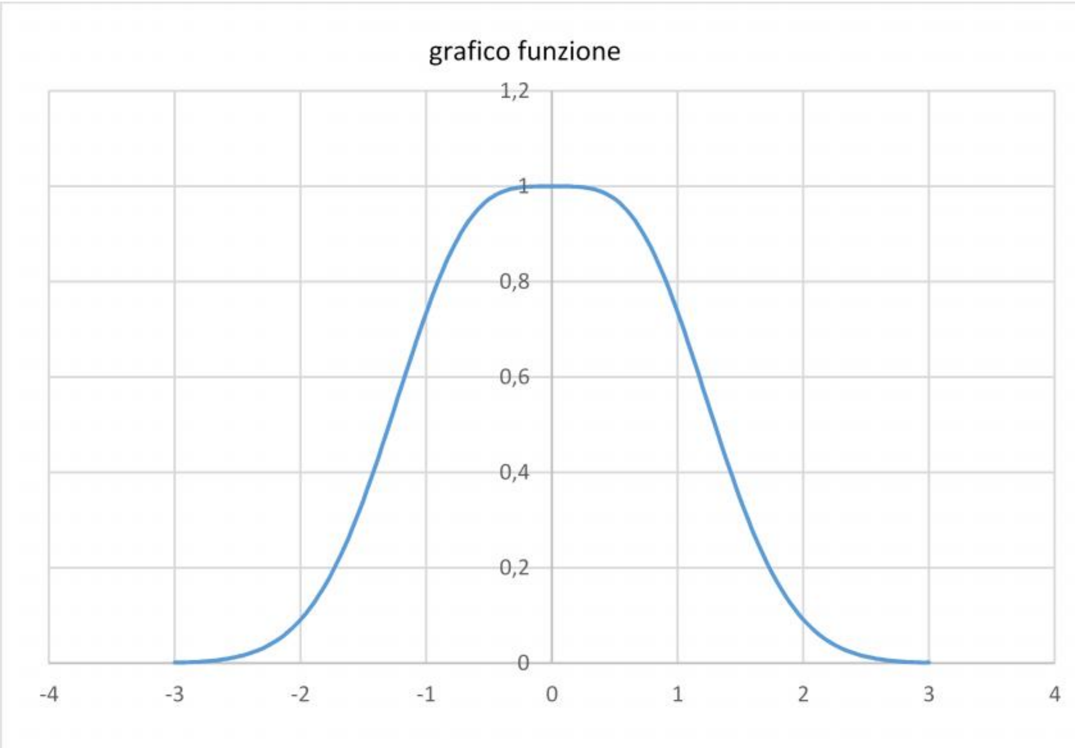
2) Il campo di esistenza della funzione è dato dalle x che soddisfano la condizione $\dfrac{\sqrt{1-log\,x}}{1+log\,x} \geq 0$ che è verificata se $1-log\,x \geq 0$ e $1+log\,x > 0$ ovvero $-1 < log\,x \leq 1$ da cui segue $1/e < x \leq e$.
$A = \{x \in \mathbb{R}\colon 1/e < x \leq e\} =]1/e, e]$; insieme nè aperto nè chiuso.

3) Per un numero palindro di sei cifre abbiamo 9 modi distinti di scegliere la prima cifra, 10 modi distinti di scegliere la seconda cifra e 10 modi distinti di scegliere la terza, pertanto i numeri palindromi di sei cifre sono $9 \cdot 10^2 = 900$. Un numero è divisibile per 5 se termina per 0 o per 5, se il numero è palindromo esso non può terminare per 0 perché in questo caso anche la prima cifra sarebbe 0 e pertanto per un numero palindro di sei cifre e divisibile per 5 abbiamo un unico modo distinto di scegliere la prima cifra (il 5), 10 modi distinti di scegliere la seconda cifra e 10 modi distinti di scegliere la terza, in totale $1 \cdot 10^2 = 100$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(2x) + sen(4x)}{3x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2(2x) + sen(4x)}{x(3+x)} =$$
$$\lim_{x \to 0} \left(4x \cdot \frac{sen^2(2x)}{(2x)^2} + 4 \cdot \frac{sen(4x)}{4x}\right)\frac{1}{(3+x)} = (0 \cdot 1 + 4 \cdot 1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3};$$
$$\lim_{x \to +\infty} 3^{-x} + 5^{\frac{1}{x}} = 3^{(\to -\infty)} + 5^{(\to 0)} = 1.$$

5) $C.E.$: $e^{x^2} \neq 0$, verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ perché un'esponenziale è quantità positiva, $C.E. = \mathbb{R}$.
$y(-x) = \dfrac{1+(-x)^2}{e^{(-x)^2}} = \dfrac{1+x^2}{e^{x^2}} = y(x)$, funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché la funzione è un rapporto fra due quantità positive. $y(0) = \dfrac{1+0^2}{e^{0^2}} = 1$; il punto $(0,1)$ è l'unica intersezione con gli assi.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+x^2}{e^{x^2}} = \dfrac{1+(\to +\infty)}{e^{(\to+\infty)}} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata, ma per $x \to +\infty$ il polinomio $1+x^2$ è o-piccolo rispetto a e^{x^2} pertanto $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{1+x^2} = 0$, la funzione presenta asintoto orizzontale di equazione $y=0$; (il precedenti limite è facilmente risolvibile anche usando il Teorema di de l'Hôpital).
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{2x \cdot e^{x^2} - (1+x^2) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} = -\dfrac{2x^3 \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}$, $y' \leq 0$, $\forall x \geq 0$. Funzione strettamente decresente in $\mathbb{R}_+$, massimo assoluto della funzione pari a $y(0)=1$; dato che la funzione presenta due punti di flesso, l'esistenza del massimo assoluto in $x=0$ insieme alla completa derivabilità della funzione in tutto il suo $C.E.$ implica la concavità della funzione in un intorno dx dell'origine e la convessità nella restante parte dei reali positivi.
Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}log\left|1+x^4\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{4}log\,2 - \frac{1}{4}log\,1 = \frac{1}{4}log\,2 = log\,\sqrt[4]{2}$.

7) La funzione è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi affinché presenti minimo assoluto di coordinate $(1,-1)$ devono verificarsi le due condizioni $y(1) = -1$ e $y'(1) = 0$.
$y' = ae^{1-bx} - abxe^{1-bx} = ae^{1-bx}(1-bx)$ e risulta $y(1) = ae^{1-b}$ e $y'(1) = ae^{1-b}(1-b)$; impostiamo il sistema $\begin{cases} ae^{1-b} = -1 \\ ae^{1-b}(1-b) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} ae^{1-b} = -1 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}.$$

8) $$f'_x = yzx^{yz-1} - z^{-x} log\, z; \qquad f'_y = zx^{yz} log\, x - 3y^2;$$

$$f'_z = yx^{yz} log\, x - xz^{-x-1}.$$

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 15-16)

23 settembre 2016

Compito Unico

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 10\} = [0,10]$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 4 < x < 7\} =]4,7[$,
$C = \{x \in \mathbb{R}: 7 \leq x < 12\} = [7,12[$; nota che $B \cap C = \emptyset$ e $B \subset A \subset A \cup C$ quindi $\mathcal{C}(A \cup C) \subset \mathcal{C}(B)$. $A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A = [0,10]$, $A \cap \mathcal{C}(B \cup C) = [0,10] \cap \mathcal{C}(]4,12[) = [0,4]$, $\mathcal{C}(A \cup C) \cap \mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A \cup C) \cap \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \cup C) = \mathcal{C}([0,12[) =]-\infty, 0[\cup [12, +\infty[$, $\mathcal{C}(C \cup \mathcal{C}(A \cap C)) = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \emptyset$.

2) $CE_f = \{x \in \mathbb{R}: 1 + e^{-2x^2} \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: e^{-2x^2} \geq -1\} = \mathbb{R}$,
$CE_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -1 \vee x \geq 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

$f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \sqrt{1 + e^{-2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}} = \sqrt{1 + e^{2(1-x^2)}}$,

$g(f(x)) = g\left(\sqrt{1 - e^{-2x^2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{1 + e^{-2x^2}}\right)^2 - 1} = \sqrt{e^{-2x^2}} = e^{-x^2}$.

3) $\forall n \geq 1$, $\binom{n}{1} = n$, quindi $n = 4$; sviluppando i coefficienti binomiali con il triangolo di Tartaglia otteniamo $\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1$, $\binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4$ e $\binom{4}{2} = 6$, da cui segue $k = 2$. In modo alternativo abbiamo $\binom{4}{k} = \frac{4!}{k! \cdot (4-k)!} = \frac{24}{k! \cdot (4-k)!}$, posto $\frac{24}{k! \cdot (4-k)!} = 6$ si ottiene $k! \cdot (4-k)! = 4$ che per simmetria è verificata se $k! = 4$ e $(4-k)! = 1$ oppure $k! = (4-k)! = 2$, ma fattorali di valore 4 non esistono quindi l'unica soluzione possibile si ottiene per $k! = (4-k)! = 2$ ovvero $k = 2$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x + sen\,x} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{x+sen\,x}-1}{x+sen\,x}}{\frac{e^x-1}{x}} \cdot \frac{x + sen\,x}{x} = \frac{1}{1} \cdot 2 = 2$;

per $x \to -\infty$, e^x e $sen\,x$ sono o-piccoli di x^2 che a sua volta è o-piccolo di e^{-x} ne deriva che $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + x^2 + sen\,x}{e^{-x} - x^2 - sen\,x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = 0$.

5) $C.E. = \mathbb{R}$.

$y(-x) = -x \cdot e^{1 - \frac{(-x)^2}{2}} = -x \cdot e^{1 - \frac{x^2}{2}} = -y(x)$, funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi), la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria. Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x > 0$ perché la funzione è un prodotto fra due quantità positive. $y(0) = 0 \cdot e^{1 - \frac{0^2}{2}} = 0$; il punto O è l'unica intersezione con gli assi.

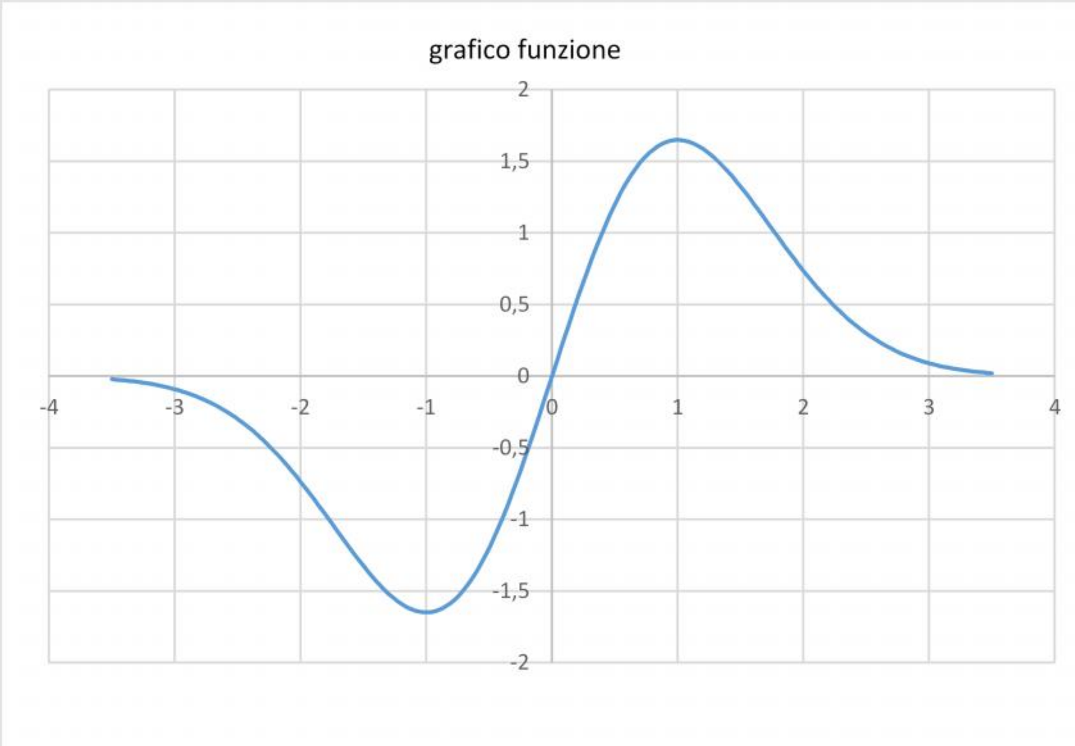
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^{1 - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2} - 1}} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)} = 0$, in quanto per $x \to +\infty$ $x = o\left(e^{\frac{x^2}{2} - 1}\right)$, la funzione presenta asintoto orizzontale di equazione $y = 0$. (Il limite è facilmente risolvibile anche applicando il Teorema di de l'Hôpital.)

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{1-\frac{x^2}{2}} + x \cdot e^{1-\frac{x^2}{2}}(-x) = \left(1-x^2\right)e^{1-\frac{x^2}{2}}$, $y' \geq 0$, se $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$. Funzione strettamente cresente in $[0, 1]$, strettamente decrescente in $[1, +\infty[$, massimo assoluto della funzione pari a $y(1) = \sqrt{e}$.

Concavità e convessità: $y'' = -2x \cdot e^{1-\frac{x^2}{2}} + \left(1-x^2\right)e^{1-\frac{x^2}{2}}(-x) = -x(3-x^2)e^{1-\frac{x^2}{2}}$, $y'' > 0$, se $3 - x^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq 3 \Rightarrow x \geq \sqrt{3}$. Funzione strettamente concava in $[0, \sqrt{3}]$, strettamente convessa in $[\sqrt{3}, +\infty[$, punto di flesso di coordinate $F = \left(\sqrt{3}, y\left(\sqrt{3}\right)\right) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3/e}\right)$; inoltre per la disparità della funzione anche l'origine O è un punto di flesso.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^{\pi} (sen\, x \cdot e^{-cos\, x})\, dx = \int_0^{\pi} e^{-cos\, x}\, d(-cos\, x) = e^{-cos\, x}\Big|_0^{\pi} =$

$e^{-cos\,\pi} - e^{-cos\, 0} = e - e^{-1} = e - \dfrac{1}{e}$.

7) Tramite la formula del differenziale il valore di una funzione nel punto incrementato $x_0 + h$ può essere approssimato da $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$. Nel caso specifico posto $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$ e $h = 0.5$ si ha $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ con $f(27) = \sqrt[3]{27} = 3$ e $f'(27) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \dfrac{1}{27}$, ed otteniamo

$\sqrt[3]{27.5} \approx 3 + \dfrac{1}{27} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{163}{54} = 3{,}0\overline{185}$.

8) $f'_x = -sen(xz) \cdot z - y^2 \cdot z^{xy^2} \cdot log\, z$; $\quad f'_y = -2xy \cdot z^{xy^2} \cdot log\, z$;

$$f'_z = -sen(xz) \cdot x - xy^2 \cdot z^{xy^2-1}.$$

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 15-16)
8 ottobre 2016
Compito Unico

1) (*PRIMO METODO*: con la logica)
Se le proposizioni composte $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ non possono essere entrambe vere o entrambe false, le proposizioni semplici p e q sono una vera e una falsa, quindi la proposizione $p \wedge q$ è falsa mentre la $p \vee q$ è vera e da ciò la falsità di $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$.
(*SECONDO METODO*: con la tavola di verità)

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V			
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V			

Per l'ipotesi $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow p$ non possono essere entrambe vere o entrambe false, consideriamo solo la seconda e la terza riga, come risulta dalle due righe concludiamo facilmente la falsità della proposizione composta $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{e} < x < e\} = [0, e[$ insieme nè aperto nè chiuso, $\mathcal{D}(A) = [0, e]$, $\delta(A) = \{0, e\}$.

3) Disponendo solo delle cifre 1, 2, 3, 4 e 5, per un numero di quattro cifre abbiamo 5 modi distinti di scelta per la prima cifra, 5 modi per la seconda e così via, i numeri possibili sono quindi $5^4 = 625$; se si richiede invece che le quattro cifre siano distinte abbiamo 5 modi distinti di scelta per la prima cifra, 4 modi per la seconda e così via, i numeri possibili sono quindi $5! = 120$; infine per un numero pari di cifre tutte distinte abbiamo 2 modi distinti di scelta per l'ultima cifra, 4 modi per la prima, 3 modi per la seconda e così via, i numeri possibili sono quindi $2 \cdot 4! = 48$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^{sen\,x - x^2} - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{e^{sen\,x - x^2} - 1}{sen\,x - x^2}} \cdot \frac{x}{sen\,x - x^2} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x}}{\frac{e^{sen\,x - x^2} - 1}{sen\,x - x^2}} \cdot \frac{1}{\frac{sen\,x}{x} - x} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1 - 0} = 1;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} = (\to e^2)^{(\to 0)} = 1.$$

5) $C.E.$: $\frac{1 + x^2}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$; $C.E. = \mathbb{R}_{++} =]0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $log\left(\frac{1 + x^2}{x}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1 + x^2}{x} > 1 \Rightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x} > 0$, vera $\forall x > 0$ perché il Δ del numeratore è negativo. La funzione non presenta intersezioni con gli assi.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0} log\left(\frac{1+x^2}{x}\right) = log\left(\frac{\to 1}{\to 0^+}\right) = log(\to +\infty) = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$;

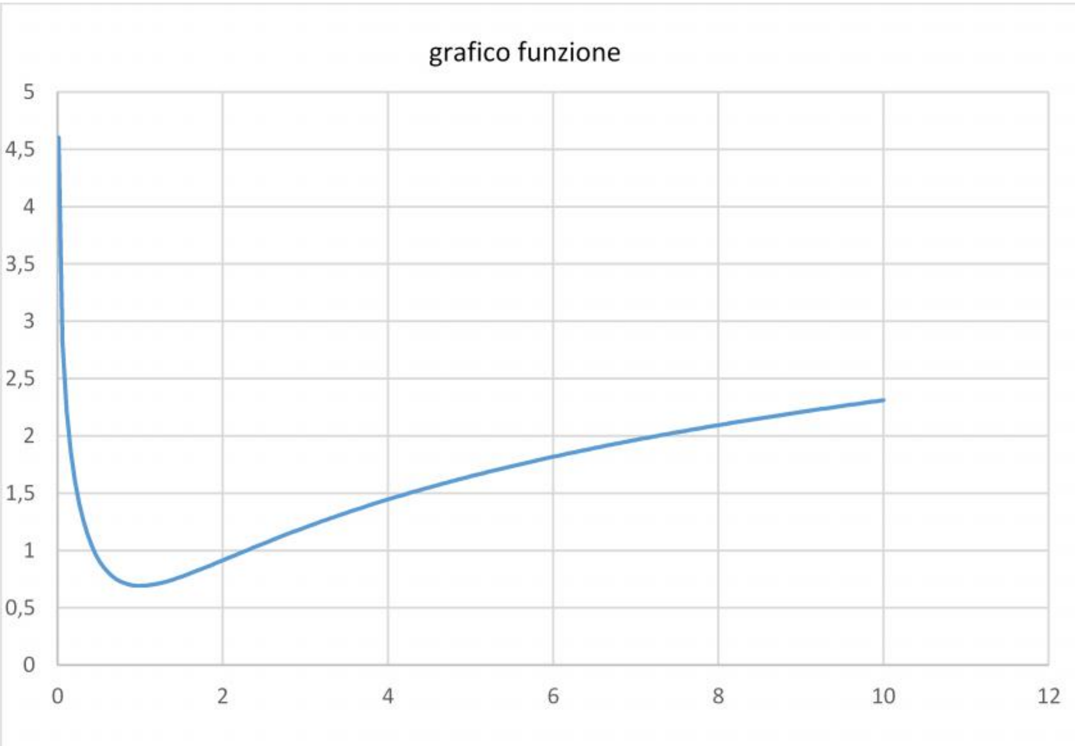
$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{1+x^2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{1}{x} + x\right) = log(\to +\infty) = +\infty$, la funzione non presenta asintoti orizzontali;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{log\left(\frac{1+x^2}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{log(1+x^2) - log(x)}{x} = 0$, in quanto sia $log(1+x^2)$ che $log(x)$ sono $o(x)$ per $x \to +\infty$, la funzione non presenta asintoti obliqui.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1+x^2}{\cancel{x}}} \cdot \frac{2x \cdot x - (1+x^2) \cdot 1}{x^{\cancel{2}}} = \frac{x^2-1}{x(1+x^2)}$, dato che nel $C.E.\ x > 0$, $y' \geq 0$, se $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$. Funzione strettamente decresente in $]0, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty[$, minimo assoluto della funzione pari a $y(1) = log\,2$.

Concavità e convessità: l'esistenza di un unico flesso di ascissa $x = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ insieme a quella del minimo in $x = 1$ porta a concludere che la funzione è convessa nell'intervallo $]0, \sqrt{2+\sqrt{5}}]$, concava in $[\sqrt{2+\sqrt{5}}, +\infty[$, flesso nel punto $F\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}, log\left(\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{2+\sqrt{5}}\right)\right)$.

Grafico:



6) Se deriviamo la funzione di equazione $y = \sqrt{1+x^2}$ otteniamo

$\frac{d\sqrt{1+x^2}}{dx} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}$ da cui segue $\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx =$

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} d\sqrt{1+x^2} \; = \; \sqrt{1+x^2}\Big|_0^{\sqrt{e-1}} \; = \sqrt{e}-1.$$

7) Data la funzione di equazione $y = f(x)$, l'equazione della sua retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Nel caso specifico $f(0) = 0$, $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ con $f'(0) = 1$, pertanto l'equazione richiesta è $y = x$.

8) Il piano tangente alla superficie nel punto $O = (0, 0)$ ha equazione $z - z(O) = (\nabla z(O))^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $z(O) = 0 + cos\, 0 = 1$, $\nabla z = (1 - 3y \cdot sen(3xy),\, -3x \cdot sen(3xy))$ e $\nabla z(O) = (1, 0)$.

L'equazione del piano tangente richiesta è $z - 0 = (\,1 \quad 0\,) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ equivalente a $z = x$ che può essere riscritta come $x - z = 0$.