Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 16-17)

12 novembre 2016

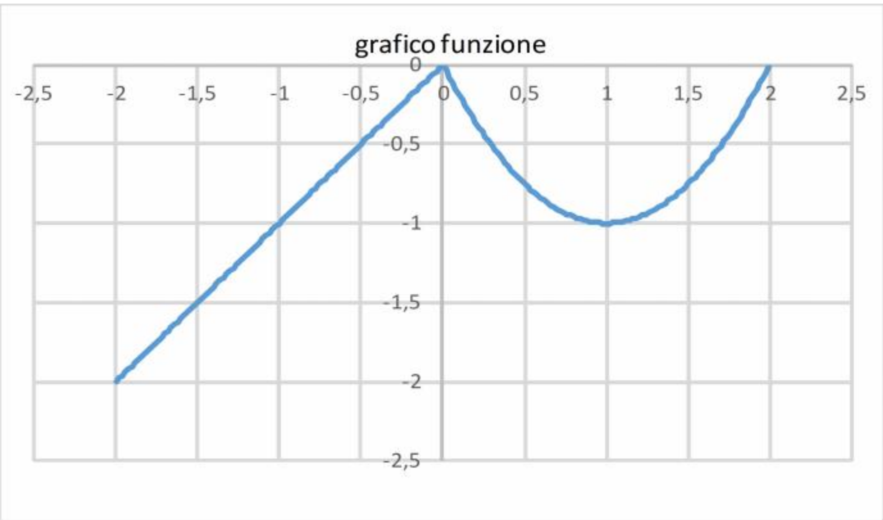
Compito A1

1)

p	q	r	$p\vee r$	$q\Leftrightarrow(p\vee r)$	$p\Rightarrow r$	$\neg(q\Leftrightarrow(p\vee r))$	$(p\Rightarrow r)\Rightarrow\neg(q\Leftrightarrow(p\vee r))$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	F	F

2) L'espressione $(n!)^2+4\,n!-12$ è equivalente a $(n!-2)\cdot(n!+6)$ quindi $(n!)^2+4\,n!-12=0$ sse $(n!-2)\cdot(n!+6)=0$ ovvero $n!=2\vee n!=-6$, ma $n!$ non può essere un numero negativo e di conseguenza l'unica soluzione accettabile è $n!=2\Rightarrow n=2$.

3)



$f([-2,0])=[-2,0]$, $f^{-1}([-1,0])=[-1,2]$.

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{arcsen(3\,x)}-1}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{arcsen(3\,x)}-1}{arcsen(3\,x)}\cdot\frac{arcsen(3\,x)}{3\,x}\cdot\frac{3}{x+1}=1\cdot 1\cdot 3=3;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{logx^2}\right)^{log\,x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2\,logx}\right)^{log\,x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1/2}{logx}\right)^{log\,x}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

5) $\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{3}=\frac{1}{3}$. Verifica: $\forall\epsilon>0$ si ha $\left|\frac{2x-1}{3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2}{3}(x-1)\right|=\frac{2}{3}|x-1|$, posto $\frac{2}{3}|x-1|<\epsilon$ risulta $|x-1|<\frac{3}{2}\,\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon=\frac{3}{2}\,\epsilon$, limite verificato.

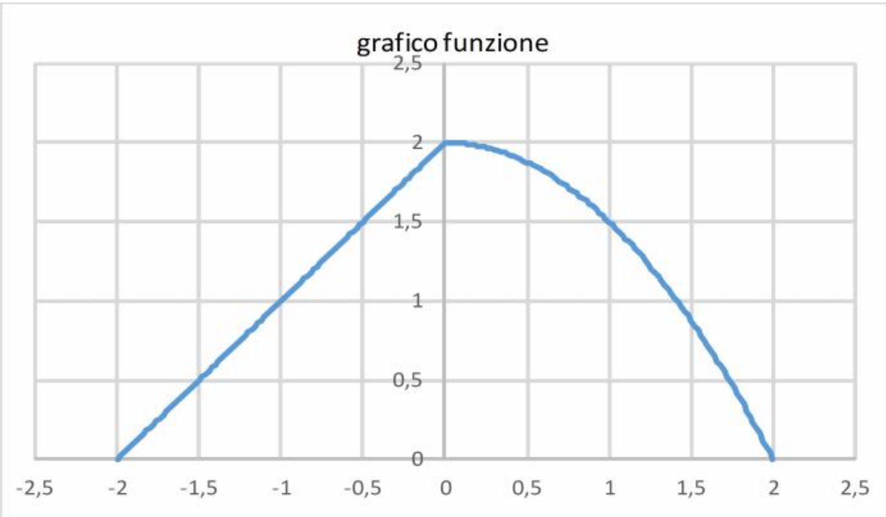
Compito $\mathbb{A}2$

1)

p	q	r	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \Leftrightarrow r$	$r \Rightarrow \neg(p \vee q)$	$(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg(p \vee q))$
V	V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

2) L'espressione $(n!)^2 - 4\,n! + 4$ è equivalente a $(n! - 2)^2$ quindi $(n!)^2 - 4\,n! + 4 = 0$ sse $(n! - 2)^2 = 0$ ovvero $n! = 2 \Rightarrow n = 2$.

3)



$f([0,1]) = [3/2, 2]$, $f^{-1}([3/2,2]) = [-1/2, 1]$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x^3 + arcsen\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-3x} - 1}{-3x} \cdot \frac{-3}{x^2 + \frac{arcsen\, x}{x}} = 1 \cdot (-3) = -3;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{logx}\right)^{log\, x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{logx}\right)^{2\, log\, x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{logx}\right)^{log\, x}\right)^2 = e^2.$$

5) $\lim_{x \to 3} \frac{3 - 5x}{4} = -3$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{3-5x}{4} + 3\right| = \left|\frac{5}{4}(3 - x)\right| = \frac{5}{4}|x - 3|$, posto $\frac{5}{4}|x - 3| < \epsilon$ risulta $|x - 3| < \frac{4}{5}\,\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{4}{5}\,\epsilon$, limite verificato.

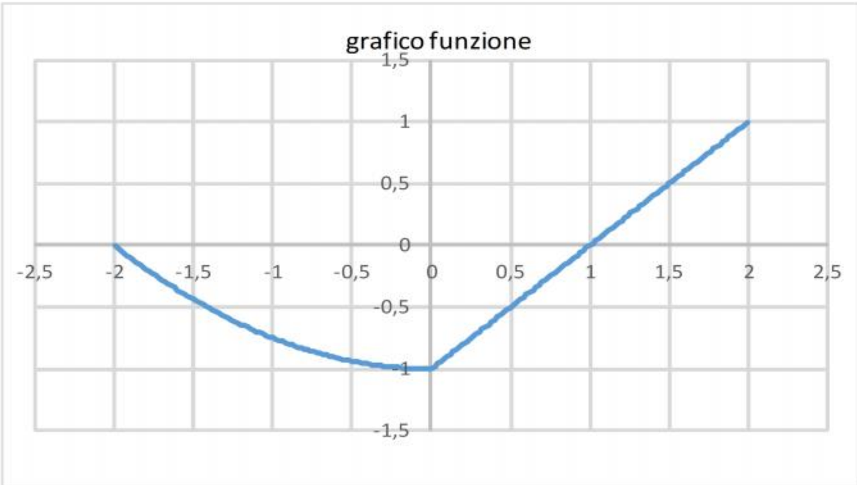
Compito $\mathbb{A}3$

1)

p	q	r	$p\wedge r$	$\neg(p\wedge r)$	$p\Leftrightarrow r$	$q\Rightarrow\neg(p\wedge r)$	$(p\Leftrightarrow r)\Rightarrow(q\Rightarrow\neg(p\wedge r))$
V	V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

2) L'espressione $(n!)^2-12\,n!+36$ è equivalente a $(n!-6)^2$ quindi $(n!)^2-12\,n!+36=0$ sse $(n!-6)^2=0$ ovvero $n!=6\Rightarrow n=3$.

3)



$f([0,2])=[-1,1]$, $f^{-1}([-1,0])=[-2,1]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg(-x)}-1}{x^3+2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tg(-x)}-1}{tg(-x)}\cdot\dfrac{tg(-x)}{-x}\cdot\dfrac{-1}{x^2+2}=1\cdot 1\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3^{1+x}}\right)^{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3\cdot 3^x}\right)^{3^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1/3}{3^x}\right)^{3^x}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}.$

5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5-x}{8}=\dfrac{3}{4}$. Verifica: $\forall\epsilon>0$ si ha $\left|\dfrac{5-x}{8}-\dfrac{3}{4}\right|=\left|-\dfrac{1}{8}(x+1)\right|=\dfrac{1}{8}|x+1|$, posto $\dfrac{1}{8}|x+1|<\epsilon$ risulta $|x+1|<8\,\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon=8\,\epsilon$, limite verificato.

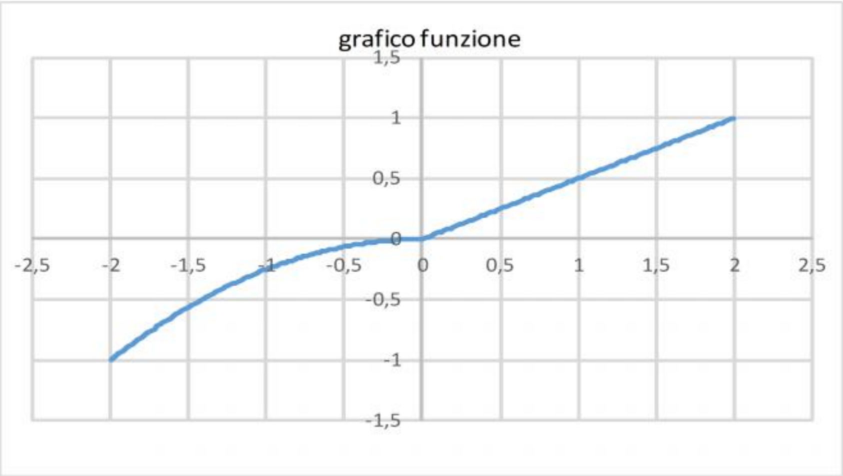
Compito $\mathbb{A}4$

1)

p	q	r	$p \wedge r$	$\neg r$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge r) \Rightarrow \neg r$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow ((p \wedge r) \Rightarrow \neg r)$
V	V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

2) L'espressione $(n!)^2 - 22\,n! - 48$ è equivalente a $(n! - 24) \cdot (n! + 2)$ quindi $(n!)^2 - 22\ n! - 48 = 0$ sse $(n! - 24) \cdot (n! + 2) = 0$ ovvero $n! = 24 \vee n! = -2$, ma $n!$ non può essere un numero negativo e di conseguenza l'unica soluzione accettabile è $n! = 24 \Rightarrow n = 4$.

3)



$f([-2,0]) = [-1,0]$, $f^{-1}([0,1]) = [0,2]$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{arctg(-4x)} - 1}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{arctg(-4x)} - 1}{arctg(-4x)} \cdot \dfrac{arctg(-4x)}{-4x} \cdot \dfrac{-4}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\dfrac{4}{5}\right) = -\dfrac{4}{5}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4^{x-1}}\right)^{4^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{4}{4^x}\right)^{4^x} = e^4$.

5) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{1-2x}{4} = \dfrac{7}{4}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\dfrac{1-2x}{4} - \dfrac{7}{4}\right| = \left|-\dfrac{1}{2}(x+3)\right| = \dfrac{1}{2}|x+3|$, posto $\dfrac{1}{2}|x+3| < \epsilon$ risulta $|x+3| < 2\,\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = 2\,\epsilon$, limite verificato.

Compito B1

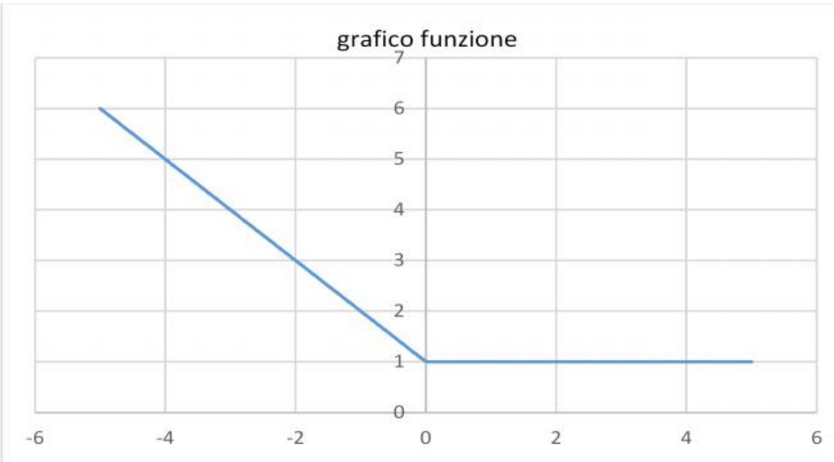
1)

A	B	C	$\mathcal{C}(A)\cap B$	$\mathcal{C}(A)\cap B\subseteq C$	$B\cap C$	$B\cap C\subseteq A$	$\mathcal{C}(A)\cap B$	$B\cap C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	$\in$	V	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	V	$\in$	F		
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	F				
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$

Per le due ipotesi poste $\mathcal{C}(A)\cap B\subseteq C$ e $B\cap C\subseteq A$ consideriamo solo le righe dove entrambe sono vere, come è facile verificare dalle ultime due colonne solo l'insieme $\mathcal{C}(A)\cap B$ è sicuramente vuoto.

2) La condizione $\dfrac{(n!)!}{(2n)!}=1$ può essere riscritta come $(n!)!=(2n)!$ ed i due fattoriali sono uguali se $(n!=0\wedge 2n=1)\vee(n!=1\wedge 2n=0)\vee(n!=2n)$ sulla prima condizione abbiamo che $n!$ non è mai uguale a 0 e pertanto è impossibile, la seconda è verificata solo per $n=0$, infine per la terza ricordando che $n!=n(n-1)!$ si ha $(n-1)!=2$ ovvero $n-1=2$ da cui $n=3$; concludendo la condizione è verificata se $n=0\vee n=3$.

3)



$f(\mathbb{R}_+)=\{1\}$, $f^{-1}([0,1])=\mathbb{R}_+$.

4) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+3\,sen\,x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+3\,sen\,x)^{\frac{1}{sen\,x}}\right)^{\frac{sen\,x}{x}} = (e^3)^1 = e^3$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x^3+x^5)}{2x^3-x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x^3+x^5)}{x^3+x^5}\cdot\frac{\cancel{x^3}(1+x^2)}{\cancel{x^3}(2-x)} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

5) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{2+x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}+1 = 1$. Verifica: $\forall\epsilon>0$ si ha $\left|\dfrac{2}{x^2}+1-1\right|=\dfrac{2}{x^2}$, posto $\dfrac{2}{x^2}<\epsilon$ risulta $x^2>\dfrac{2}{\epsilon}$, vera se $x<-\sqrt{\dfrac{2}{\epsilon}}\vee x>\sqrt{\dfrac{2}{\epsilon}}$ da cui $\delta_\epsilon=\sqrt{\dfrac{2}{\epsilon}}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{B}2$

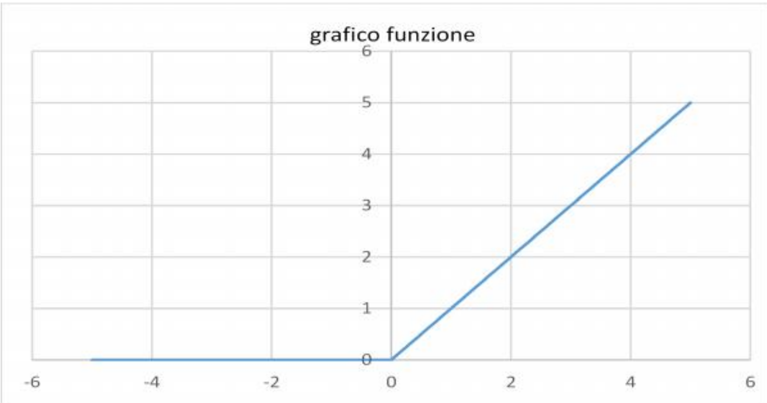
1)

A	B	C	$A\cap\mathcal{C}(B)$	$A\cap\mathcal{C}(B)\subseteq C$	$\mathcal{C}(B)\cap C$	$\mathcal{C}(B)\cap C\subseteq\mathcal{C}(A)$	$A\cap\mathcal{C}(B)$	$\mathcal{C}(B)\cap C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	V	$\in$	F		
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	F				
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	V	$\in$	V	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$

Per le due ipotesi poste $A\cap\mathcal{C}(B)\subseteq C$ e $\mathcal{C}(B)\cap C\subseteq\mathcal{C}(A)$ consideriamo solo le righe dove entrambe sono vere, come è facile verificare dalle ultime due colonne solo l'insieme $A\cap\mathcal{C}(B)$ è sicuramente vuoto.

2) La condizione $\dfrac{(2\cdot n!)!}{(2n)!}=1$ può essere riscritta come $(2\cdot n!)!=(2n)!$ ed i due fattoriali sono uguali se $(2\cdot n!=0\wedge 2n=1)\vee(2\cdot n!=1\wedge 2n=0)\vee(2\cdot n!=2n)$ sulla prima condizione abbiamo che $2\cdot n!$ non è mai uguale a 0 e pertanto è impossibile, la seconda è verificata se $n=0$ ma in questo caso $2\cdot n!\neq 1$, infine per la terza ricordando che $n!=n(n-1)!$ si ha $(n-1)!=1$ ovvero $n-1=0\vee n-1=1$ da cui $n=1\vee n=2$.

3)



$f(\mathbb{R}_-)=\{0\}$, $f^{-1}([0,1])=\,]-\infty,1]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{arctg\,x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1-4x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{x}{arctg\,x}}=\left(e^{-4}\right)^{1}=e^{-4}$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x^3-x^4)}{x^3-x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(2x^3-x^4)}{2x^3-x^4}\cdot\frac{\cancel{x^3}(2-x)}{\cancel{x^3}(1-x^2)}=1\cdot 2=2.$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Verifica: $\forall\epsilon>0$ si ha $\left|\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2x^2}$, posto $\dfrac{1}{2x^2}<\epsilon$ risulta $x^2>\dfrac{1}{2\epsilon}$, vera se $x<-\sqrt{\dfrac{1}{2\epsilon}}\vee x>\sqrt{\dfrac{1}{2\epsilon}}$ da cui $\delta_\epsilon=\sqrt{\dfrac{1}{2\epsilon}}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{B}$3

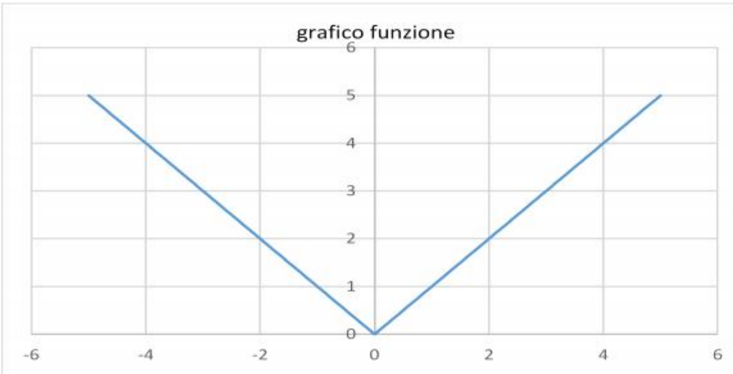
1)

A	B	C	$A\cap B$	$\mathcal{C}(C)\subseteq(A\cap B)$	$B\cap C$	$B\cap C\subseteq A$	$B\cap C$	$\mathcal{C}(A)\cap B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	V	$\in$	V	$\in$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	F				
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	$\in$	F		
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	F				
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	F				

Per le due ipotesi poste $\mathcal{C}(C)\subseteq(A\cap B)$ e $B\cap C\subseteq A$ consideriamo solo le righe dove entrambe sono vere, come è facile verificare dalle ultime due colonne solo l'insieme $\mathcal{C}(A)\cap B$ è sicuramente vuoto.

2) La condizione $\dfrac{(n!)!}{(6n)!}=1$ può essere riscritta come $(n!)!=(6n)!$ ed i due fattoriali sono uguali se $(n!=0\wedge 6n=1)\vee(n!=1\wedge 6n=0)\vee(n!=6n)$ sulla prima condizione abbiamo che $n!$ non è mai uguale a 0 e pertanto è impossibile, la seconda è verificata solo per $n=0$, infine per la terza ricordando che $n!=n(n-1)!$ si ha $(n-1)!=6$ ovvero $n-1=3$ da cui $n=4$; concludendo la condizione è verificata se $n=0\vee n=4$.

3)



$f(\mathbb{R}_-)=\mathbb{R}_+$, $f^{-1}([-1,0])=\{0\}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^3=(e)^3=e^3$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x^2-3\,x^5)}{4x^2-x^8}=\lim_{x\to 0}\frac{tg(x^2-3\,x^5)}{x^2-3\,x^5}\cdot\frac{\cancel{x^2}(1-3x^3)}{\cancel{x^2}(4-x^6)}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\,.$$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}-1=-1$. Verifica: $\forall\epsilon>0$ si ha $\left|\dfrac{3}{x^2}-1+1\right|=\dfrac{3}{x^2}$, posto $\dfrac{3}{x^2}<\epsilon$ risulta $x^2>\dfrac{3}{\epsilon}$, vera se $x<-\sqrt{\dfrac{3}{\epsilon}}\vee x>\sqrt{\dfrac{3}{\epsilon}}$ da cui $\delta_\epsilon=\sqrt{\dfrac{3}{\epsilon}}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{B}4$

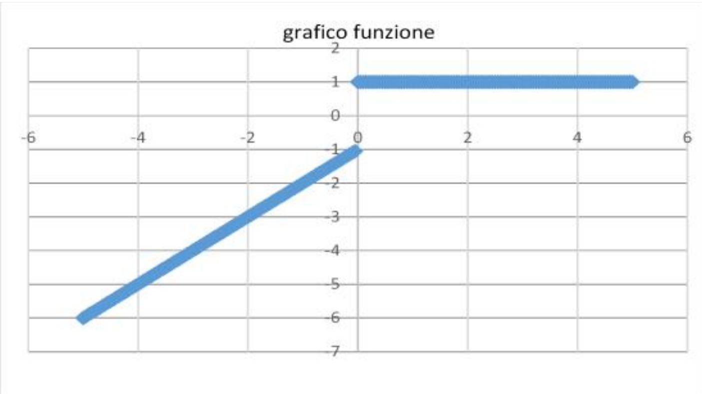
1)

A	B	C	$\mathcal{C}(A\cap B)$	$\mathcal{C}(A\cap B)\subseteq C$	$A\cap C$	$A\cap C\subseteq B$	$B\cap C$	$\mathcal{C}(B)\cap A$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	$\in$	V	$\in$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	V	$\in$	F		
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	F				
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	V	$\notin$	V	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	F				
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	V	$\notin$	V	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	F				

Per le due ipotesi poste $\mathcal{C}(A\cap B)\subseteq C$ e $A\cap C\subseteq B$ consideriamo solo le righe dove entrambe sono vere, come è facile verificare dalle ultime due colonne solo l'insieme $\mathcal{C}(B)\cap A$ è sicuramente vuoto.

2) La condizione $\dfrac{(4\cdot n!)!}{(4n)!}=1$ può essere riscritta come $(4\cdot n!)!=(4n)!$ ed i due fattoriali sono uguali se $(4\cdot n!=0\wedge 4n=1)\vee(4\cdot n!=1\wedge 4n=0)\vee(4\cdot n!=4n)$ sulla prima condizione abbiamo che $4\cdot n!$ non è mai uguale a 0 e pertanto è impossibile, la seconda è verificata se $n=0$ ma in questo caso $4\cdot n!\neq 1$, infine per la terza ricordando che $n!=n(n-1)!$ si ha $(n-1)!=1$ ovvero $n-1=0\vee n-1=1$ da cui $n=1\vee n=2$.

3)



$f(\mathbb{R}_+)=\{1\}$, $f^{-1}([-1,0])=\emptyset$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\,tgx)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+3\,tgx)^{\frac{1}{tgx}}\right)^{\frac{tgx}{x}}=(e^3)^1=e^3$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x-x^5)}{6(x-x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x-x^5)}{x-x^5}\cdot\frac{\cancel{x}(1-x^4)}{6\cancel{x}(1-x)}=1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6-2\,x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x^2}-2=-2$. Verifica: $\forall\epsilon>0$ si ha $\left|\dfrac{6}{x^2}-2+2\right|=\dfrac{6}{x^2}$, posto $\dfrac{6}{x^2}<\epsilon$ risulta $x^2>\dfrac{6}{\epsilon}$, vera se $x<-\sqrt{\dfrac{6}{\epsilon}}\vee x>\sqrt{\dfrac{6}{\epsilon}}$ da cui $\delta_\epsilon=\sqrt{\dfrac{6}{\epsilon}}$, limite verificato.

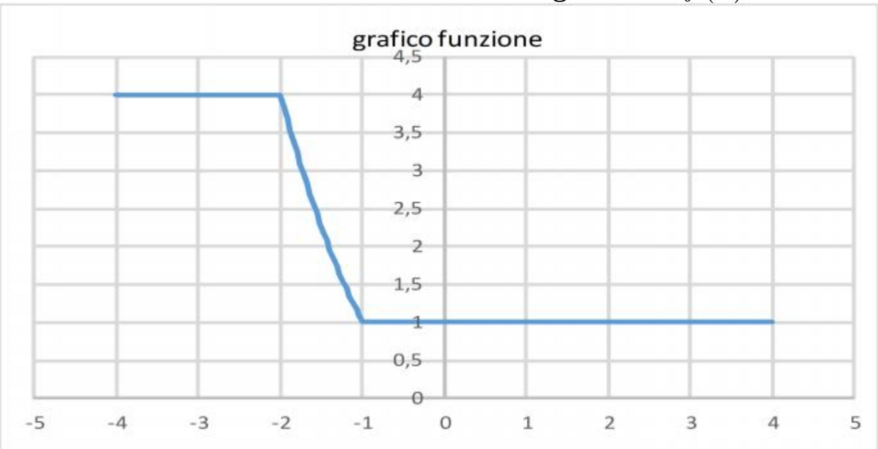
Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 16-17)
9 gennaio 2017
Compito $\mathbb{W}$

1) Per la formula del binomio di Newton $p(x) = \left(1 + x^3\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{3k}$, per il termine di grado 21 si deve determinare un intero k tale per cui $3k = 21$ ovvero $k = 7$ e quindi $c_{21} = \binom{20}{7}$, per il termine di grado 34 notiamo che non esistono interi k tale per cui $3k = 34$ e quindi $c_{34} = 0$.

2) Il campo di esistenza della funzione si ottiene risolvendo il sistema:
$$\begin{cases} 6 - x - x^2 > 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ x^2 \neq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) < 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 2.$$
$C.E. =]-3, 2[$. Per gli eventuali asintoti calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del $C.E.$: $\lim_{x \to -3^+} \frac{log(6 - x - x^2)}{x^2 - 9} = \frac{(\to -\infty)}{(\to 0^-)} = +\infty$; $\lim_{x \to 2^-} \frac{log(6 - x - x^2)}{x^2 - 9} = \frac{(\to -\infty)}{(\to -5)} = +\infty$. La funzione presenta due asintoti verticali di equazioni: $x = -3$ e $x = 2$.

3) Per $-2 < x < 0$ l'espressione $Max\{1, x^2\} = \begin{cases} x^2 & \text{se } -2 < x < -1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$, pertanto $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 4$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$ e la funzione è continua sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 4$ e $b = 1$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $\lim_{x \to 0} (1 - 3\,tg\,x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \to 0} \left((1 - 3\,tg\,x)^{\frac{1}{tg\,x}} \right)^{\frac{2\,tg\,x}{x}} = (\to e^{-3})^{(\to 2)} = e^{-6}$;
$\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x} \right) = 3$; Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left| 3 + \frac{1}{x} - 3 \right| = \left| \frac{1}{x} \right|$, posto $\left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$ risulta $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, vera se $x > \frac{1}{\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{2(-x) - 2(-x)^2} = e^{-2x - 2x^2}$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0, 1)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x-2x^2} = e^{(\to -\infty)} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x-2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x(1-x)} = e^{(\to +\infty)\cdot(\to -\infty)} = 0$; asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = (2-4x)e^{2x-2x^2}$.

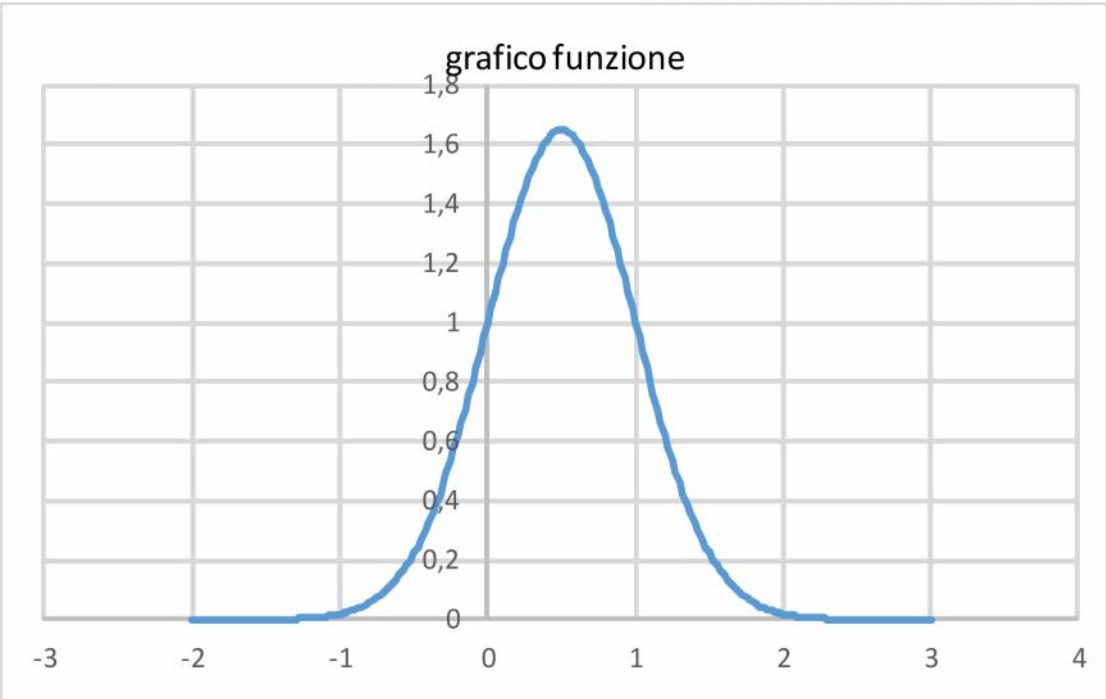
$y' > 0 \Rightarrow 2-4x > 0 \Rightarrow x < 1/2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 1/2[$, strettamente decrescente in $]1/2, +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $\left(1/2, \sqrt{e}\right)$.

Concavità e convessità:

$y'' = -4e^{2x-2x^2} + (2-4x)^2 e^{2x-2x^2} = \left(16x^2 - 16x\right)e^{2x-2x^2}$.

$y'' > 0 \Rightarrow 16x^2 - 16x > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 1$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0[\, \cup\,]1, +\infty[$, strettamente concava in $]0, 1[$, punti di flesso di coordinate $(0, 1)$ e $(1, 1)$.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} log(2x)\, dx = \left[x \cdot log(2x) - \int x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\, dx\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left[x \cdot log(2x) - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$

$\displaystyle(\log 2 - 1) - \left(\frac{1}{2} \cdot \log 1 - \frac{1}{2}\right) = \log 2 - \frac{1}{2}$.

7) $\displaystyle y' = \frac{e^{x^3 - sen\, x}(3x^2 - cos\, x)(tg\, x - logx) - e^{x^3 - sen\, x}\left(\frac{1}{cos^2 x} - \frac{1}{x}\right)}{(tg\, x - logx)^2}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ t+1 \end{pmatrix}$.

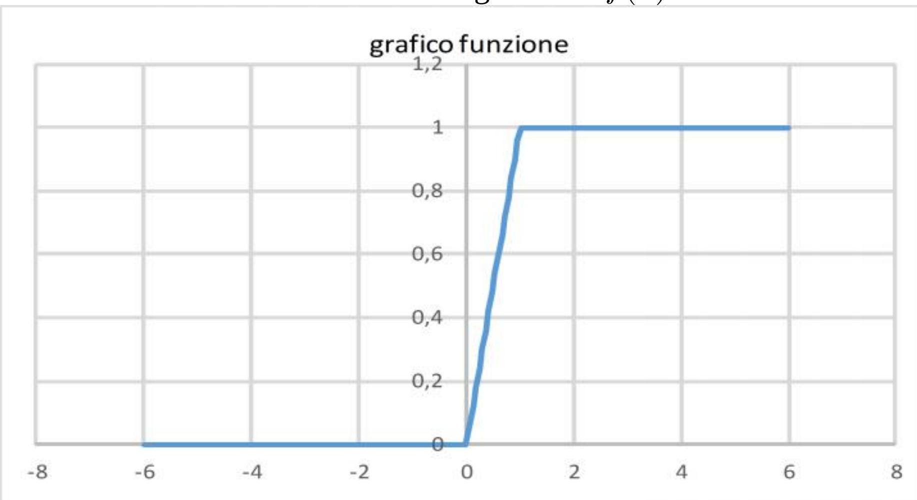
$z(P) = 1$, $\nabla z = (y^2t^2 - 2xt, 2xyt^2, 2xy^2t - x^2)$, $\nabla z(P) = (2, 0, -1)$. Equazione del piano tangente: $z - 1 = 2(x-1) - (t+1)$, oppure $2x - t - z = 2$.

Compito $\mathbb{X}$

1) Per la formula del binomio di Newton $p(x) = \left(1+x^2\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30}\binom{30}{k}x^{2k}$, per il termine di grado 34 si deve determinare un intero k tale per cui $2k = 34$ ovvero $k = 17$ e quindi $c_{34} = \binom{30}{17}$, per il termine di grado 21 notiamo che non esistono interi k tale per cui $2k = 21$ e quindi $c_{21} = 0$.

2) Il campo di esistenza della funzione si ottiene risolvendo il sistema:
$\begin{cases} 2+x-x^2>0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2<0 \\ x^2\neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)<0 \\ x\neq \pm 2 \end{cases} \Rightarrow -1<x<2.$
$C.E. =]-1,2[$. Per gli eventuali asintoti calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del $C.E.$: $\lim_{x\to -1^+}\frac{log(2+x-x^2)}{x^2-4} = \frac{(\to -\infty)}{(\to -3)} = +\infty$;
$\lim_{x\to 2^-}\frac{log(2+x-x^2)}{x^2-4} = \frac{(\to -\infty)}{(\to 0^-)} = +\infty$. La funzione presenta due asintoti verticali di equazioni: $x = -1$ e $x = 2$.

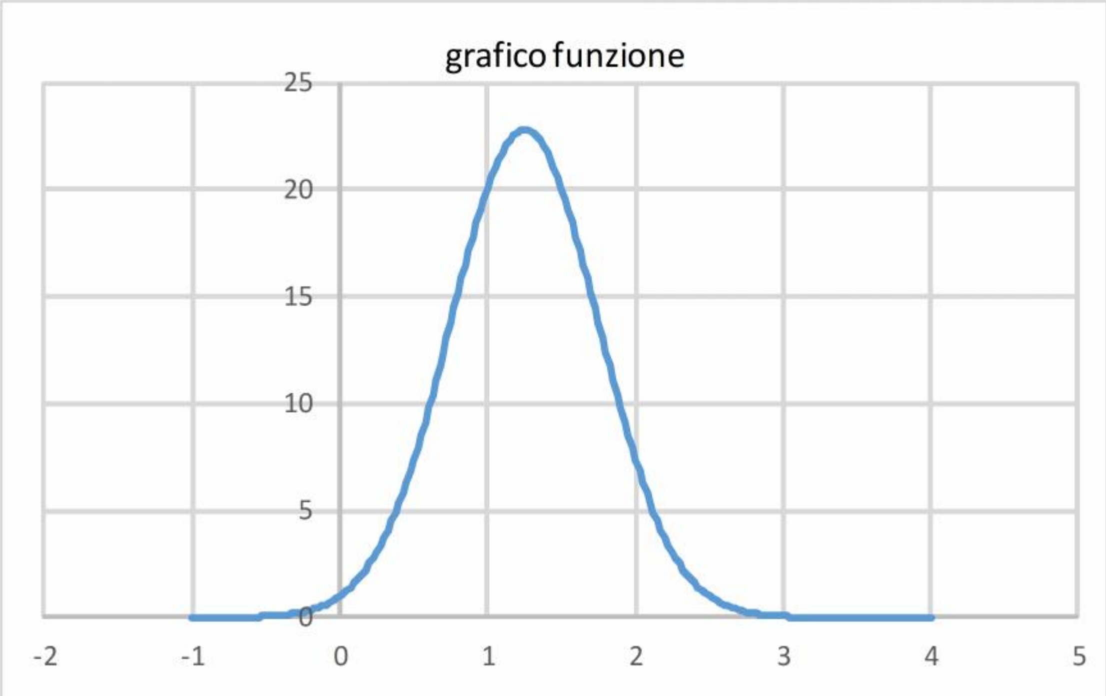
3) Per $0<x<4$ l'espressione $min\{1,x\} = \begin{cases} x & \text{se } 0<x<1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$, pertanto $\lim_{x\to 0^+}f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 4^-}f(x) = 1$ e la funzione è continua sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 0$ e $b = 1$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{-\frac{1}{arcsen\,x}} = \lim_{x\to 0}\left((1-3x)^{\frac{1}{x}}\right)^{-\frac{x}{arcsen\,x}} = (\to e^{-3})^{(\to -1)} = e^3$;
$\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right) = 1$; Verifica: $\forall\epsilon>0$ si ha $\left|1-\frac{4}{x}-1\right| = \left|\frac{4}{x}\right|$, posto $\left|\frac{4}{x}\right| < \epsilon$ risulta $|x| > \frac{4}{\epsilon}$, vera se $x > \frac{4}{\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{4}{\epsilon}$, limite verificato.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{5(-x)-2(-x)^2} = e^{-5x-2x^2}$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0, \forall x\in C.E.$ perché funzione esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0,1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} e^{5x-2x^2} = e^{(\to -\infty)} = 0$;
$\lim_{x \to +\infty} e^{5x-2x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{x(5-2x)} = e^{(\to +\infty)\cdot(\to -\infty)} = 0$; asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = (5-4x)e^{5x-2x^2}$.
$y' > 0 \Rightarrow 5-4x > 0 \Rightarrow x < 5/4$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 5/4[$, strettamente decrescente in $]5/4, +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $\left(5/4, \sqrt[8]{e^{25}}\right)$.
Concavità e convessità:
$y'' = -4e^{5x-2x^2} + (5-4x)^2 e^{5x-2x^2} = \left(16x^2 - 40x + 21\right)e^{5x-2x^2}$.
$y'' > 0 \Rightarrow 16x^2 - 40x + 21 > 0 \Rightarrow x < 3/4 \vee x > 7/4$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 3/4[\cup]7/4, +\infty[$, strettamente concava in $]3/4, 7/4[$, punti di flesso di coordinate $(3/4, \sqrt[8]{e^{21}})$ e $(7/4, \sqrt[8]{e^{21}})$.
Grafico:



6) $\int_{\frac{1}{4}}^{1} log(4x)\, dx = \left[x \cdot log(4x) - \int x \cdot \frac{1}{4x} \cdot 4\, dx\right]_{\frac{1}{4}}^{1} = \left[x \cdot log(4x) - x\right]_{\frac{1}{4}}^{1} =$
$(\log 4 - 1) - \left(\frac{1}{4} \cdot \log 1 - \frac{1}{4}\right) = \log 4 - \frac{3}{4}$.

7) $y' = \dfrac{\frac{1+tg^2 x}{tg\, x}(x^3 \cdot 3^x) - log(tg\, x)(3x^2 \cdot 3^x + x^3 \cdot 3^x \cdot log\, 3)}{(x^3 \cdot 3^x)^2}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ t-0 \end{pmatrix}$.

$z(P) = 0$, $\nabla z = (2xyt^2 - 4t^3, x^2t^2, 2x^2yt - 12xt^2)$, $\nabla z(P) = (0,0,0)$. Equazione del piano tangente: $z = 0$.

Compito $\mathbb{Y}$

1) Per la formula del binomio di Newton $p(x) = \left(1 + x^3\right)^{30} = \sum_{k=0}^{30} \binom{30}{k} x^{3k}$, per il termine di grado 54 si deve determinare un intero k tale per cui $3k = 54$ ovvero $k = 18$ e quindi $c_{54} = \binom{30}{18}$, per il termine di grado 31 notiamo che non esistono interi k tale per cui $3k = 31$ e quindi $c_{31} = 0$.

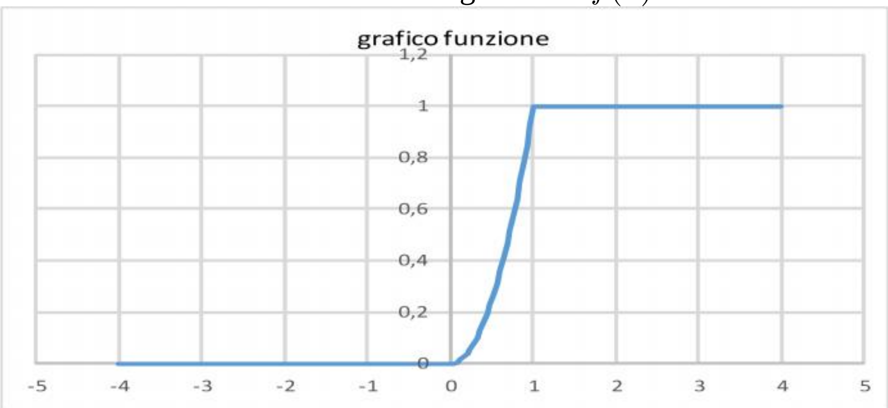
2) Il campo di esistenza della funzione si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2 - x - x^2 > 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ x^2 \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) < 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 1.$$

$C.E. =]-2, 1[$. Per gli eventuali asintoti calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del $C.E.$: $\lim_{x \to -2^+} \frac{log(2 - x - x^2)}{x^2 - 4} = \frac{(\to -\infty)}{(\to 0^-)} = +\infty$;

$\lim_{x \to 1^-} \frac{log(2 - x - x^2)}{x^2 - 4} = \frac{(\to -\infty)}{(\to -3)} = +\infty$. La funzione presenta due asintoti verticali di equazioni: $x = -2$ e $x = 1$.

3) Per $0 < x < 2$ l'espressione $min\{1, x^2\} = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$, pertanto $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$ e la funzione è continua sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 0$ e $b = 1$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $\lim_{x \to 0} (1 + tg\,x)^{-\frac{1}{4x}} = \lim_{x \to 0} \left((1 + tg\,x)^{\frac{1}{tg\,x}} \right)^{-\frac{tg\,x}{4x}} = (\to e)^{(\to -\frac{1}{4})} = e^{-\frac{1}{4}}$;

$\lim_{x \to +\infty} \left(6 - \frac{2}{x}\right) = 6$; Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|6 - \frac{2}{x} - 6\right| = \left|\frac{2}{x}\right|$, posto $\left|\frac{2}{x}\right| < \epsilon$ risulta $|x| > \frac{2}{\epsilon}$, vera se $x > \frac{2}{\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{2}{\epsilon}$, limite verificato.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{-x - \frac{1}{2}(-x)^2} = e^{-x - \frac{1}{2}x^2}$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0, 1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} e^{x - \frac{1}{2}x^2} = e^{(\to -\infty)} = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} e^{x - \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{x\left(1 - \frac{1}{2}x\right)} = e^{(\to +\infty)\cdot(\to -\infty)} = 0$; asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

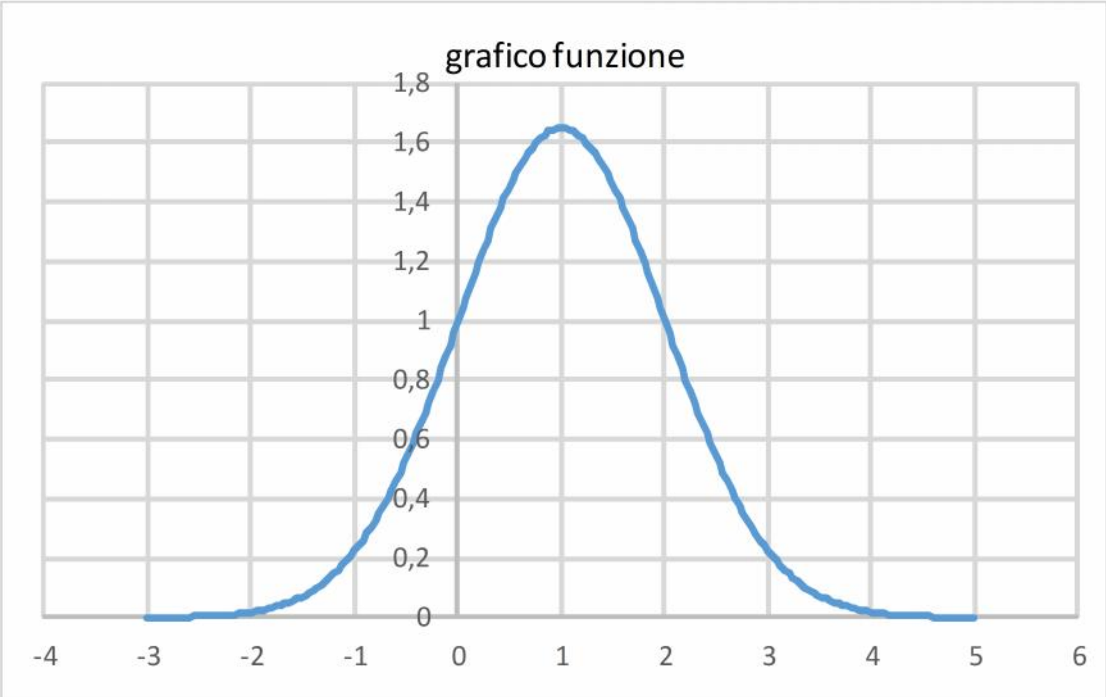
Crescenza e decrescenza: $y' = (1 - x)e^{x - \frac{1}{2}x^2}$.

$y' > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 1[$, strettamente decrescente in $]1, +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $\left(1, \sqrt{e}\right)$.

Concavità e convessità: $y'' = -e^{x-\frac{1}{2}x^2} + (1-x)^2 e^{x-\frac{1}{2}x^2} = \left(x^2 - 2x\right)e^{x-\frac{1}{2}x^2}$.

$y'' > 0 \Rightarrow x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 2$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$, strettamente concava in $]0, 2[$, punti di flesso di coordinate $(0, 1)$ e $(2, 1)$.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} log(2x)\,dx = \left[x \cdot log(2x) - \int x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\,dx\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \left[x \cdot log(2x) - x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} =$

$\displaystyle(2\log 4 - 2) - \left(\frac{1}{2} \cdot \log 1 - \frac{1}{2}\right) = 4\log 2 - \frac{3}{2}$.

7) $\displaystyle y' = 2^{\frac{cos\,x}{tg\,x + sen\,x}} \cdot \log 2 \cdot \frac{-sen\,x(tg\,x + sen\,x) - cos\,x\left(\frac{1}{cos^2 x} + cos\,x\right)}{(tg\,x + sen\,x)^2}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 1 \\ t + 1 \end{pmatrix}$.

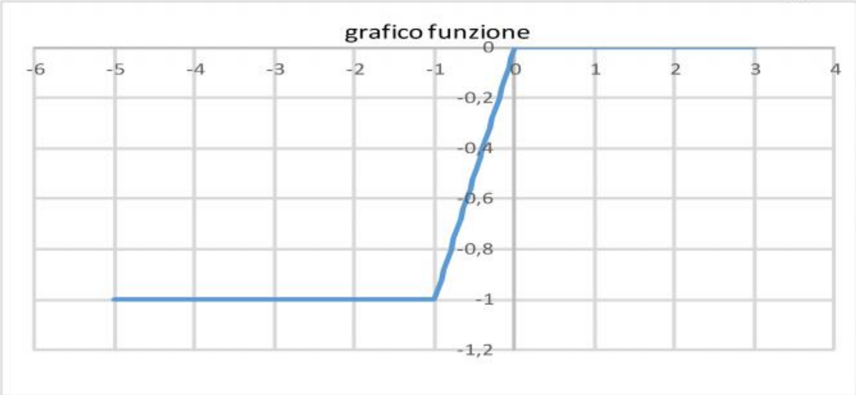
$z(P) = 0$, $\nabla z = (2xy^3 + 5yt, 3x^2y^2 + 5xt, 5xy)$, $\nabla z(P) = (-5, 0, 0)$. Equazione del piano tangente: $z = -5x$, oppure $5x + z = 0$.

Compito $\mathbb{Z}$

1) Per la formula del binomio di Newton $p(x) = (1+x^4)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} x^{4k}$, per il termine di grado 24 si deve determinare un intero k tale per cui $4k = 24$ ovvero $k = 6$ e quindi $c_{24} = \binom{10}{6}$, per il termine di grado 38 notiamo che non esistono interi k tale per cui $4k = 38$ e quindi $c_{38} = 0$.

2) Il campo di esistenza della funzione si ottiene risolvendo il sistema:
$\begin{cases} 12 - x - x^2 > 0 \\ x^2 - 16 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 < 0 \\ x^2 \neq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+4)(x-3) < 0 \\ x \neq \pm 4 \end{cases} \Rightarrow -4 < x < 3.$
$C.E. =]-4, 3[$. Per gli eventuali asintoti calcoliamo i limiti della funzione agli estremi del $C.E.$: $\lim_{x \to -4^+} \frac{log(12 - x - x^2)}{x^2 - 16} = \frac{(\to -\infty)}{(\to 0^-)} = +\infty$;
$\lim_{x \to 3^-} \frac{log(12 - x - x^2)}{x^2 - 16} = \frac{(\to -\infty)}{(\to -7)} = +\infty$. La funzione presenta due asintoti verticali di equazioni: $x = -4$ e $x = 3$.

3) Per $-3 < x < 0$ l'espressione $Max\{-1, x\} = \begin{cases} -1 & \text{se } -3 < x < -1 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$,
pertanto $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -1$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ e la funzione è continua sull'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ se e solo se $a = -1$ e $b = 0$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $\lim_{x \to 0} (1 + 2\,sen\,x)^{\frac{1}{3\,sen\,x}} = \lim_{x \to 0} \left((1 + 2\,sen\,x)^{\frac{1}{sen\,x}} \right)^{\frac{1}{3}} = (\to e^2)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2}{3}}$;
$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - 2 \right) = -2$; Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left| \frac{1}{x} - 2 + 2 \right| = \left| \frac{1}{x} \right|$, posto $\left| \frac{1}{x} \right| < \epsilon$ risulta $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, vera se $x > \frac{1}{\epsilon}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$, limite verificato.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{8(-x) - 8(-x)^2} = e^{-8x - 8x^2}$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $(0, 1)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -\infty} e^{8x - 8x^2} = e^{(\to -\infty)} = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} e^{8x-8x^2} = \lim_{x \to +\infty} e^{8x(1-x)} = e^{(\to+\infty)\cdot(\to-\infty)} = 0$; asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = (8-16x)e^{8x-8x^2}$.

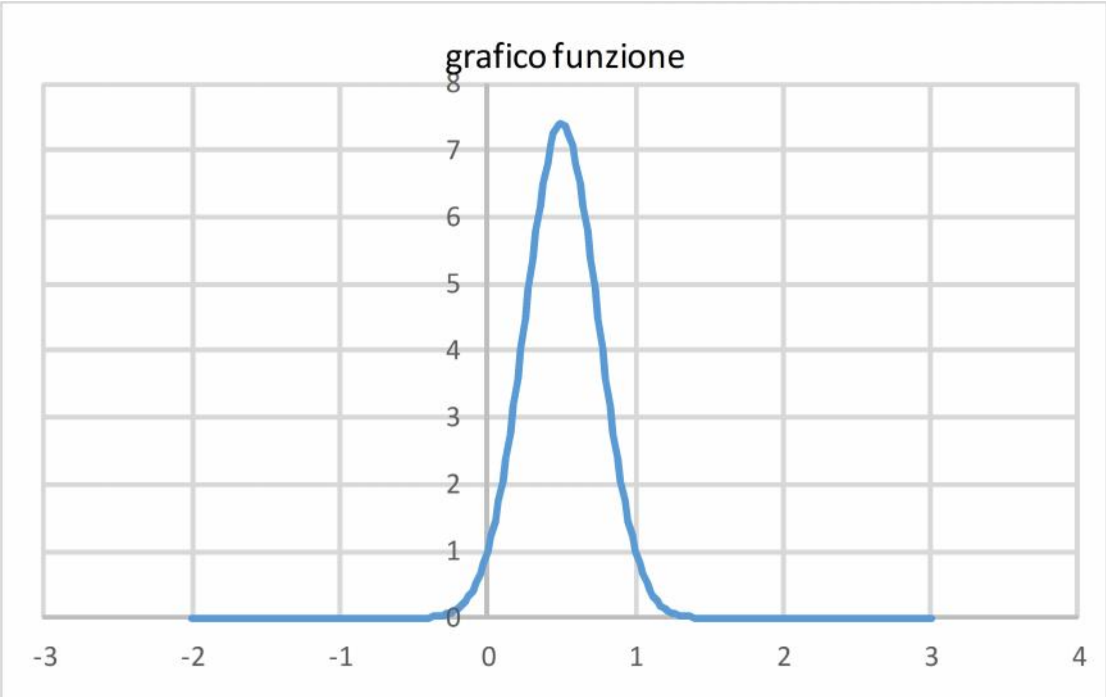
$y' > 0 \Rightarrow 8 - 16x > 0 \Rightarrow x < 1/2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 1/2[$, strettamente decrescente in $]1/2, +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $\left(1/2, e^2\right)$.

Concavità e convessità:

$y'' = -16e^{8x-8x^2} + (8-16x)^2 e^{x-8x^2} = \left(256x^2 - 256x + 48\right)e^{x-8x^2}$.

$y'' > 0 \Rightarrow 256x^2 - 256x + 48 > 0 \Rightarrow x < 1/4 \vee x > 3/4$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 1/4[\cup]3/4, +\infty[$, strettamente concava in $]1/4, 3/4[$, punti di flesso di coordinate $(1/4, \sqrt{e^3})$ e $(3/4, \sqrt{e^3})$.

Grafico:



6) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} log(3x)\, dx = \left[x \cdot log(3x) - \int x \cdot \frac{1}{3x} \cdot 3\, dx\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = \left[x \cdot log(3x) - x\right]_{\frac{1}{3}}^{1} =$

$(\log 3 - 1) - \left(\frac{1}{3} \cdot \log 1 - \frac{1}{3}\right) = \log 3 - \frac{2}{3}$.

7) $y' = \dfrac{\frac{-sen\, x - 2\, sen\, x\, cos\, x}{cos\, x - (sen\, x)^2}\sqrt{e^{-3x}} - log\left(cos\, x - (sen\, x)^2\right)\frac{e^{-3x}\cdot(-3)}{2\sqrt{e^{-3x}}}}{\left(\sqrt{e^{-3x}}\right)^2}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ t-0 \end{pmatrix}$.

$z(P) = 0$, $\nabla z = (2xyt, x^2t + 6y^2t, x^2y + 2y^3)$, $\nabla z(P) = (0, 0, 3)$. Equazione del piano tangente: $z = 3t$, oppure $3t - z = 0$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 16-17)
6 febbraio 2017
Compito $\mathbb{H}$

1)

p	q	r	s_1	s_2	$\neg(p\ o\ q)$	$r \Rightarrow \neg p$	s
V	V	V	F	V			
V	V	F	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	F			.
F	V	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Per l'ipotesi posta escludiamo le due righe dove s_1 e s_2 sono una vera e l'altra falsa, nelle rimanenti sei righe l'equivalenza s risulta tre volte vera e tre volte falsa.

2) Se disponi solo delle cifre 3, 4, 5 e 6 (quattro cifre, due dispari e due pari) puoi formare $4^5 = 1.024$ numeri distinti di cinque cifre. Se invece si richiede che il numero sia pari e presenti una ed una sola cifra dispari hai due modi distinti di scelta della cifra dispari, quattro modi distinti per le scelta della posizione dove inserire la cifra dispari e 2^4 modi distinti per le cifre pari, in definitiva i numeri distinti che soddifano le condizioni poste sono $2 \cdot 4 \cdot 2^4 = 128$.

3) $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} min\{-1, x\} = -1;$

$\displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} a + bx = a;$

$\displaystyle \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} a + bx = a + 4b;$

$\displaystyle \lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} min\{1, x\} = 1.$

Per le condizioni di continuità f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = -1$ e $a + 4b = 1$ ovvero $a = -1$ e $b = 1/2$. Sotto il grafico di $f(x)$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen(2x)} - 1}{sen\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen(2x)} - 1}{sen\, x} \cdot \frac{\sqrt{1 + sen(2x)} + 1}{\sqrt{1 + sen(2x)} + 1} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x)}{sen\, x\left(\sqrt{1 + sen(2x)} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\, \cancel{sen}\, x \cos x}{\cancel{sen}\, x\left(\sqrt{1 + sen(2x)} + 1\right)} = 1;$$

e^x e x^2 sono o-piccoli di 2^{-3x} per $x \to -\infty$, così come $x^3 = o(3^{-x})$, pertanto

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 2^{-3x} - x^2}{x^3 + 3^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^{-3x}}{3^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^{-x} = +\infty.$$

5) $C.E.$: $\dfrac{3-x}{1+x} > 0 \;\Rightarrow\; -1 < x < 3$; $C.E. = \,]-1,3[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $y = log\left(\dfrac{3-x}{1+x}\right) > 0 \;\Rightarrow$

$\dfrac{3-x}{1+x} > 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{2(1-x)}{1+x} > 0 \;\Rightarrow\; -1 < x < 1$, funzione positiva in $]-1,1[$, negativa in $]1,3[$, unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(1,0)$.

$y(0) = log\,3$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -1^+} log\left(\dfrac{3-x}{1+x}\right) = log\left(\dfrac{(\to 4)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to 3^-} log\left(\dfrac{3-x}{1+x}\right) = log\left(\dfrac{(\to 0^+)}{(\to 4)}\right) = -\infty$; due asintoti verticali con equazioni $x = -1$ e $x = 3$.

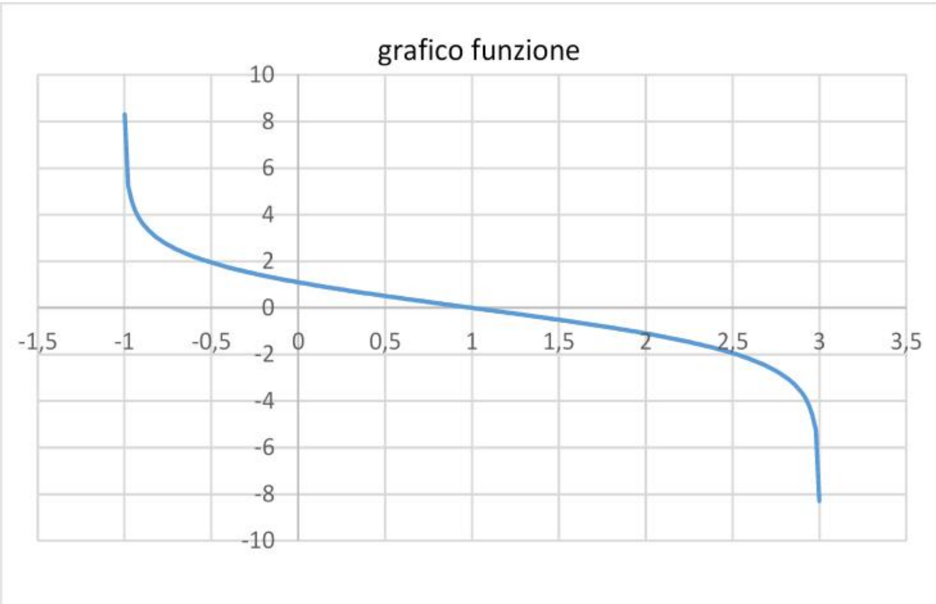
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{3-x}{1+x}} \cdot \dfrac{-1\cdot(1+x) - 1\cdot(3-x)}{(1+x)^2} =$

$\dfrac{\cancel{1+x}}{3-x} \cdot \dfrac{-4}{(1+x)^{\cancel{2}}} = \dfrac{-4}{(3-x)(1+x)}$. $y' < 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente decrescente in $]-1,3[$.

Concavità e convessità: $y'' = -\dfrac{-4(-1\cdot(1+x) + 1\cdot(3-x))}{((3-x)(1+x))^2} =$

$\dfrac{8(1-x)}{((3-x)(1+x))^2}$. $y'' > 0 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow x < 1$. Funzione strettamente convessa in $]-1,1[$, strettamente concava in $]1,3[$, punto di flesso di coordinate $(1,0)$.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^3 - |2x|)\,dx = \int_{-2}^{0} (x^3 + 2x)\,dx + \int_{0}^{1} (x^3 - 2x)\,dx =$

$\displaystyle\left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - x^2\right]_{0}^{1} = -4 - 4 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{35}{4}$.

7) L'equazione della retta tangente alla $h(x)$ nel punto $x = 0$ è $y - h(0) = h'(0) \cdot x$.
$h(0) = f(f(0) - g(0)) = f(1 - 1) = f(0) = 1$;
$h'(x) = f'(f(x) - g(x)) \cdot (f'(x) - g'(x))$;
$h'(0) = f'(f(0) - g(0)) \cdot (f'(0) - g'(0)) = f'(0) \cdot (1 - 0) = 1$. Equazione della retta: $y = x + 1$.

8) $f'_x = y^2 - (z + y)^x \cdot log(z + y)$; $f'_y = 2xy - x(z + y)^{x-1}$; $f'_z = -x(z + y)^{x-1}$.

Compito II

1)

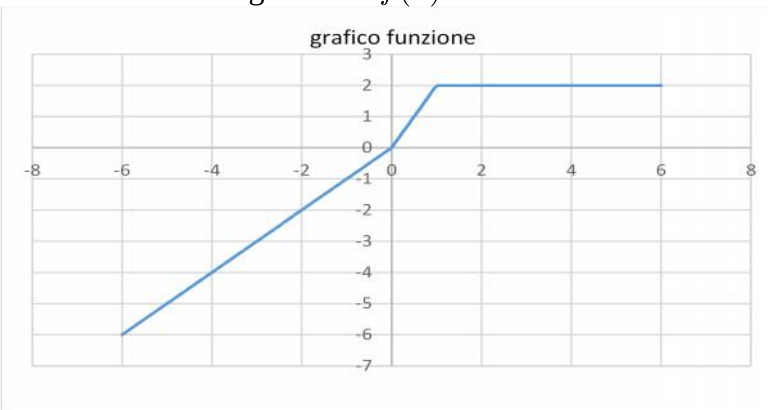
p	q	r	s_1	s_2	$p \Rightarrow r$	$\neg r \Leftrightarrow q$	s
V	V	V	V	V			
V	V	F	V	V			
V	F	V	V	V			
V	F	F	V	F	F	F	F.
F	V	V	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V			
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V

Per l'ipotesi posta escludiamo le quattro righe dove s_1 e s_2 sono entrambe vere o entrambe false, nelle rimanenti quattro righe la disgiunzione s risulta tre volte vera e una volta falsa.

2) Se disponi solo delle cifre 3, 4, 5 e 6 (quattro cifre, due dispari e due pari) puoi formare $4^6 = 4.096$ numeri distinti di sei cifre. Se invece si richiede che il numero sia dispari e presenti una ed una sola cifra pari hai due modi distinti di scelta della cifra pari, cinque modi distinti per le scelta della posizione dove inserire la cifra pari e 2^5 modi distinti per le cifre dispari, in definitiva i numeri distinti che soddifano le condizioni poste sono $2 \cdot 5 \cdot 2^5 = 320$.

3) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} min\{2, x\} = 0;$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} a + bx = a;$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} a + bx = a + b;$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} Max\{2, -x\} = 2.$

Per le condizioni di continuità f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 0$ e $a + b = 2$ ovvero $a = 0$ e $b = 2$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + sen(2x)} - 2}{sen(2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + sen(2x)} - 2}{sen(2x)} \cdot \dfrac{\sqrt{4 + sen(2x)} + 2}{\sqrt{4 + sen(2x)} + 2} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(2x)}{sen(2x)\left(\sqrt{4 + sen(2x)} + 2\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{sen(2x)}}{\cancel{sen(2x)}\left(\sqrt{4 + sen(2x)} + 2\right)} = \dfrac{1}{4};$

e^{-6x} e x sono o-piccoli di 4^x per $x \to +\infty$, così come $x^2 = o(3^x)$, pertanto

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{-6x} + 4^x - x}{x^2 + 3^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4^x}{3^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{3}\right)^x = +\infty.$

5) $C.E.$: $\dfrac{1 - x}{4 + x} > 0 \Rightarrow -4 < x < 1; C.E. =]-4, 1[.$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $y = log\left(\frac{1-x}{4+x}\right) > 0 \Rightarrow$ $\frac{1-x}{4+x} > 1 \Rightarrow -\frac{3+2x}{4+x} > 0 \Rightarrow -4 < x < -3/2$, funzione positiva in $]-4, -3/2[$, negativa in $]-3/2, 1[$, unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(-3/2, 0)$. $y(0) = log(1/4)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

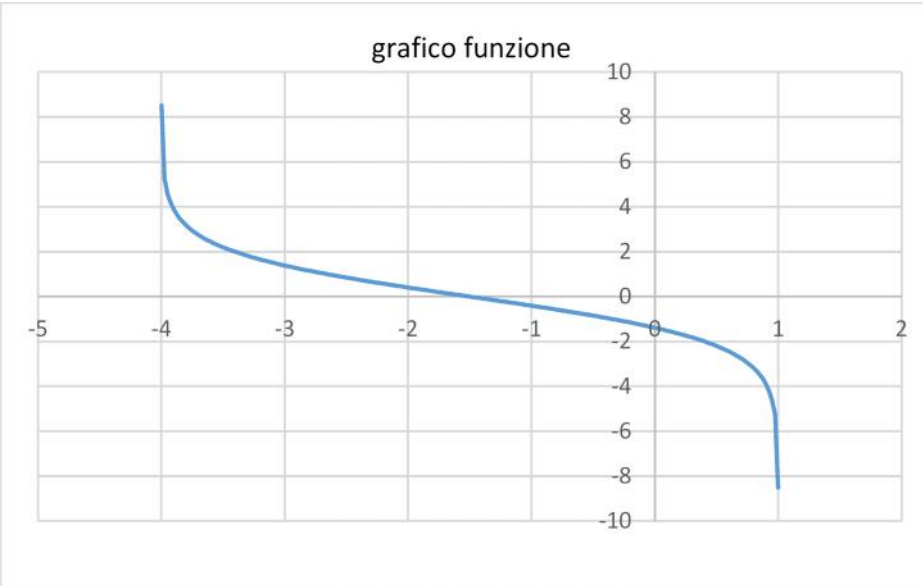
$\lim\limits_{x \to -4^+} log\left(\frac{1-x}{4+x}\right) = log\left(\frac{(\to 5)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} log\left(\frac{1-x}{4+x}\right) = log\left(\frac{(\to 0^+)}{(\to 5)}\right) = -\infty$; due asintoti verticali con equazioni $x = -4$ e $x = 1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1-x}{4+x}} \cdot \frac{-1 \cdot (4+x) - 1 \cdot (1-x)}{(4+x)^2} =$ $\frac{\cancel{4+x}}{1-x} \cdot \frac{-5}{(4+x)^{\cancel{2}}} = \frac{-5}{(1-x)(4+x)}$. $y' < 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente decrescente in $]-4, 1[$.

Concavità e convessità: $y'' = -\frac{-5(-1 \cdot (4+x) + 1 \cdot (1-x))}{((1-x)(4+x))^2} =$ $-\frac{5(3+2x)}{((1-x)(4+x))^2}$. $y'' > 0 \Rightarrow 3 + 2x < 0 \Rightarrow x < -3/2$. Funzione strettamente convessa in $]-4, -3/2[$, strettamente concava in $]-3/2, 1[$, punto di flesso di coordinate $(-3/2, 0)$.

Grafico:



6) $\int_{-3}^{1} (4x^3 + |x|)\, dx = \int_{-3}^{0} (4x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (4x^3 + x)\, dx =$ $\left[x^4 - \frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[x^4 + \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -81 + \frac{9}{2} + 1 + \frac{1}{2} = -75$.

7) L'equazione della retta tangente alla $h(x)$ nel punto $x = 0$ è $y - h(0) = h'(0) \cdot x$.

$h(0) = g(g(0) - f(0)) = g(1 - 1) = g(0) = 1$;

$h'(x) = g'(g(x) - f(x)) \cdot (g'(x) - f'(x))$;

$h'(0) = g'(g(0) - f(0)) \cdot (g'(0) - f'(0)) = g'(0) \cdot (- 2 - 0) = 4$. Equazione della retta: $y = 4x + 1$.

8) $f'_x = 3x^2z^2 + y^{x-z} \cdot log\, y$; $f'_y = (x - z)y^{x-z-1}$; $f'_z = 2x^3z - y^{x-z} \cdot log\, y$.

Compito $\mathbb{J}$

1)

p	q	r	s_1	s_2	$p\ e\ r$	$\neg(r \Leftrightarrow q)$	s
V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F			
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V			

Per l'ipotesi posta escludiamo le due righe dove s_1 e s_2 sono una vera e l'altra falsa, nelle rimanenti sei righe l'implicazione s risulta cinque volte vera e una volta falsa.

2) Se disponi solo delle cifre 5, 6, 7, 8 e 9 (cinque cifre, tre dispari e due pari) puoi formare $5^6 = 15.625$ numeri distinti di sei cifre. Se invece si richiede che il numero sia dispari e presenti una ed una sola cifra pari hai due modi distinti di scelta della cifra dispari, cinque modi distinti per le scelta della posizione dove inserire la cifra pari e 3^5 modi distinti per le cifre dispari, in definitiva i numeri distinti che soddifano le condizioni poste sono $2 \cdot 5 \cdot 3^5 = 2.430$.

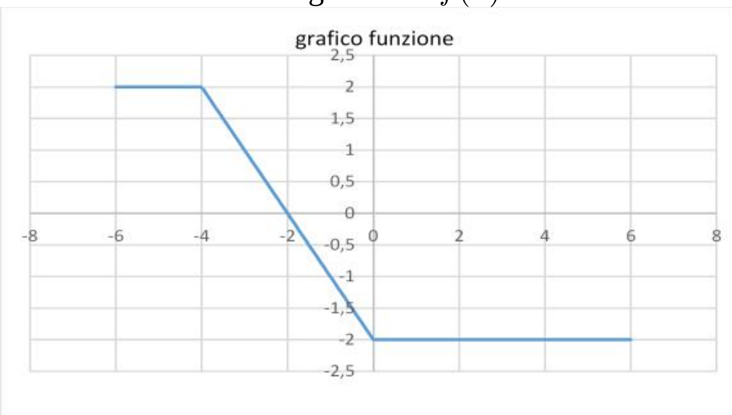
3) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} Max\{2, x\} = 2$;

$\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} a + bx = a - 4b$;

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a + bx = a$;

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} min\{-2, x\} = -2$.

Per le condizioni di continuità f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a - 4b = 2$ e $a = -2$ ovvero $a = -2$ e $b = -1$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen(-2x)} - 1}{sen(2x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + sen(-2x)} - 1}{sen(2x)} \cdot \frac{\sqrt{1 + sen(-2x)} + 1}{\sqrt{1 + sen(-2x)} + 1} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(-2x)}{sen(2x)\left(\sqrt{1 + sen(-2x)} + 1\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\cancel{sen(2x)}}{\cancel{sen(2x)}\left(\sqrt{1 + sen(-2x)} + 1\right)} = -\frac{1}{2};$$

e^{-x} e x^3 sono o-piccoli di 2^{3x} per $x \to +\infty$, così come $4^{-x} = o(x^3)$, pertanto $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} + 2^{3x} - x^3}{x^3 + 4^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^{3x}}{x^3} = +\infty$.

5) $C.E.$: $\frac{1+x}{5-x} > 0 \Rightarrow -1 < x < 5$; $C.E. =]-1,5[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $y = log\left(\frac{1+x}{5-x}\right) > 0 \Rightarrow$ $\frac{1+x}{5-x} > 1 \Rightarrow \frac{2(x-2)}{5-x} > 0 \Rightarrow 2 < x < 5$, funzione positiva in $]2,5[$, negativa in $]-1,2[$, unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(2,0)$. $y(0) = log(1/5)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

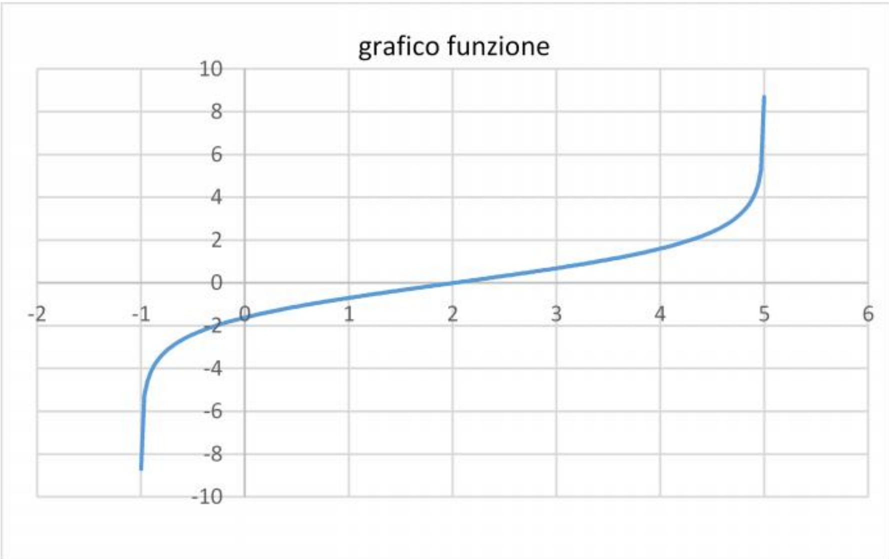
$\lim_{x \to -1^+} log\left(\frac{1+x}{5-x}\right) = log\left(\frac{(\to 0^+)}{(\to 6)}\right) = -\infty$;

$\lim_{x \to 5^-} log\left(\frac{1+x}{5-x}\right) = log\left(\frac{(\to 6)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$; due asintoti verticali con equazioni $x = -1$ e $x = 5$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1+x}{5-x}} \cdot \frac{1 \cdot (5-x) + 1 \cdot (1+x)}{(5-x)^2} =$ $\frac{\cancel{5-x}}{1+x} \cdot \frac{6}{(5-x)^{\cancel{2}}} = \frac{6}{(1+x)(5-x)}$. $y' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente crescente in $]-1,5[$.

Concavità e convessità: $y'' = -\frac{6(1 \cdot (5-x) - 1 \cdot (1+x))}{((1+x)(5-x))^2} =$ $\frac{12(x-2)}{((1+x)(5-x))^2}$. $y'' > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Funzione strettamente convessa in $]2,5[$, strettamente concava in $]-1,2[$, punto di flesso di coordinate $(2,0)$.

Grafico:



6) $\int_{-2}^{2} (x^4 - |x|)\, dx = \int_{-2}^{0} (x^4 + x)\, dx + \int_{0}^{2} (x^4 - x)\, dx =$ $\left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2} = \frac{32}{5} - 2 + \frac{32}{5} - 2 = \frac{44}{5}$.

7) L'equazione della retta tangente alla $h(x)$ nel punto $x = 0$ è $y - h(0) = h'(0) \cdot x$.
$h(0) = g(3 \cdot f(0) - g(0)) = g(0 - 0) = g(0) = 0;$
$h'(x) = g'(3 \cdot f(x) - g(x)) \cdot (3 \cdot f'(x) - g'(x));$
$h'(0) = g'(3 \cdot f(0) - g(0)) \cdot (3 \cdot f'(0) - g'(0)) = g'(0) \cdot (12 + 1) = -13.$
Equazione della retta: $y = -13x$.

8) $f'_x = yz$; $f'_y = xz + z(3y)^{z-1} \cdot 3$; $f'_z = xy + (3y)^z \cdot log(3y)$.

Compito $\mathbb{K}$

1)

p	q	r	s_1	s_2	$p\,e\,r$	$\neg r\; e\; \neg q$	s
V	V	V	F	F			
V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	F			
V	F	F	V	V	F	V	V.
F	V	V	F	V			
F	V	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Per l'ipotesi posta escludiamo le tre righe dove s_1 e s_2 sono almeno una falsa, nelle rimanenti cinque righe l'implicazione s risulta vera.

2) Se disponi solo delle cifre 5, 6, 7, 8 e 9 (cinque cifre, tre dispari e due pari) puoi formare $5^4 = 625$ numeri distinti di quattro cifre. Se invece si richiede che il numero sia pari e presenti una ed una sola cifra dispari hai tre modi distinti di scelta della cifra dispari, tre modi distinti per le scelta della posizione dove inserire la cifra dispari e 2^3 modi distinti per le cifre pari, in definitiva i numeri distinti che soddifano le condizioni poste sono $3 \cdot 3 \cdot 2^3 = 72$.

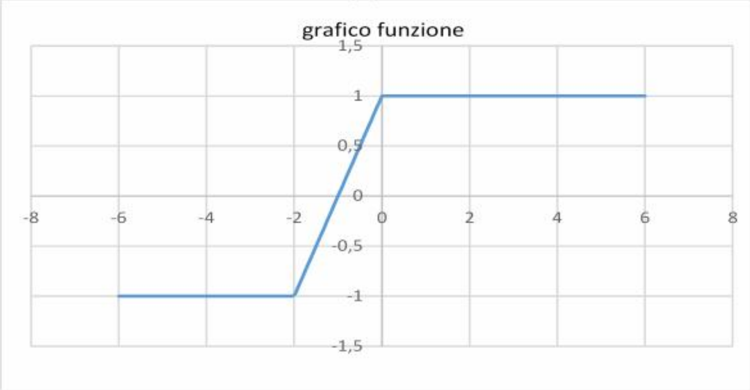
3) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} Max\{-1, x\} = -1$;

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} a + bx = a - 2b$;

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a + bx = a$;

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} Max\{1, -x\} = 1$.

Per le condizioni di continuità f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a - 2b = -1$ e $a = 1$ ovvero $a = b = 1$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen\,x} - 1}{sen(-2x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen\,x} - 1}{sen(-2x)} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + sen\,x} + 1}{\sqrt{1 + sen\,x} + 1} =$

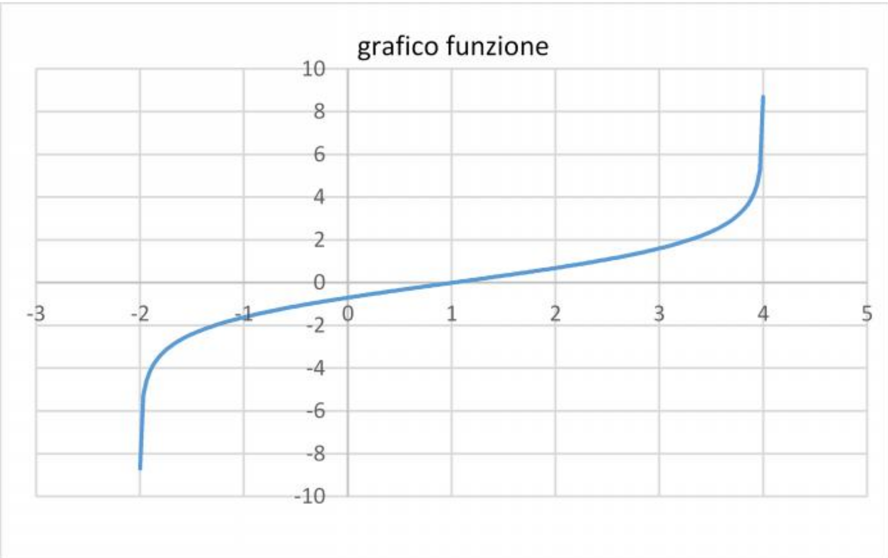
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\,x}{sen(-2x)\left(\sqrt{1 + sen\,x} + 1\right)} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{sen}\,x}{-2\cancel{sen}\,x\,cos\,x\left(\sqrt{1 + sen\,x} + 1\right)} = -\dfrac{1}{4}$;

3^x e x^4 sono o-piccoli di e^{-x} per $x \to -\infty$, così come $3^{2x} = o(x^3)$ e $x^3 = o(e^{-x})$, pertanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} + 3^x - x^4}{x^3 + 3^{2x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^3} = -\infty$.

5) $C.E.$: $\dfrac{2 + x}{4 - x} > 0 \Rightarrow -2 < x < 4$; $C.E. =]-2, 4[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $y = log\left(\frac{2+x}{4-x}\right) > 0 \Rightarrow$
$\frac{2+x}{4-x} > 1 \Rightarrow \frac{2(x-1)}{4-x} > 0 \Rightarrow 1 < x < 4$, funzione positiva in $]1,4[$, negativa in $]-2,1[$, unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(1,0)$. $y(0) = log(1/2)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -2^+} log\left(\frac{2+x}{4-x}\right) = log\left(\frac{(\to 0^+)}{(\to 6)}\right) = -\infty$;
$\lim_{x \to 4^-} log\left(\frac{2+x}{4-x}\right) = log\left(\frac{(\to 6)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$; due asintoti verticali con equazioni $x = -2$ e $x = 4$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{2+x}{4-x}} \cdot \frac{1 \cdot (4-x) + 1 \cdot (2+x)}{(4-x)^2} =$
$\frac{4 \cancel{-} x}{2+x} \cdot \frac{6}{(4-x)^{\cancel{2}}} = \frac{6}{(2+x)(4-x)}$. $y' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente crescente in $]-2,4[$.
Concavità e convessità: $y'' = -\frac{6(1 \cdot (4-x) - 1 \cdot (2+x))}{((2+x)(4-x))^2} =$
$\frac{12(x-1)}{((2+x)(4-x))^2}$. $y'' > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$. Funzione strettamente convessa in $]1,4[$, strettamente concava in $]-2,1[$, punto di flesso di coordinate $(1,0)$.
Grafico:



6) $\int_{-1}^{2} (x^2 + |3x|)\, dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x)\, dx + \int_{0}^{2} (x^2 + 3x)\, dx =$
$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + \frac{8}{3} + 6 = \frac{21}{2}$.

7) L'equazione della retta tangente alla $h(x)$ nel punto $x = 0$ è $y - h(0) = h'(0) \cdot x$.
$h(0) = f(2 \cdot f(0) + g(0)) = f(0 - 0) = f(0) = 0$;
$h'(x) = f'(2 \cdot f(x) + g(x)) \cdot (2 \cdot f'(x) + g'(x))$;
$h'(0) = f'(2 \cdot f(0) + g(0)) \cdot (2 \cdot f'(0) + g'(0)) = f'(0) \cdot (2 - 2) = 0$. Equazione della retta: $y = 0$.

8) $f'_x = 3x^2z - cos(xy) \cdot y$; $f'_y = \ - cos(xy) \cdot x$; $f'_z = x^3$.

Compito $\mathbb{L}$

1)

p	q	r	s_1	s_2	$p\ o\ q$	$r \Rightarrow p$	s
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V			
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V.
F	V	V	V	V			
F	V	F	V	V			
F	F	V	V	V			
F	F	F	F	V	F	V	V

Per l'ipotesi posta escludiamo le quattro righe dove s_1 e s_2 sono entrambe vere, nelle rimanenti quattro righe l'implicazione s risulta vera.

2) Se disponi solo delle cifre 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (sei cifre, tre dispari e tre pari) puoi formare $6^6 = 46.656$ numeri distinti di sei cifre. Se invece si richiede che il numero sia pari e presenti una ed una sola cifra dispari hai tre modi distinti di scelta della cifra dispari, cinque modi distinti per le scelta della posizione dove inserire la cifra dispari e 3^5 modi distinti per le cifre pari, in definitiva i numeri distinti che soddifano le condizioni poste sono $3 \cdot 5 \cdot 3^5 = 3.645$.

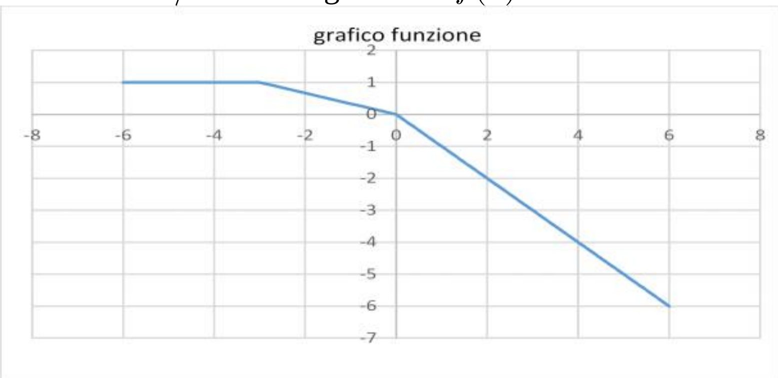
3) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} min\{1, x^2\} = 1;$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} a + bx = a - 3b;$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} a + bx = a;$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} min\{1, -x\} = 0.$

Per le condizioni di continuità f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a - 3b = 1$ e $a = 0$ ovvero $a = 0$ e $b = -1/3$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\,sen\,x} - 1}{sen(2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\,sen\,x} - 1}{sen(2x)} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2\,sen\,x} + 1}{\sqrt{1 + 2\,sen\,x} + 1} =$$

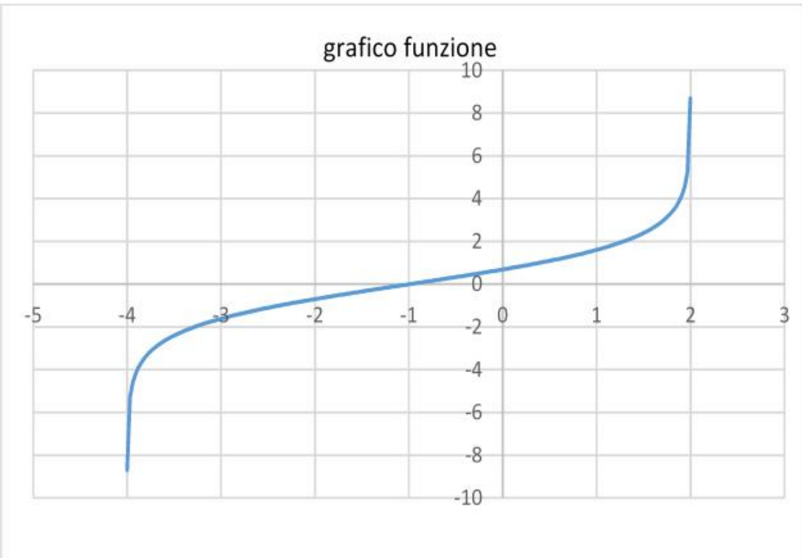
$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,sen\,x}{sen(2x)\left(\sqrt{1 + 2\,sen\,x} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{2}\,se\cancel{n}\,x}{\cancel{2}se\cancel{n}\,x\,cos\,x\left(\sqrt{1 + sen\,x} + 1\right)} =$$

$$\frac{1}{2};$$

e^x e x sono o-piccoli di 3^{-x} per $x \to -\infty$, così come $4^x = o(x)$ e $x = o(3^{-x})$, pertanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + 3^{-x} - x}{x + 4^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^{-x}}{x} = -\infty.$

5) $C.E.$: $\dfrac{4 + x}{2 - x} > 0 \Rightarrow -4 < x < 2$; $C.E. =]-4, 2[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $y=log\left(\frac{4+x}{2-x}\right)>0 \Rightarrow$
$\frac{4+x}{2-x}>1 \Rightarrow \frac{2(x+1)}{2-x}>0 \Rightarrow -1<x<2$, funzione positiva in $]-1,2[$,
negativa in $]-4,-1[$, unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(-1,0)$.
$y(0)=log\,2$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x\to -4^+} log\left(\frac{4+x}{2-x}\right)=log\left(\frac{(\to 0^+)}{(\to 6)}\right)=-\infty$;
$\lim\limits_{x\to 2^-} log\left(\frac{4+x}{2-x}\right)=log\left(\frac{(\to 6)}{(\to 0^+)}\right)=+\infty$; due asintoti verticali con equazioni
$x=-4$ e $x=2$.
Crescenza e decrescenza: $y'=\frac{1}{\frac{4+x}{2-x}}\cdot\frac{1\cdot(2-x)+1\cdot(4+x)}{(2-x)^2}=$
$\frac{\cancel{2-x}}{4+x}\cdot\frac{6}{(2-x)^{\cancel{2}}}=\frac{6}{(4+x)(2-x)}$. $y'>0, \forall x\in C.E.$. Funzione strettamente
crescente in $]-4,2[$.
Concavità e convessità: $y''=-\frac{6(1\cdot(2-x)-1\cdot(4+x))}{((4+x)(2-x))^2}=$
$\frac{12(x+1)}{((4+x)(2-x))^2}$. $y''>0\Rightarrow x+1>0\Rightarrow x>-1$. Funzione strettamente
convessa in $]-1,2[$, strettamente concava in $]-4,-1[$, punto di flesso di
coordinate $(-1,0)$.
Grafico:



6) $\int_{-1}^{2}(x^3+|3x|)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^3-3x)\,dx+\int_{0}^{2}(x^3+3x)\,dx=$
$\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+4+6=\frac{45}{4}$.

7) L'equazione della retta tangente alla $h(x)$ nel punto $x=0$ è $y-h(0)=h'(0)\cdot x$.
$h(0)=f(f(0)+g(0))=f(0+0)=f(0)=0$;
$h'(x)=f'(f(x)+g(x))\cdot(f'(x)+g'(x))$;

$h'(0) = f'(f(0) + g(0)) \cdot (f'(0) + g'(0)) = f'(0) \cdot (1 + 3) = 4$. Equazione della retta: $y = 4x$.

8) $f'_x = y^2 - y(xz)^{y-1} \cdot z$; $f'_y = 2xy - (xz)^y \cdot log(xz)$; $f'_z = \, - y(xz)^{y-1} \cdot x$.

Compito $\mathbb{M}$

1)

p	q	r	s_1	s_2	$p\ e\ r$	$r \Rightarrow (p\ e\ q)$	s
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F			
V	F	F	V	V	F	V	V.
F	V	V	F	V			
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V

Per l'ipotesi posta escludiamo le due righe dove s_1 e s_2 sono una vera e l'altra falsa, nelle rimanenti sei righe l'implicazione s risulta cinque volte vera e una volta falsa.

2) Se disponi solo delle cifre 4, 5, 6, 7, 8 e 9 (sei cifre, tre dispari e tre pari) puoi formare $6^5 = 7.776$ numeri distinti di cinque cifre. Se invece si richiede che il numero sia pari e presenti una ed una sola cifra dispari hai tre modi distinti di scelta della cifra dispari, quattro modi distinti per le scelta della posizione dove inserire la cifra dispari e 3^4 modi distinti per le cifre pari, in definitiva i numeri distinti che soddifano le condizioni poste sono $3 \cdot 4 \cdot 3^4 = 972$.

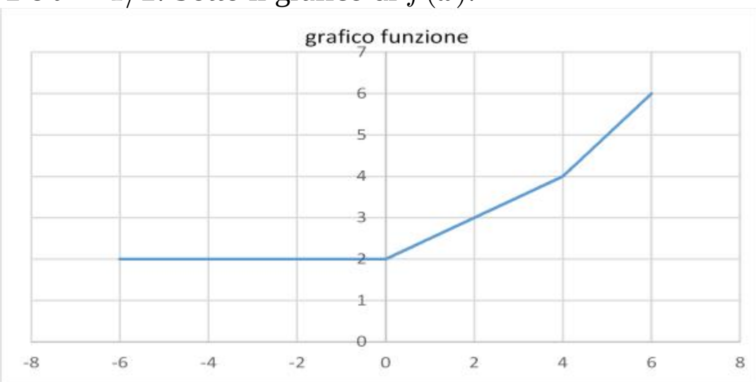
3) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} Max\{2, x\} = 2;$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} a + bx = a;$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} a + bx = a + 4b;$

$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} Max\{-2, x\} = 4.$

Per le condizioni di continuità f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 2$ e $a + 4b = 4$ ovvero $a = 2$ e $b = 1/2$. Sotto il grafico di $f(x)$.



4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + sen^2 x} - 3}{sen\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9 + sen^2 x} - 3}{sen\, x} \cdot \frac{\sqrt{9 + sen^2 x} + 3}{\sqrt{9 + sen^2 x} + 3} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^{\cancel{2}} x}{se\cancel{n}\, x \left(\sqrt{9 + sen^2 x} + 3\right)} = 0\,;$$

2^{-x} e 3^{-x} sono o-piccoli di x^2 per $x \to +\infty$, così come $3^{-2x} = o(x^2)$, pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{-x} + 3^{-x} + x^2}{x^2 + 3^{-2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

5) $C.E.$: $\dfrac{1 - x}{5 + x} > 0 \Rightarrow -5 < x < 1$; $C.E. =]-5, 1[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $y = log\left(\dfrac{1 - x}{5 + x}\right) > 0 \Rightarrow$

$\frac{1-x}{5+x} > 1 \Rightarrow -\frac{2(x+2)}{5+x} > 0 \Rightarrow -5 < x < -2$, funzione positiva in $]-5,-2[$, negativa in $]-2,1[$, unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $(-2,0)$. $y(0) = log(1/5)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -5^+} log\left(\frac{1-x}{5+x}\right) = log\left(\frac{(\to 6)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$;
$\lim_{x \to 1^-} log\left(\frac{1-x}{5+x}\right) = log\left(\frac{(\to 0^+)}{(\to 6)}\right) = -\infty$; due asintoti verticali con equazioni $x = -5$ e $x = 1$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1-x}{5+x}} \cdot \frac{-1 \cdot (5+x) - 1 \cdot (1-x)}{(5+x)^2} = \frac{\cancel{5+x}}{1-x} \cdot \frac{-6}{(5+x)^{\cancel{2}}} = -\frac{6}{(1-x)(5+x)}$. $y' < 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente decrescente in $]-5,1[$.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{6(-1 \cdot (5+x) + 1 \cdot (1-x))}{((1-x)(5+x))^2} = -\frac{12(x+2)}{((1-x)(5+x))^2}$. $y'' > 0 \Rightarrow x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$. Funzione strettamente convessa in $]-5,-2[$, strettamente concava in $]-2,1[$, punto di flesso di coordinate $(-2,0)$.
Grafico:

6) $\int_{-2}^{0} (x^3 - |-4x|)\, dx = \int_{-2}^{0} (x^3 + 4x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{-2}^{0} = -4 - 8 = -12$.

7) L'equazione della retta tangente alla $h(x)$ nel punto $x = 0$ è $y - h(0) = h'(0) \cdot x$.
$h(0) = g(f(0) + g(0)) = g(0 + 0) = g(0) = 0$;
$h'(x) = g'(f(x) + g(x)) \cdot (f'(x) + g'(x))$;
$h'(0) = g'(f(0) + g(0)) \cdot (f'(0) + g'(0)) = g'(0) \cdot (1 - 1) = 0$. Equazione della retta: $y = 0$.

8) $f'_x = 2xyz$; $f'_y = x^2z - cos(zy) \cdot z$; $f'_z = x^2y - cos(zy) \cdot y$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 16-17)
17 marzo 2017
Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di appartenenza:

A	B	C	$A\cup B$	$A\cup C$	$A\cap C$	$C\subseteq(A\cup B)$	$B\subseteq(A\cup C)$	$(A\cap C)\subseteq B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	V	V	V
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	V	V
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	V	V	F
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	V	V
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	V	V	V
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	V	F	$\cancel{V}$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	F	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V	V	V

Per le ipotesi poste escludiamo le due righe dove esse non sono verificate, come è facile notare dall'ultima colonna si verifica un caso di falsità, pertanto non si può concludere con certezza che $(A\cap C)\subseteq B$.

2) Ricordiamo che $D^r_{n,k}=n^k,\ D_{n,k}=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ e $C_{n,k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\dbinom{n}{k}$;

pertanto $D^r_{10,20}=10^{20},\ D_{20,10}=\dfrac{20!}{(20-10)!}=\dfrac{20!}{10!}$, $C_{20,10}=\dfrac{20!}{10!\cdot 10!}=\dbinom{20}{10}$ e

$D_{20,10}/C_{20,10}=\dfrac{20!}{10!}\Big/\dfrac{20!}{10!\cdot 10!}=10!$.

3) $f(g(x))=f(x+1)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(f(x))=g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+1$,

$f(g(x))+g(f(x))=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}+1$. La disequazione proposta è equivalente alla

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}>0$ che con semplice algebra può essere riscritta come $\dfrac{2x+1}{x(x+1)}>0$;

studiamo separatamente il segno dei tre fattori: $2x+1>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$, $x>0$,

$x+1>0\Leftrightarrow x>-1$, dato che si richiede che il segno della frazione sia positivo abbiamo che la disequazione proposta è verificata se e solo se tutte e tre i fattori sono positivi oppure uno ed uno soltanto è positivo, ovvero le soluzioni sono

$\mathbb{S}$: $-1<x<-\dfrac{1}{2}\vee 0<x$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x-1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{e^x-1}-1}{e^x-1}\cdot\dfrac{e^x-1}{x}=1\cdot 1=1$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{e^2}{e^{x+2}}\right)^{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)^{e^x}=e$.

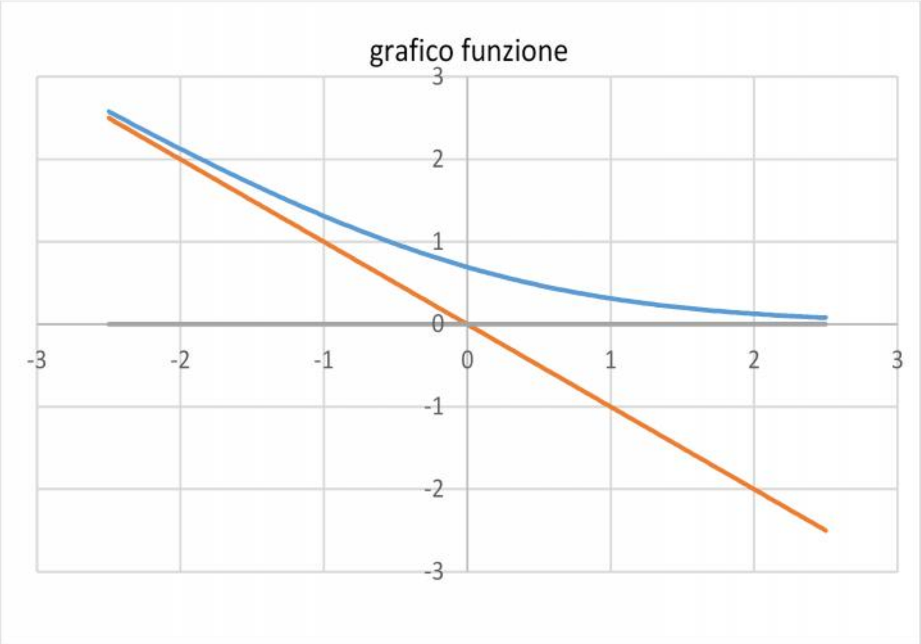
5) $C.E.$: $\dfrac{1+e^x}{e^x}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, in quanto rapporto fra due quantità positive, $C.E.=\mathbb{R}$.

Segno: $log\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right)>0\Rightarrow\dfrac{1+e^x}{e^x}>1\Rightarrow 1+e^x>e^x$, vera $\forall x\in\mathbb{R}$, funzione positiva, $y(0)=log\,2$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}log\left(\dfrac{1+e^x}{e^x}\right)=log\left(\dfrac{(\to 1)}{(\to 0^+)}\right)=+\infty$;

$\lim_{x \to -\infty} \frac{log(\frac{1+e^x}{e^x})}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{log(1+e^x) - log(e^x)}{x} =$
$\lim_{x \to -\infty} \frac{log(1+e^x) - x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{log(1+e^x)}{x} - 1 = \frac{log((\to 1))}{(\to -\infty)} - 1 =$
$-1;$
$\lim_{x \to -\infty} log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + x = \lim_{x \to -\infty} log(1+e^x) - x + x = log((\to 1)) = 0;$
asintoto obliquo sx di equazione $y = -x$;
$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{1}{e^x} + 1\right) = log\left(\frac{1}{(\to +\infty)} + 1\right) = 0;$
asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}} \cdot \frac{e^x \cdot e^x - (1+e^x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{1+e^x}$,
$y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, funzione strettamente decrescente.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$. $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, funzione strettamente convessa.
Grafico: sono riportati anche l'asintoto obliquo (in rosso) e quello orizzontale (in grigio),



6) $\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = log(1+e^x)\big|_0^2 = log(1+e^2) - log\,2 = log\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$.

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X}^T \cdot \mathbb{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_3 & 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_4 & 2x_4 \end{bmatrix}$ che può essere riscritta in forma di

sistema lineare: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 2x_1 + 2x_3 \\ x_2 + x_4 = 2x_3 \\ x_3 = 2x_2 + 2x_4 \\ x_4 = 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 4x_2 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$, la matrice $\mathbb{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, matrice nulla.

8) $\nabla f = (y^2 + 2x - 4, 3y^2 + 2xy)$.

FOC: $\begin{cases} y^2 + 2x - 4 = 0 \\ 3y^2 + 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 2x - 4 = 0 \\ y(3y + 2x) = 0 \end{cases}$

$\nearrow \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

$\searrow \quad \begin{cases} y^2 - 3y - 4 = 0 \\ x = -\dfrac{3}{2} y \end{cases} \Rightarrow \left(x = \frac{3}{2} \wedge y = -1\right) \vee (x = -6 \wedge y = 4)$, tre punti

critici $P_1(2,0)$, $P_2(\dfrac{3}{2}, -1)$, $P_3(-6,4)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 6y + 2x \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 2(6y + 2x) - 4y^2 = 12y + 4x - 4y^2$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 8 > 0$, $f''_{xx}(P_1) = 2 > 0$. P_1 punto di minimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = -10 < 0$, $|\mathcal{H}f(P_3)| = -40 < 0$. P_2 e P_3 punti di sella.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2016-2017)

12 giugno 2017

Compito Unico

1) (Primo metodo: *con la tavola di verità*)

p	q	r	$q\ o\ r$	$p\ o\ q$	$p \Rightarrow (q\ o\ r)$	$r \Rightarrow (p\ o\ q)$	$(p\ o\ q) \Leftrightarrow (q\ o\ r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	$\cancel{V}$	$\cancel{F}$
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	$\cancel{F}$
F	F	F	F	F	V	V	V

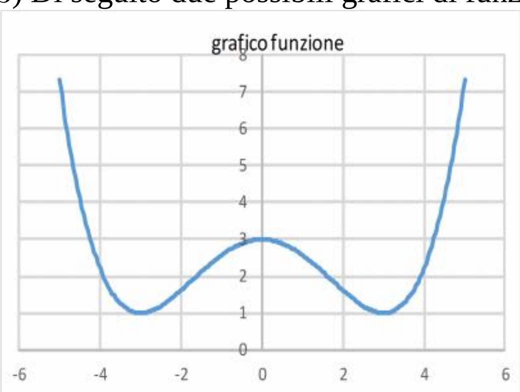
Per le ipotesi poste escludiamo le due righe dove almeno una fra le proposizioni $p \Rightarrow (q\ o\ r)$ o $r \Rightarrow (p\ o\ q)$ è falsa, come è facile notare dall'ultima colonna si verifica che la proposizione $(p\ o\ q) \Leftrightarrow (q\ o\ r)$ è sicuramente vera.

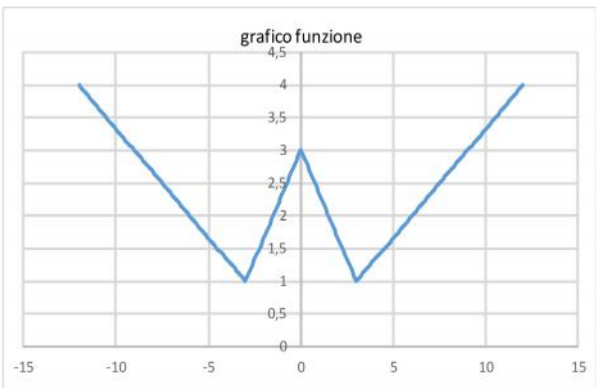
(Secondo metodo: *con la logica*)

Se la proposizione $(p\ o\ q) \Leftrightarrow (q\ o\ r)$ fosse falsa avremmo che $p\ o\ q$ è vera e $q\ o\ r$ è falsa oppure il viceversa, pertanto se $p\ o\ q$ è vera e $q\ o\ r$ è falsa risulta che q e r sono false e p è vera da cui la falsità di $p \Rightarrow (q\ o\ r)$, mentre se $q\ o\ r$ è vera e $p\ o\ q$ è falsa risulta che p e q sono false e r è vera da cui la falsità di $r \Rightarrow (p\ o\ q)$, in conclusione se $p \Rightarrow (q\ o\ r)$ e $r \Rightarrow (p\ o\ q)$ sono entrambe vere $(p\ o\ q) \Leftrightarrow (q\ o\ r)$ non può essere falsa e quindi è sicuramente vera.

2) Nel primo caso abbiamo 10 distinti modo di scelta per il colore della banda centrale, 9 distinti modi di scelta per il colore della banda di sinistra o di destra e 8 distinti modi di scelta per il colore della banda rimanente, le possibili bandiere sono quindi $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Nel secondo caso abbiamo 10 modi per la centrale e 9 distinti modi per le rimanenti due, le possibili bandiere sono quindi $10 \cdot 9 \cdot 9 = 810$.

3) Di seguito due possibili grafici di funzione che soddisfano le condizioni richieste.





4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\sqrt{1-\cos x^2}}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} -\frac{e^{-\sqrt{1-\cos x^2}}-1}{-\sqrt{1-\cos x^2}} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos x^2}{x^4}} =$$

$$-1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\frac{2}{x^4}}{x^4+\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x^6}\right)}{x\cancel{^2}^{2}\left(1+\frac{4}{x^6}\right)} = \frac{(\to 1)}{(\to +\infty)(\to 1)} = 0.$$

5) $C.E. = \mathbb{R}$.

Segno: $y \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, perché prodotto fra due quantità non negative, $y = 0$ se e solo se $x = 0$, unica intersezione con gli assi nel punto $\mathbb{O}(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = (\to +\infty)\cdot e^{(\to+\infty)} = +\infty$;

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (\to -\infty)\cdot e^{(\to+\infty)} = -\infty$;

la funzione non presenta asintoto orizzontale o asintoto obliquo sx;

$\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0$, in quanto per $x \to +\infty$, $x^2 = o(e^x)$;

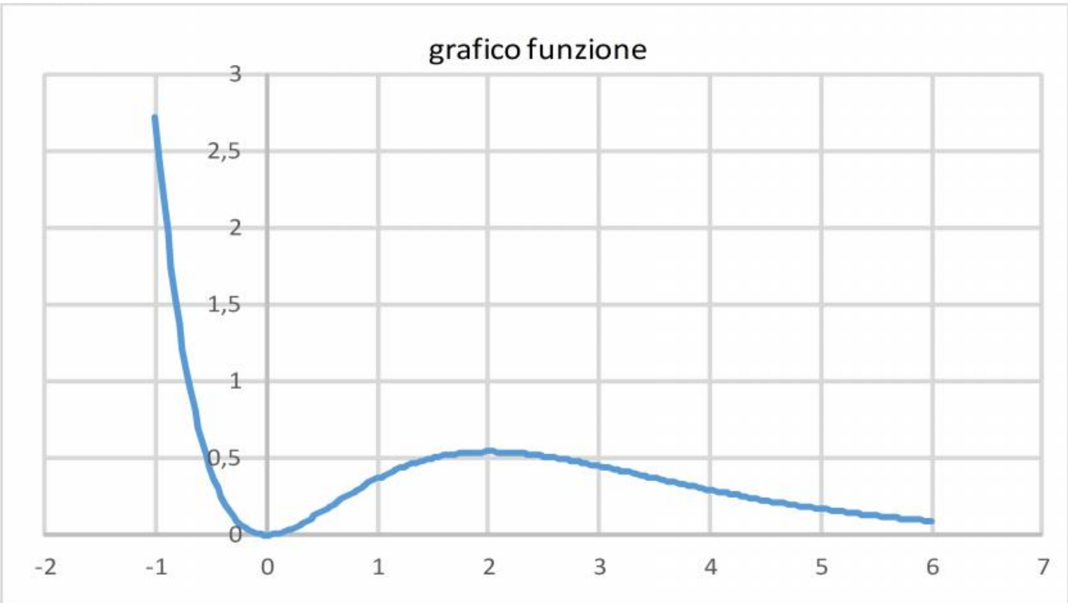
asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$,

$y' \geq 0$, per $0 \leq x \leq 2$, funzione strettamente crescente in $[0,2]$, strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$; minimo assoluto nel punto $\mathbb{O}(0,0)$, massimo relativo nel punto $\mathbb{P}(2, 4/e^2)$.

Concavità e convessità: $y'' = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = (x^2-4x+2)e^{-x}$. $y'' \geq 0$, se $x^2 - 4x + 2 \geq 0$, vera per $x \leq 2-\sqrt{2} \vee x \geq 2+\sqrt{2}$, funzione strettamente convessa in $]-\infty, 2-\sqrt{2}]$ e in $[2+\sqrt{2}, +\infty[$, strettamente concava in $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$; flessi nei punti $\mathbb{F}_1\left(2-\sqrt{2}, y\left(2-\sqrt{2}\right)\right)$ e $\mathbb{F}_2\left(2+\sqrt{2}, y\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$.

Grafico:



6) $\int_0^1 x^2e^{x^3}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\cdot 3x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}e - \frac{1}{3} = \frac{e-1}{3}$.

7) Per la formula del differenziale posto $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$ e $h = 0.012$, $\sqrt[4]{1.012}$ può essere approssimata tramite la formula $f(x_0) + f'(x_0)\cdot h$.

$f(1)=1,\ f'(x)=\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\,,\ f'(1)=\dfrac{1}{4}$, pertanto

$\sqrt[4]{1.012}\approx 1+\dfrac{1}{4}\cdot 0.012=1.003\,.$

8) $\nabla f=(y^2-4x, 2xy-18y)$.

$$FOC\colon \begin{cases} y^2-4x=0 \\ 2xy-18y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-4x=0 \\ 2y(x-9)=0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \nearrow & \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \searrow & \begin{cases} x=9 \\ y^2=36 \end{cases} \Rightarrow (x=9\wedge y=-6)\vee(x=9\wedge y=6) \end{array}$$

, tre punti critici

$P_1(0,0),\ P_2(9,-6)\,,P_3(9,6)$.

$\mathcal{H}f=\begin{bmatrix} -4 & 2y \\ 2y & 2x-18 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f|=-4(2x-18)-4y^2=72-8x-4y^2$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)|=72>0$, $f''_{xx}(P_1)=-4<0$. P_1 punto di massimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)|=|\mathcal{H}f(P_3)|=-144<0$. P_2 e P_3 punti di sella.

Università degli Studi di Siena

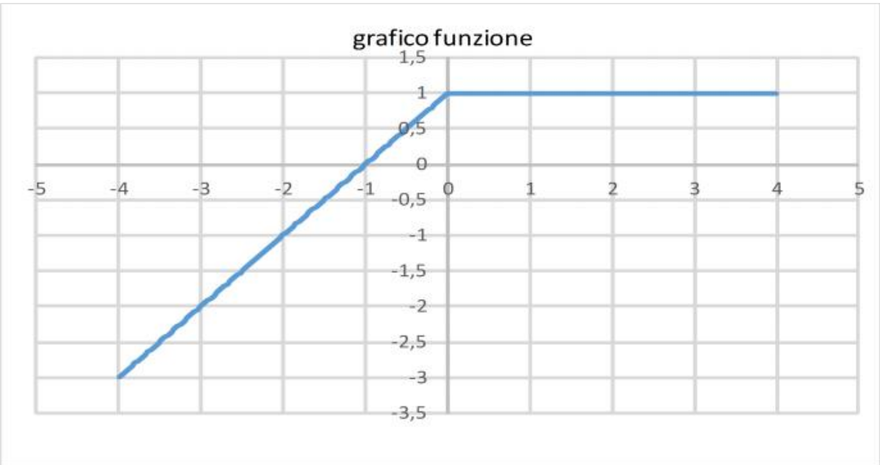
Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2016-2017)

11 luglio 2017

Compito Unico

1) Sviluppando i coefficienti binomiali il sistema risulta equivalente a
$\begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} = 4\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = 2\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \end{cases}$ e ricordando che $n! = n(n-1)!$, $k! = k(k-1)!$, $(k+1)! = (k+1)k!$ e $(n+1-k)! = (n+1-k)(n-k)!$ il sistema può essere riscritto come $\begin{cases} \frac{n\cancel{(n-1)!}}{k\cancel{(k-1)!}\cancel{(n-k)!}} = 4\frac{\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(k-1)!}\cancel{(n-k)!}} \\ \frac{\cancel{(n+1)!}}{(k+1)\cancel{k!}\cancel{(n-k)!}} = 2\frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{k!}(n+1-k)\cancel{(n-k)!}} \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} \frac{n}{k} = 4 \\ \frac{1}{(k+1)} = \frac{2}{n+1-k} \end{cases}$ da cui
$\begin{cases} n = 4k \\ n+1-k = 2k+2 \end{cases}$ che risolto porta a $n = 4$ e $k = 1$.

2)



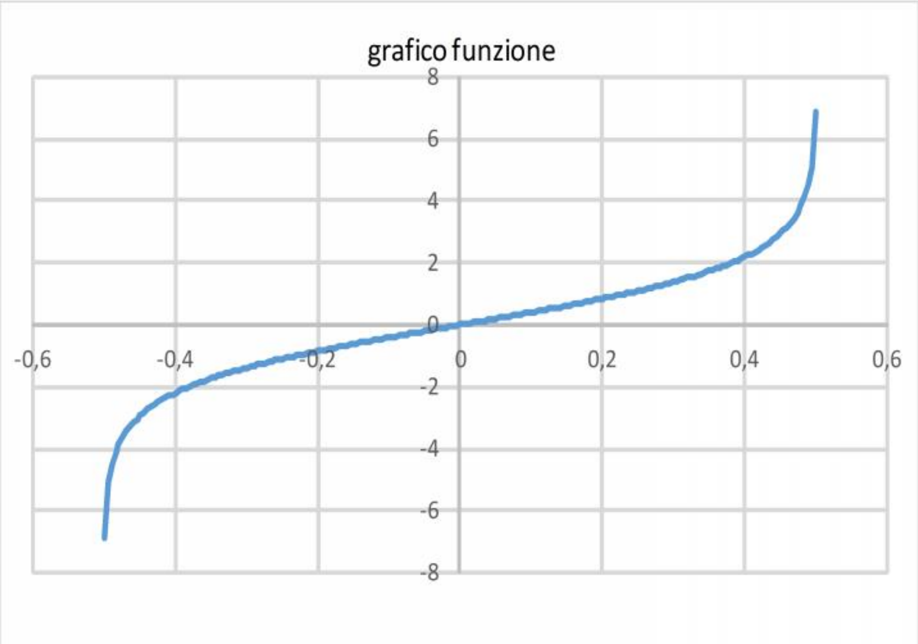
$f([-1,1]) = [0,1]$, $f^{-1}([-1,1]) = [-2, +\infty[$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + kx - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} + k = 1 + k$ pertanto deve risultare $1 + k = 2$ ovvero $k = 1$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[4]{1+x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} - \frac{\sqrt[4]{1+x} - 1}{x} \right) =$
$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$; per $x \to +\infty$, 3^x e x^5 sono o-piccoli di 4^x così come $log\, x$ e $sen\, x$ sono o-piccoli di e^x, pertanto $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3^x + 4^x + x^5}{e^x + log\, x + sen\, x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4^x}{e^x} =$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^x = +\infty$.

5) $C.E.$: $\frac{1+2x}{1-2x} > 0$, studiamo separatamente numeratore e denominatore:
$1 + 2x > 0$ per $x > -1/2$ e $1 - 2x > 0$ per $x < 1/2$, il rapporto $\frac{1+2x}{1-2x}$ risulta maggiore di zero se e solo se $-1/2 < x < 1/2$. $C.E. =]-1/2, 1/2[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\frac{1+2(-x)}{1-2(-x)}\right) = log\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right) =$
$log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)^{-1} = -log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = -y(x)$, funzione dispari. La studiamo quindi solo per $x \in [0, 1/2[$ ed operiamo per simmetria.
Segno: $y \geq 0$ se $log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{1-2x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{1-2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\frac{4x}{1-2x} \geq 0$, vera se e solo se $x \in [0, 1/2[$, $y(0) = log\,1 = 0$, unica intersezione con gli assi nel punto $\mathbb{O}(0, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 1/2^-} log\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = log\left(\frac{\to 2}{\to 0^+}\right) = log(\to +\infty) = +\infty$; asintoto verticale di equazione $x = 1/2$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1+2x}{1-2x}} \cdot \frac{2(1-2x)+2(1+2x)}{(1-2x)^2} =$
$\frac{1-\cancel{2x}}{1+2x} \cdot \frac{4}{(1-2x)^{\cancel{2}}} = \frac{4}{(1+2x)(1-2x)}$, $y' \geq 0, \forall x \in [0, 1/2[$, funzione strettamente crescente in $[0, 1/2[$.
Concavità e convessità: $y'' = -\frac{4(-8x)}{(1-4x^2)^2} = \frac{32x}{(1-4x^2)^2}$. $y'' \geq 0$, se e solo se $x \geq 0$, funzione strettamente convessa in $[0, 1/2[$; unico punto di flesso in $\mathbb{O}$.
Grafico:



6) $\int\left(e^x - e^{-2x} + \frac{4}{1+x}\right)dx = e^x + \frac{e^{-2x}}{2} + 4log|1+x| + c$.

7) Posto $\mathbb{X}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, risulta $\mathbb{A}^T\cdot\mathbb{X}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a-c & b-d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix}$ e

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; la relazione è quindi soddisfatta se

$$\begin{cases} a-c=-3 \\ b-d=3 \\ 2a+c=-3 \\ 2b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \\ c=1 \\ d=-2 \end{cases}.$$

8) $\nabla f=(f'_x,f'_y,f'_z)$ con $f'_x=(y+z)x^{y+z-1}\cdot log(yz)$,

$f'_y=x^{y+z}\cdot log\,x\cdot log(yz)+x^{y+z}\cdot\dfrac{z}{yz}=x^{y+z}\left(log\,x\cdot log(yz)+\dfrac{1}{y}\right)$ e

$f'_z=x^{y+z}\cdot log\,x\cdot log(yz)+x^{y+z}\cdot\dfrac{y}{yz}=x^{y+z}\left(log\,x\cdot log(yz)+\dfrac{1}{z}\right)$, con

$f'_x(P)=2\cdot 1^1\cdot log\,1=0$, $f'_y(P)=f'_z(P)=1^2(log\,1\cdot log\,1+1)=1$; pertanto

$\nabla f(P)=(0,1,1)$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2016-2017)

6 settembre 2017

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	$p\ e\ q$	$\neg p\ e \neg q\ e \neg r$	$\neg q \Rightarrow r$	$\neg(q\ e\ r)$	$\neg(p\ e\ q)$	$\neg(q\ e\ r) \Rightarrow \neg(p\ e\ q)$
V	V	V	V	$\cancel{F}$	$\cancel{V}$	$\cancel{F}$	$\cancel{F}$	$\cancel{V}$
V	V	F	V	$\cancel{F}$	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$	$\cancel{F}$	$\cancel{F}$
V	F	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$
F	V	V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	$\cancel{F}$	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$

L'ipotesi i) porta ad escludere le prime due righe dove essa non è verificata, per la ii) escludiamo l'ultima riga, infine la iii) porta ad eliminare la seconda dall'alto delle rimanenti; come possiamo notare nella colonna conlusiva nei quattro casi significativi si verificano solo situazioni di verità, pertanto si può concludere con certezza che la proposizione $\neg(q\ e\ r) \Rightarrow \neg(p\ e\ q)$ è vera.

2) Nel primo caso abbiamo 26^4 modi distinti per la scelta delle quattro lettere e 10^4 modi distinti per la scelta delle quattro cifre, in totale i possibili codici che si possono formare sono $26^4 \cdot 10^4 = 260^4 = 4.569.760.000$. Nel secondo caso abbiamo 26 modi distinti per la scelta della prima lettera, 25 modi distinti per la scelta della seconda lettera e così via, mentre per le cifre abbiamo 10 modi distinti per la prima, 9 modi distinti per la seconda e così via, in totale i possibili codici che si possono formare sono in questo caso $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{26!}{22!} \cdot \frac{10!}{6!} = 1.808.352.000$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{|x|} < 8\} \cup \{x \in \mathbb{R}\colon log_3 x \geq 1\} =$
$\{x \in \mathbb{R}\colon |x| < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R}\colon -3 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 3\} =$
$\{x \in \mathbb{R}\colon -3 < x\} =]-3, +\infty[$. $\delta(A) = \{-3\}$, $\mathcal{D}(A) = [-3, +\infty[$, infine dato che $\delta(A) \subseteq \mathcal{C}(A)$ ne consegue che l'insieme proposto è aperto.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{log(1 + x + x^2 + 3\, sen\, x)}{x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1 + x + x^2 + 3\, sen\, x)}{x + x^2 + 3\, sen\, x} \cdot \frac{x + x^2 + 3\, sen\, x}{x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{log(1 + x + x^2 + 3\, sen\, x)}{x + x^2 + 3\, sen\, x} \cdot \left(1 + x + 3\frac{sen\, x}{x}\right) = 1 \cdot (1 + 0 + 3) = 4;$$
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^3}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3.$$

5) $C.E.$: $\frac{1 + x^2}{1 - x^2} > 0$, dato che la quantità $1 + x^2$ è positiva per ogni x reale risulta $\frac{1 + x^2}{1 - x^2} > 0$ se e solo se $1 - x^2 > 0$ ovvero $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$,
$C.E. =]-1, 1[$.

$y(-x) = log\left(\frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}\right) = log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = y(x)$, funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), la studiamo solo nell'intervallo $[0,1[$ ed operiamo per simmetria.

Segno: $log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x^2}{1-x^2} \geq 0$, vera $\forall x \in [0,1[$, funzione non negativa, $y(0) = 0$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

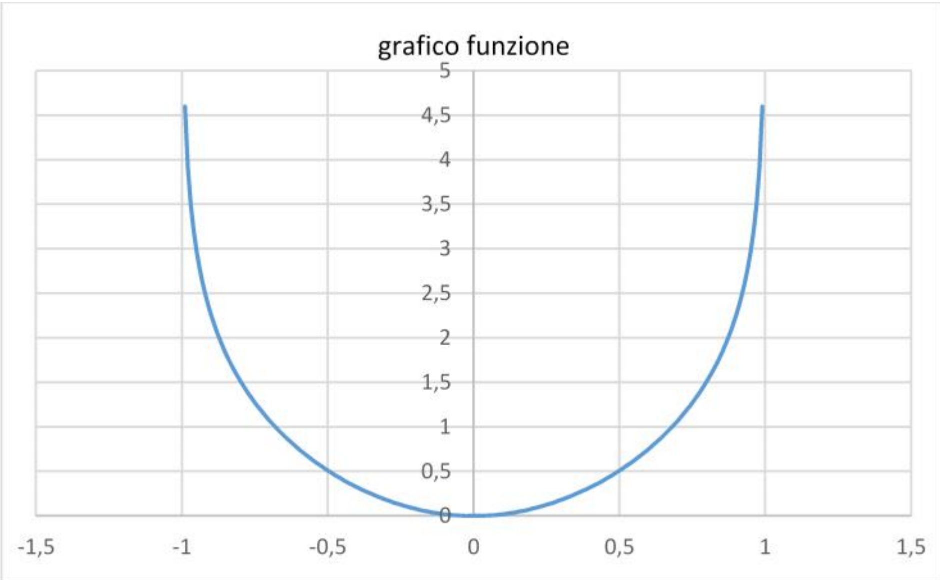
$\lim_{x \to 1^-} log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = log\left(\frac{(\to 2)}{(\to 0^+)}\right) = +\infty$; asintoto verticale di equazione $x = 1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1+x^2}{1\cancel{-}x^2}} \cdot \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^{\cancel{2}}} =$

$\frac{4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{4x}{1-x^4}$, $y' \geq 0, \forall x \in [0,1[$, funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{4(1-x^4)-4x(-4x^3)}{(1-x^4)^2} = \frac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}$. $y'' > 0$, $\forall x \in [0,1[$, funzione strettamente convessa.

Grafico:



6) Integriamo per parti: $\int (x + log\, x)\, dx = \int 1 \cdot (x + log\, x)\, dx =$

$x \cdot (x + log\, x) - \int x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x^2 + x\, log\, x - \int (x+1)\, dx =$

$x^2 + x\, log\, x - \frac{1}{2}x^2 - x + c = \frac{1}{2}x^2 - x + x\, log\, x + c$.

7) Per $x \neq 0$ la funzione f è ottenuta da somme e combinazioni di funzioni continue e derivabili quindi risulta continua e derivabile, per studiare la continuità nel punto $x = 0$ consideriamo i limiti: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x + sen(2x) = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} mx + q = q$, pertanto la f è continua in $x = 0$ se e solo se $q = 0$; per la derivabilità abbiamo: $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x + sen(2x)}{x} = 3$

e $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{mx}{x} = m$. La funzione è continua e derivabile su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $q = 0$ e $m = 3$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(O) = \nabla z(O) \cdot \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}$.
$z(O) = 1$, $\nabla z = \left((1 + 3y^2)e^{x+3xy^2}, 6xye^{x+3xy^2}\right)$, $\nabla z(O) = (1, 0)$. Equazione del piano tangente: $z - 1 = 1(x - 0) + 0(y - 0)$, oppure $x - z = -1$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2016-2017)

20 settembre 2017

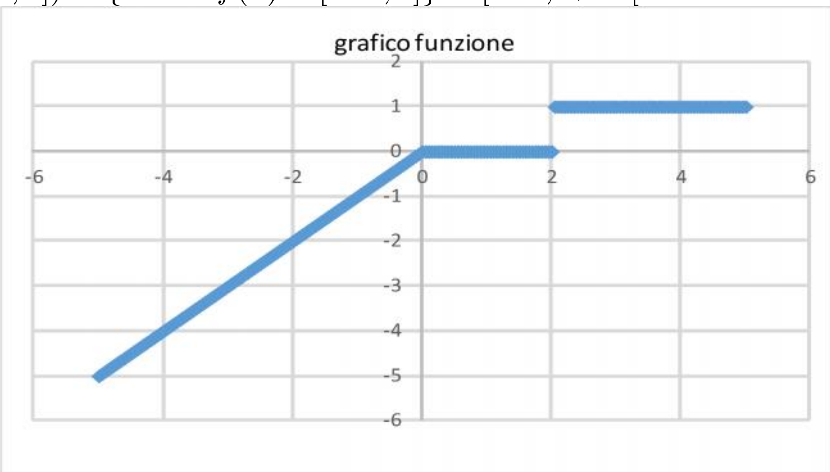
Compito $\mathbb{A}$

1) Costruiamo la tavola di verità ed escludiamo l'unica riga dove la proposizione $p \Rightarrow q$ è falsa:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$\neg(q \Rightarrow p)$	$\neg(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)$
V	V	V	F	F	V
V	F	F	$\cancel{V}$	$\cancel{F}$	$\cancel{F}$
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

Come è facile notare nell'ultima colonna, sotto l'ipotesi che $p \Rightarrow q$ è vera, la proposizione $\neg(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow p)$ è vera.

2) Il grafico della $f(x)$ è riportato in basso,
$f([-1,1]) = \{y \in \mathbb{R}: y = f(x) \wedge x \in [-1,1]\} = [-1,0]$,
$f^{-1}([-1,1]) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in [-1,1]\} = [-1,+\infty[$.



3) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 1\} =]-1,1[$,
$B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x - 1 < 3 - 3 \cdot 2^x\} = \{x \in \mathbb{R}: 4 \cdot 2^x < 4\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^x < 1\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: x < 0\} =]-\infty, 0[$; $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 0\} =]-1,0[$,
$\delta(A \cap B) = \{-1, 0\}$, $\mathcal{C}(A \cup B) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 1\} = [1,+\infty[$,
$\delta(\mathcal{C}(A \cup B)) = \{1\}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(1 - cos\,x)}{sen\,x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(1 - cos\,x)}{1 - cos\,x} \cdot \dfrac{1 - cos\,x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{sen\,x^2} =$
$1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$; per $x \to +\infty$, e^x, x^5, $cos\,x$ ed e^{-x} sono tutti o-piccoli di 3^x,
pertanto $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x + e^x + x^5}{cos\,x - e^{-x} - 3^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{-3^x} = -1$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
$y(-x) = (-x)^2 e^{1-2(-x)} = x^2 e^{1+2x}$, funzione nè pari, nè dispari.
Segno: $x^2 e^{1-2x} \geq 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$, perché prodotto fra quantità non negative,
$y(0) = 0$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{1-2x} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$;

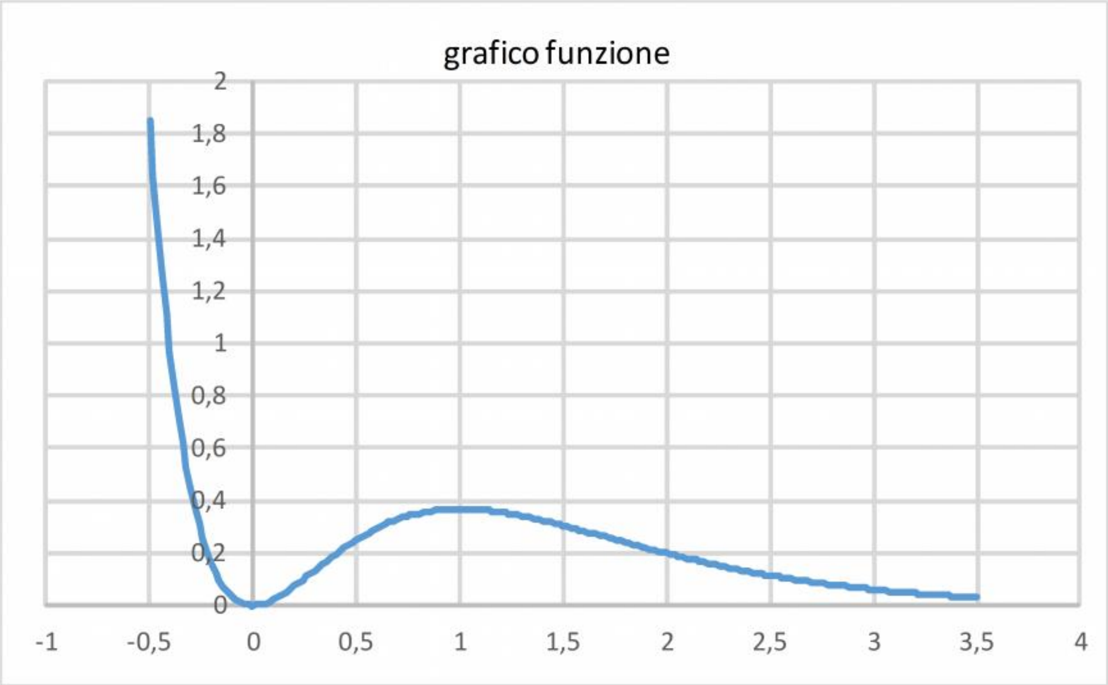
$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{1-2x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{1-2x} = (\to -\infty) \cdot (\to +\infty) = -\infty;$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{1-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{2x-1}} = 0$ in quanto $x^2 = o(e^{2x-1})$ per $x \to +\infty$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2xe^{1-2x} + x^2 e^{1-2x}(-2) = 2x(1-x)e^{1-2x}$, $y' \geq 0, \forall x \in [0,1]$, funzione strettamente crescente in $[0,1]$, strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $[1, +\infty[$; minimo assoluto nel punto $O(0,0)$, massimo relativo in $M(1, e^{-1})$.

Concavità e convessità: il.massimo nel punto $x = 1$ insieme ad i due punti di flesso di ascissa positiva portano a concludere che la funzione è strettamente concava in $[x_1, x_2]$ con $0 < x_1 < 1 < x_2$, strettamente convessa altrimenti.

Grafico:



6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x - sen(2x)}{x^2 + cos(2x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,x - 2\,sen(2x)}{x^2 + cos(2x)}\, dx =$
$\left[\frac{1}{2} log|x^2 + cos(2x)|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} log\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = log\left(\frac{\pi}{4}\right).$

7) Per $x \neq 0$ la funzione f è ottenuta da somme e prodotti di funzioni continue e derivabili, quindi risulta continua e derivabile; per studiare la continuità nel punto $x = 0$ consideriamo i limiti: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a - x \cdot cos\, x = a$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} b \cdot x = 0$, pertanto la f è continua in $x = 0$ se e solo se $a = 0$; per la derivabilità abbiamo: $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x \cdot cos\, x}{x} = -1$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{b \cdot x}{x} = b$. La funzione è continua e derivabile su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $a = 0$ e $b = -1$.

8) $\nabla f = (3x^2 y, x^3 + 8yz, 4y^2)$, $\nabla f(1,0,1) = (0,1,0)$.

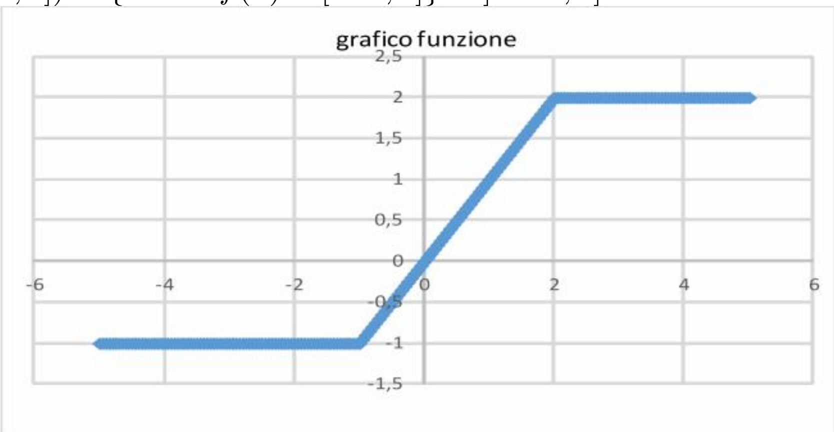
Compito $\mathbb{B}$

1) Costruiamo la tavola di verità ed escludiamo l'unica riga dove la proposizione $q \Rightarrow p$ è falsa:

p	q	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q)$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$	$\cancel{V}$
F	F	V	V	F	F

Come è facile notare nell'ultima colonna, sotto l'ipotesi che $q \Rightarrow p$ è vera, la proposizione $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$ è falsa.

2) Il grafico della $f(x)$ è riportato in basso,
$f([-1,1]) = \{y \in \mathbb{R}: y = f(x) \wedge x \in [-1,1]\} = [-1,1]$,
$f^{-1}([-1,1]) = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \in [-1,1]\} =]-\infty, 1]$.

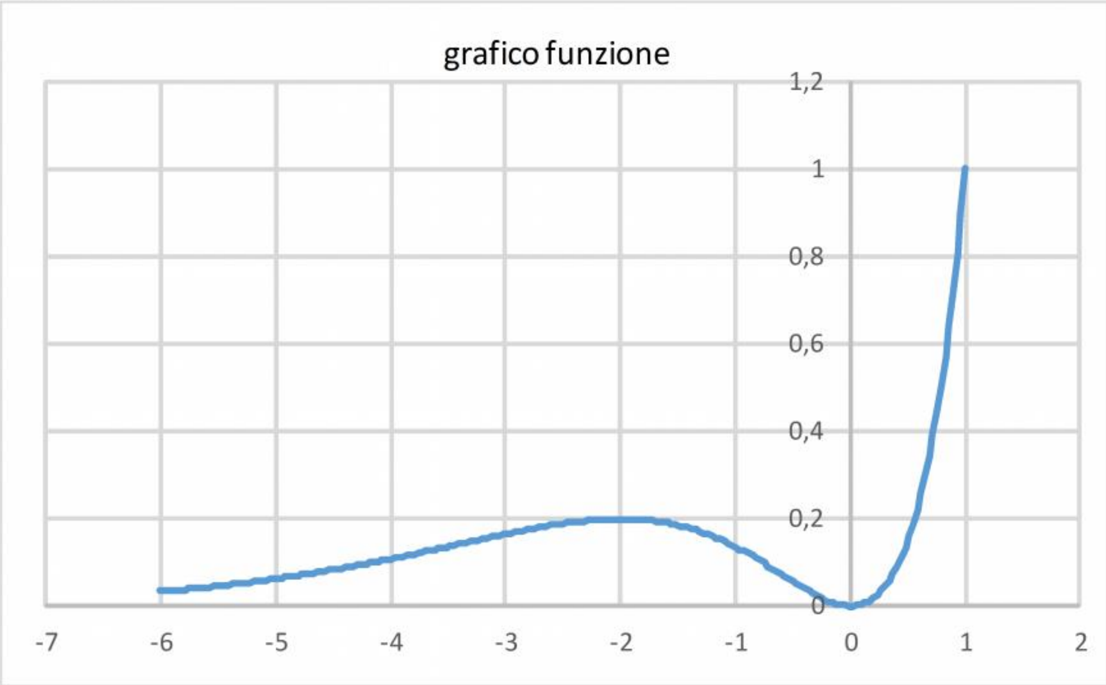


3) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 2\} = [-2,2]$,
$B = \{x \in \mathbb{R}: e^x - 3 > 1 - e^x\} = \{x \in \mathbb{R}: 2 \cdot e^x > 4\} = \{x \in \mathbb{R}: e^x > 2\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: x > log\, 2\} =]log\, 2, +\infty[$; $A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -2\} = [-2, +\infty[$,
$\delta(A \cup B) = \{-2\}\{-1,0\}$, $A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: log\, 2 < x \leq 2\} =]log\, 2, 2]$,
$\delta(A \cap B) = \{log\, 2, 2\}$.

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(sen\, x)}{tg\, x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(sen\, x)}{sen^2 x} \cdot \dfrac{sen^2 x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{tg\, x^2} =$
$\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$; per $x \to +\infty$, x^3 ed 2^x sono o-piccolo di e^x, mentre $sen\, x$ ed e^{-x} sono o-piccoli di 3^x, pertanto $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + e^x + 2^x}{sen\, x - e^{-x} + 3^x} =$
$\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e}{3}\right)^x = 0$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
$y(-x) = (-x)^2 e^{(-x)-1} = x^2 e^{-x-1}$, funzione nè pari, nè dispari.
Segno: $x^2 e^{x-1} \geq 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$, perché prodotto fra quantità non negative,
$y(0) = 0$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{x-1} = = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^{1-x}} = 0$ in quanto $x^2 = o(e^{1-x})$ per $x \to -\infty$;
asintoto orizzontale sx di equazione $y = 0$;
$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{x-1} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 e^{x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} x e^{x-1} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} = x(2+x)e^{x-1}$,
$y' \geq 0, \forall x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, funzione strettamente crescente in $]-\infty, -2]$ e in $[0, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-2, 0]$; massimo relativo nel punto $M(-2, 4e^{-3})$, minimo assoluto in $O(0,0)$, .
Concavità e convessità: il.massimo nel punto $x = -2$ insieme ad i due punti di flesso di ascissa negativa portano a concludere che la funzione è strettamente concava in $[x_1, x_2]$ con $x_1 < -2 < x_2 < 0$, strettamente convessa altrimenti.
Grafico:



6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - sen(2x)}{x^2 + cos(2x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,x - 2\,sen(2x)}{x^2 + cos(2x)}\, dx =$
$\left[\frac{1}{2} log|x^2 + cos(2x)|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} log\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 1\right)$.

7) Per $x \neq 0$ la funzione f è ottenuta da somme e prodotti di funzioni continue e derivabili, quindi risulta continua e derivabile; per studiare la continuità nel punto $x = 0$ consideriamo i limiti: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} a \cdot x = 0$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} b + x \cdot cos\, x = b$, pertanto la f è continua in $x = 0$ se e solo se $b = 0$; per la derivabilità abbiamo: $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{a \cdot x}{x} = a$ e $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot cos\, x}{x} = 1$. La funzione è continua e derivabile su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $a = 1$ e $b = 0$.

8) $\nabla f = (y + 10xz, x, 5x^2)$, $\nabla f(1,1,0) = (1,1,5)$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2016-2017)

14 ottobre 2017

Compito Unico

1) Nel caso in cui la bandiera ha tre bande verticali tutte a colori distinti si hanno 8 modi distinti per la scelta del colore sulla prima banda, 7 modi per la seconda e 6 modi per la terza, le possibili bandiere sono $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Se invece si richiede che la bandiera abbia colori distinti su bande adiacenti, si hanno 8 modi distinti per la scelta del colore sulla banda di sinistra, 7 modi per la banda di centro e 7 modi per la restante banda, le possibili bandiere sono $8 \cdot 7^2 = 392$.

2) $f(g(x)) = f(4^{x-1}) = \sqrt[3]{1+4^{x-1}}$; $g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{1+x}\right) = 4^{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

$$g(h(x)) = \begin{cases} g(1) & \text{se } x \le 1 \\ g(x+1) & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \le 1 \\ 4^x & \text{se } x > 1 \end{cases};$$

$$f(f(g(x))) = f\left(\sqrt[3]{1+4^{x-1}}\right) = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+4^{x-1}}}.$$

3) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} a = a$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 + x^3 = 0$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 + x^3 = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x + b = 1 + b$.

Per le condizioni di continuità f è continua su $\mathbb{R}$ se e solo se $a = 0$ e $2 = 1 + b$ ovvero $a = 0$ e $b = 1$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{tg\,x + sen\,x}{x + sen^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{tg\,x}{x} + \frac{sen\,x}{x}}{1 + \frac{sen^2 x}{x^2} \cdot x} = \frac{1+1}{1+1\cdot 0} = 2\,;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^{\frac{1}{e^x}}} = \frac{e^{(x \to +\infty)}}{e^{(x \to 0)}} = \frac{(x \to +\infty)}{(x \to 1)} = +\infty.$$

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

$y(-x) = e^{(-x)^2 + \frac{1}{(-x)^2}} = e^{x^2 + \frac{1}{x^2}} = y(x)$, funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), la studiamo solo nei reali positivi ed operiamo per simmetria.

Segno: $e^{x^2+\frac{1}{x^2}} > 0$, vera $\forall x > 0$, perché è una esponenziale, funzione strettamente positiva.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^{x^2+\frac{1}{x^2}} = e^{(\to 0)+(\to +\infty)} = +\infty$ asintoto verticale di equazione $x = 0$;

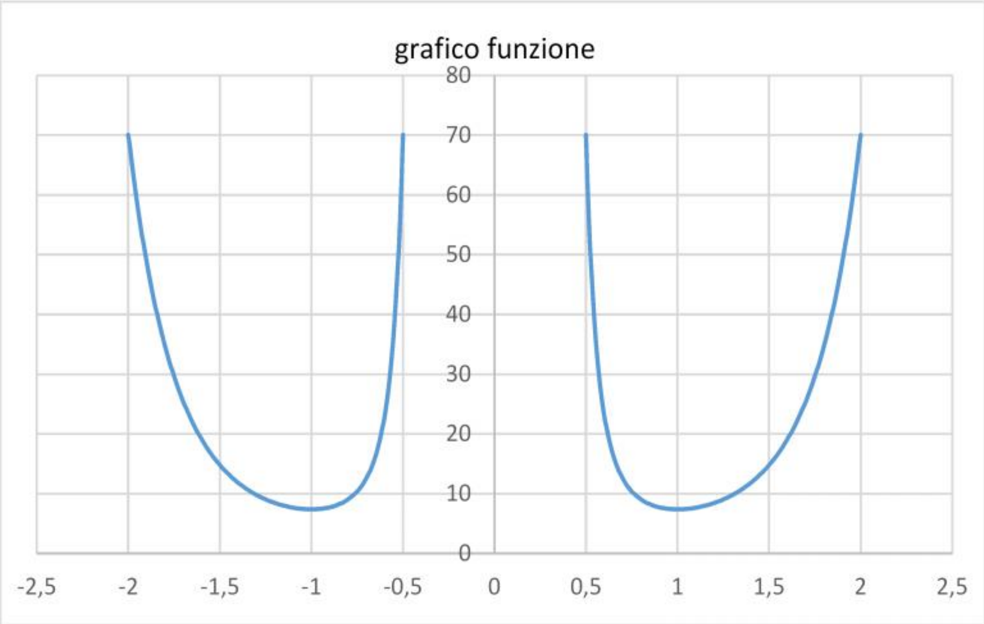
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2+\frac{1}{x^2}} = e^{(\to +\infty)+(\to 0)} = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2+\frac{1}{x^2}}}{x} = +\infty$ in quanto per $x \to +\infty$, $e^{x^2+\frac{1}{x^2}} \asymp e^{x^2}$, $x = o\left(e^{x^2}\right)$ e di conseguenza $x = o\left(e^{x^2+\frac{1}{x^2}}\right)$; la funzione non presenta nè asintoto orizzontale, nè asintoto obliquo.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x^2+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(2x - \frac{2}{x^3}\right) = \frac{2e^{x^2+\frac{1}{x^2}}}{x^3} \cdot \left(x^4 - 1\right)$,

$y' \ge 0$ se $x^4 - 1 \ge \ \Rightarrow x \ge 1$, funzione strettamente crescente in $[1, +\infty[$, strettamente decrescente in $]0, 1]$; minimo assoluto pari a $y(1) = e^2$ nel punto di ascissa $x = 1$.

Grafico:



6) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int_1^2 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_1^2 =$

$\left(\frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} 2^{\frac{2}{3}} \right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) = \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{13}{6} = \frac{8\sqrt{2} + 9\sqrt[3]{4} - 13}{6}$.

7) Per una funzione di equazione $y = f(x)$ derivabile nel punto x_0, l'equazione della retta ad essa tangente è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Nel caso specifico risulta $f(0) = e^0 + 0 = 1$, $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x + 1$ e $f'(0) = e^0 \cdot 0 + 1 = 1$, pertanto la retta cercata ha equazione $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$ ovvero $y = x + 1$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$.

$z(P) = 3$, $\nabla z = \left(3x^2 y + 2\,\frac{1}{y}, x^3 - 2\,\frac{x}{y^2} \right)$, $\nabla z(P) = (5, -1)$. Equazione del piano tangente: $z - 3 = 5(x - 1) - 1(y - 1)$, oppure $5x - y - z = 1$.