

# Università degli Studi di Siena

Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2018-19)

5 novembre 2018

Il compito è diviso in 5 esercizi che presentano tutti valutazione pari a 6, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 30; gli studenti che ottengono in questa prova una votazione non inferiore a 18 hanno diritto a 2 punti di bonus per tutte le prove scritte di Matematica Generale nel corrente anno accademico, tempo a disposizione 75 minuti.

## Compito **A1**

- 1) Siano  $p, q$  e  $r$  tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta  $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg(q \vee p))$ .
- 2) Se  $\binom{n}{126} = \binom{n}{87}$ , quale è il valore di  $n$ ?
- 3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-2, 2]$ , codominio  $[-1, 1]$  e
$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{per } -2 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{per } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$
. Si disegni il suo grafico e i grafici delle funzioni  $|f(x)|$  (valore assoluto di  $f(x)$ ) e  $f(|x|)$  ( $f$  del valore assoluto di  $x$ ).
- 4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\text{sen } x-x} - 1}{8x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(10x+1)^{15} - 1}{x}$ .
- 5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow -2} 6 + 2x$ .

## Compito **A2**

- 1) Siano  $p, q$  e  $r$  tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta  $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow \neg((r \wedge p) \Rightarrow \neg q)$ .
- 2) Se  $\binom{n}{23} = \binom{n}{255}$ , quale è il valore di  $n$ ?
- 3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-2, 2]$ , codominio  $[-1, 1]$  e
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{per } -2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{x^2}{4} & \text{per } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$
. Si disegni il suo grafico e i grafici delle funzioni  $|f(x)|$  (valore assoluto di  $f(x)$ ) e  $f(|x|)$  ( $f$  del valore assoluto di  $x$ ).
- 4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4^x - 1)}{2x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^{30} - 1}{x}$ .
- 5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x - 4$ .

## Compito **A3**

- 1) Siano  $p, q$  e  $r$  tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta  $\neg(\neg(r \wedge p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ .
- 2) Se  $\binom{n}{41} = \binom{n}{320}$ , quale è il valore di  $n$ ?
- 3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-2, 2]$ , codominio  $[-1, 1]$  e
$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$
. Si disegni il suo grafico e i grafici delle funzioni  $|f(x)|$  (valore assoluto di  $f(x)$ ) e  $f(|x|)$  ( $f$  del valore assoluto di  $x$ ).

4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(e^x - 1)}{5x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x + 1)^5 - 1}{x}$ .

5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x + \frac{5}{2}$ .

### Compito A4

1) Siano  $p$ ,  $q$  e  $r$  tre proposizioni semplici, costruire la tavola di verità della proposizione composta  $\neg((r \Rightarrow p) \wedge q) \Rightarrow (p \vee \neg q)$ .

2) Se  $\binom{n}{1} = \binom{n}{523}$ , quale è il valore di  $n$ ?

3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-2, 2]$ , codominio  $[-1, 1]$  e

$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{per } -2 \leq x < 0 \\ \log_2(1 + \frac{x}{2}) & \text{per } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ . Si disegni il suo grafico e i grafici delle funzioni  $|f(x)|$  (valore assoluto di  $f(x)$ ) e  $f(|x|)$  ( $f$  del valore assoluto di  $x$ ).

4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arctg 3x} - 1}{6x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1)^{25} - 1}{30x}$ .

5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow -7} 3 - 2x$ .

### Compito Z1

1) Siano  $p$ ,  $q$  e  $r$  tre proposizioni semplici; se almeno due fra le proposizioni semplici  $p$ ,  $q$  e  $r$  sono vere, costruisci la tavola di verità della proposizione composta  $(\neg r \Rightarrow (q \Leftrightarrow p))$ .

2) Si riduca ad un solo coefficiente binomiale la seguente somma:

$$\binom{44}{12} + 2 \cdot \binom{44}{11} + \binom{44}{10}.$$

3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-1, 1]$ , codominio  $[-1, 0]$  e

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ 2x - 2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ . Si disegni il suo grafico e si determini

l'insieme  $f([-1, 0])$ , immagine dell'insieme  $[-1, 0]$ , e l'insieme  $f^{-1}([-1, -1/2])$ , controimmagine dell'insieme  $[-1, -1/2]$ .

4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctg x)}{x^2 + x^4}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 1)^{\frac{1}{5x^2}}$ .

5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-3}$ .

### Compito Z2

1) Siano  $p$ ,  $q$  e  $r$  tre proposizioni semplici; se almeno due fra le proposizioni semplici  $p$ ,  $q$  e  $r$  sono false, costruisci la tavola di verità della proposizione composta  $((p \vee r) \Leftrightarrow \neg q)$ .

2) Si riduca ad un solo coefficiente binomiale la seguente somma:

$$\binom{54}{19} + 2 \cdot \binom{54}{18} + \binom{54}{17}.$$

3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-1, 1]$ , codominio  $[-1, 0]$  e

$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ . Si disegni il suo grafico e si determini l'insieme

$f([0, 1])$ , immagine dell'insieme  $[0, 1]$ , e l'insieme  $f^{-1}([-1/2, 0])$ , controimmagine dell'insieme  $[-1/2, 0]$ .

4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^4 - x^2}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 1)^{\frac{2}{x^2}}$ .

5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x-2}$ .

### Compito Z3

1) Siano  $p, q$  e  $r$  tre proposizioni semplici; se almeno due fra le proposizioni semplici  $p, q$  e  $r$  sono false, costruisci la tavola di verità della proposizione composta  $(\neg(p \wedge r) \Rightarrow q)$ .

2) Si riduca ad un solo coefficiente binomiale la seguente somma:

$$\binom{154}{30} + 2 \cdot \binom{154}{29} + \binom{154}{28}.$$

3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-1, 1]$ , codominio  $[0, 1]$  e

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}. \text{ Si disegni il suo grafico e si determini}$$

l'insieme  $f([0, 1])$ , immagine dell'insieme  $[0, 1]$ , e l'insieme  $f^{-1}([1/2, 1])$ , controimmagine dell'insieme  $[1/2, 1]$ .

4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{x^2 - 6x^3}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x^2)^{\frac{3}{x^2}}$ .

5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{-x}$ .

### Compito Z4

1) Siano  $p, q$  e  $r$  tre proposizioni semplici; se almeno due fra le proposizioni semplici  $p, q$  e  $r$  sono vere, costruisci la tavola di verità della proposizione composta  $\neg((p \Rightarrow r) \vee q)$ .

2) Si riduca ad un solo coefficiente binomiale la seguente somma:

$$\binom{77}{53} + 2 \cdot \binom{77}{52} + \binom{77}{51}.$$

3) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-1, 1]$ , codominio  $[0, 1]$  e

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ \log_3(1 + 2x) & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}. \text{ Si disegni il suo grafico e si determini}$$

l'insieme  $f([-1, 0])$ , immagine dell'insieme  $[-1, 0]$ , e l'insieme  $f^{-1}([1/2, 1])$ , controimmagine dell'insieme  $[1/2, 1]$ .

4) Calcola i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{1-\cos x} - 1}{x^2 + x^3}$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{5}{3}x^4\right)^{\frac{1}{x^4}}$ .

5) Calcola il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verifica il risultato trovato:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x}$ .