Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 17-18)

11 novembre 2017

Compito **A1**

1)

p	q	r	$\neg p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow r$	$q \vee \neg p$	$r \Leftrightarrow (q \vee \neg p)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F		
V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F		
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V		

.

2) $f(g(x)) = f(3^{-x}) = log(1+3^{-x})$; $g(f(x)) = g(log(1+x)) = 3^{-log(1+x)}$;

$g(h(x)) = \begin{cases} g(1) & \text{se } x \leq 1 \\ g(x+1) & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 3^{-1} & \text{se } x \leq 1 \\ 3^{-(x+1)} & \text{se } x > 1 \end{cases}$;

$f(f(g(x))) = f(log(1+3^{-x})) = log(1+log(1+3^{-x}))$.

3) La prima cifra del numero non può essere nulla, pertanto si hanno $\binom{5}{3}$ modi distinti di scegliere dove posizionare i tre zeri, per ognuna delle restanti tre cifre vi sono 9 modi distinti di scelta, pertanto tutti numeri che soddisfano le condizioni richieste sono $\binom{5}{3} \cdot 9^3 = 7.290$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{arctg\, x} - 1}{tg(5x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{arctg\, x} - 1}{arctg\, x} \cdot \dfrac{arctg\, x}{x} \cdot \dfrac{5x}{tg(5x)} \cdot \dfrac{1}{5} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{5}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+3}\right)^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{x} = e^3$.

5) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3-x}{5} = \dfrac{4}{5}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\dfrac{3-x}{5} - \dfrac{4}{5}\right| = \left|\dfrac{1}{5}(x+1)\right| = \dfrac{1}{5}|x+1|$, posto $\dfrac{1}{5}|x+1| < \epsilon$ risulta $|x+1| < 5\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = 5\epsilon$, limite verificato.

Compito **A2**

1)

p	q	r	$r \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow p$	$\neg q \wedge p$	$r \Rightarrow (\neg q \wedge p)$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	F	V		
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F		
F	F	F	V	F		

.

2) $f(g(x)) = f(sen(\pi x)) = \sqrt[5]{1 + sen(\pi x)}$;

$g(f(x)) = g\left(\sqrt[5]{1+x}\right) = sen\left(\pi\sqrt[5]{1+x}\right)$;

$f(h(x)) = \begin{cases} f(-1) & \text{se } x \le -1 \\ f(1+2x) & \text{se } x > -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le -1 \\ \sqrt[5]{2(1+x)} & \text{se } x > -1 \end{cases}$;

$g(f(g(x))) = g\left(\sqrt[5]{1+sen(\pi x)}\right) = sen\left(\pi\sqrt[5]{1+sen(\pi x)}\right)$.

3) La prima cifra del numero non può essere nulla, pertanto si hanno $\binom{5}{2}$ modi distinti di scegliere dove posizionare i due zeri, per ognuna delle restanti quattro cifre vi sono 9 modi distinti di scelta, pertanto tutti numeri che soddisfano le condizioni richieste sono $\binom{5}{2} \cdot 9^4 = 65.610$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(1-\cos x)}{sen\, x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(1-\cos x)}{1-\cos x} \cdot \dfrac{1-\cos x}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{sen\, x^2} = 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x} = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$.

5) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2+x}{3} = \dfrac{4}{3}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\dfrac{2+x}{3} - \dfrac{4}{3}\right| = \left|\dfrac{1}{3}(x-2)\right| = \dfrac{1}{3}|x-2|$, posto $\dfrac{1}{3}|x-2| < \epsilon$ risulta $|x-2| < 3\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = 3\epsilon$, limite verificato.

Compito A3

1)

p	q	r	$q \Rightarrow \neg r$	$p \Rightarrow r$	$q \wedge p$	$(q \wedge p) \Rightarrow \neg r$
V	V	V	F	V		
V	V	F	V	F		
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F		
F	V	V	F	V		
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

.

2) $f(g(x)) = f(log(1-3x)) = 4^{2-log(1-3x)}$; $g(f(x)) = g(4^{2-x}) = log(1-3 \cdot 4^{2-x})$;

$f(h(x)) = \begin{cases} f(0) & \text{se } x < 0 \\ f(-2x) & \text{se } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 16 & \text{se } x < 0 \\ 4^{2(1+x)} & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$;

$g(f(g(x))) = g\left(4^{2-log(1-3x)}\right) = log\left(1-3 \cdot 4^{2-log(1-3x)}\right)$.

3) La prima cifra del numero non può essere nulla, pertanto si hanno $\binom{7}{3}$ modi distinti di scegliere dove posizionare i tre zeri, per ognuna delle restanti cinque cifre vi sono 9 modi distinti di scelta, pertanto tutti numeri che soddisfano le condizioni richieste sono $\binom{7}{3} \cdot 9^5 = 2.066.715$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\left(5^{x^2}-1\right)}{sen\, x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\left(5^{x^2}-1\right)}{5^{x^2}-1} \cdot \dfrac{5^{x^2}-1}{x^2} \cdot \dfrac{x}{sen\, x} \cdot x = 1 \cdot log\, 5 \cdot 1 \cdot 0 = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}} = \dfrac{1}{e^{-2}} = e^2$.

5) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+1}{8} = -\dfrac{1}{4}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\dfrac{x+1}{8} + \dfrac{1}{4}\right| = \left|\dfrac{1}{8}(x+3)\right| =$

$\frac{1}{8}|x+3|$, posto $\frac{1}{8}|x+3| < \epsilon$ risulta $|x+3| < 8\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = 8\epsilon$, limite verificato.

Compito $\mathbb{A}4$

1)

p	q	r	$\neg q \Rightarrow p$	$r \Rightarrow p$	$\neg(q \vee r)$	$\neg(q \vee r) \Rightarrow p$
V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F		
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F		
F	F	F	F	V		

.

2) $f(g(x)) = f\left(\sqrt{log(2x)}\right) = 3 - \left(\sqrt{log(2x)}\right)^3$;

$g(f(x)) = g(3-x^3) = \sqrt{log(2(3-x^3))}$;

$g(h(x)) = \begin{cases} g(x^2+1) & \text{se } x < 0 \\ g(1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{log(2(x^2+1))} & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{log\,2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$;

$f(f(g(x))) = f\left(3 - \left(\sqrt{log(2x)}\right)^3\right) = 3 - \left(3 - \left(\sqrt{log(2x)}\right)^3\right)^3$.

3) La prima cifra del numero non può essere nulla, pertanto si hanno $\binom{6}{4}$ modi distinti di scegliere dove posizionare i quattro zeri, per ognuna delle restanti tre cifre vi sono 9 modi distinti di scelta, pertanto tutti numeri che soddisfano le condizioni richieste sono $\binom{6}{4} \cdot 9^3 = 10.935$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{log(1+x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x^2}-1}{3x^2} \cdot \frac{x^2}{log(1+x^2)} \cdot 3 = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^{-4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{4x} = e^8$.

5) $\lim\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x-3}{6} = \frac{7}{6}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{2x-3}{6} - \frac{7}{6}\right| = \left|\frac{1}{3}(x-5)\right| = \frac{1}{3}|x-5|$, posto $\frac{1}{3}|x-5| < \epsilon$ risulta $|x-5| < 3\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = 3\epsilon$, limite verificato.

Compito $\mathbb{Z}1$

1)

p	q	r	$\neg p \Leftrightarrow r$	$\neg(q \vee r)$	$q \vee p$	$r \Rightarrow (q \vee p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F		
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V		
F	V	V	V	F		
F	V	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F		
F	F	F	F	V		

.

2) Un numero palindromo di nove cifre che presenta esattamente una sola cifra 0 deve necessariamente presentare la cifra 0 in quinta posizione, ognuna delle prime quattro

cifre può essere scelta in 9 modi distinti e le ultime quattro cifre devono necessariamente essere uguali alle prime quattro prese in ordine inverso, pertanto i numeri richiesti sono $9^4 = 6.561$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3^{x-1} > 27\} = \{x \in \mathbb{R}: 3^{x-1} > 3^3\} = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 > 3\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 4\} =]4, +\infty[$; $A \cap B =]4, 10]$, $A \cup B = [-10, +\infty[$, $\mathcal{D}(A \cap B) = [4, 10]$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + arctg\, x} - 1}{x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + arctg\, x} - 1}{arctg\, x} \cdot \dfrac{arctg\, x}{x} \cdot \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$; per $x \to +\infty$, $3x = o(x^2)$ e $5 = o(2x^2)$, ne segue che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5}\right)^{3-x^3} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2}\right)^{3-x^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(\to -\infty)} = +\infty.$$

5) Per $x \to 0$ dati l'infinitesimo $f(x)$ e l'infinitesimo campione $g(x)$, se esistono $\alpha \neq 0$ e $\beta > 0$ tali per cui $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{\alpha \cdot (g(x))^\beta} = 1$, β e $\alpha \cdot (g(x))^\beta$ sono rispettivamente l'ordine e la parte principale di $f(x)$ rispetto a $g(x)$. Nel caso specifico nota che $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + 3x^4)}{x^4} = 3$ e quindi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + 3x^4)}{3 \cdot x^4} = 1$; concludiamo che $log(1 + 3x^4)$ è infinitesimo di ordine 4 rispetto all'infinitesimo campione x e la sua parte principale è $3 \cdot x^4$.

Compito $\mathbb{Z}2$

1)

p	q	r	$q \Leftrightarrow \neg r$	$q \wedge p$	$q \vee r$	$(q \vee r) \Rightarrow \neg p$
V	V	V	F	V		
V	V	F	V	V		
V	F	V	V	F		
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F		
F	F	V	V	F		
F	F	F	F	F	F	V

.

2) Un numero palindromo di cinque cifre che presenta esattamente una sola cifra 0 deve necessariamente presentare la cifra 0 in terza posizione, ognuna delle prime due cifre può essere scelta in 9 modi distinti e le ultime due cifre devono necessariamente essere uguali alle prime due prese in ordine inverso, pertanto i numeri richiesti sono $9^2 = 81$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: 4^{2x+1} \leq 16\} = \{x \in \mathbb{R}: 4^{2x+1} \leq 4^2\} = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 1 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1/2\} =]-\infty, 1/2]$; $A \cap B =]-3, 1/2]$, $A \cup B =]-\infty, 3[$, $\delta(A \cap B) = \{-3, 1/2\}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(1 - cos(2x))}{x^3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(1 - cos(2x))}{1 - cos(2x)} \cdot \dfrac{1 - cos(2x)}{4x^2} \cdot \dfrac{4}{x - 2} = 1 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot (-2) = -1$; per $x \to +\infty$, $3 = o(5x^2)$ e $5x + 1 = o(x^2)$, ne segue che

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2 + 3}{x^2 + 5x + 1}\right)^{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x^2}{x^2}\right)^{x^2} = 5^{(\to +\infty)} = +\infty.$$

5) Per $x \to 0$ dati l'infinitesimo $f(x)$ e l'infinitesimo campione $g(x)$, se esistono $\alpha \neq 0$ e $\beta > 0$ tali per cui $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\alpha \cdot (g(x))^{\beta}} = 1$, β e $\alpha \cdot (g(x))^{\beta}$ sono rispettivamente l'ordine e la parte principale di $f(x)$ rispetto a $g(x)$. Nel caso specifico nota che $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+tg^2x}-1}{x^2} = \frac{1}{2}$ e quindi $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+tg^2x}-1}{\frac{1}{2} \cdot x^2} = 1$; concludiamo che $\sqrt{1+tg^2x}-1$ è infinitesimo di ordine 2 rispetto all'infinitesimo campione x e la sua parte principale è $\frac{1}{2} \cdot x^2$.

Compito Z3

1)

p	q	r	$p \Leftrightarrow r$	$q \wedge r$	$\neg p \wedge r$	$(\neg p \wedge r) \Rightarrow \neg q$
V	V	V	V	V		
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F		
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V		
F	V	F	V	F		
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F		

.

2) Un numero palindromo di sette cifre che presenta esattamente una sola cifra 0 deve necessariamente presentare la cifra 0 in quarte posizione, ognuna delle prime tre cifre può essere scelta in 9 modi distinti e le ultime tre cifre devono necessariamente essere uguali alle prime tre prese in ordine inverso, pertanto i numeri richiesti sono $9^3 = 729$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: 5^{3x} \geq \frac{1}{25}\} = \{x \in \mathbb{R}: 5^{3x} \geq 5^{-2}\} = \{x \in \mathbb{R}: 3x \geq -2\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq -2/3\} = [-2/3, +\infty[$; $A \cap B = [-2/3, 2]$, $A \cup B = [-2, +\infty[$, $\mathcal{D}(A \cup B) = [-2, +\infty[$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{log(1 - arcsen\, x^3)}{x^3 + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1 - arcsen\, x^3)}{arcsen\, x^3} \cdot \frac{arcsen\, x^3}{x^3} \cdot \frac{x}{x+1} = -1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$; per $x \to -\infty$, $4x^2 = o(x^5)$ e $13 = o(2x^3)$, ne segue che $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^5 - 4x^2}{2x^3 + 13}\right)^{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^5}{2x^3}\right)^{-x^3} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-x^3} = (\to +\infty)^{(\to +\infty)} = +\infty$.

5) Per $x \to 0$ dati l'infinitesimo $f(x)$ e l'infinitesimo campione $g(x)$, se esistono $\alpha \neq 0$ e $\beta > 0$ tali per cui $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\alpha \cdot (g(x))^{\beta}} = 1$, β e $\alpha \cdot (g(x))^{\beta}$ sono rispettivamente l'ordine e la parte principale di $f(x)$ rispetto a $g(x)$. Nel caso specifico nota che $\lim_{x \to 0} \frac{tg(sen\, x^3)}{x^3} = 1$; concludiamo che $tg(sen\, x^3)$ è infinitesimo di ordine 3 rispetto all'infinitesimo campione x e la sua parte principale è x^3.

Compito $\mathbb{Z}4$

1)

p	q	r	$\neg r \Leftrightarrow q$	$\neg(p \vee r)$	$q \wedge r$	$p \Rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	F		
V	F	V	V	F		
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	V		
F	F	V	V	F		
F	F	F	F	V		

.

2) Un numero palindromo di undici cifre che presenta esattamente una sola cifra 0 deve necessariamente presentare la cifra 0 in sesta posizione, ognuna delle prime cinque cifre può essere scelta in 9 modi distinti e le ultime cinque cifre devono necessariamente essere uguali alle prime cinque prese in ordine inverso, pertanto i numeri richiesti sono $9^5 = 59.049$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: 2^{3+x} < \frac{1}{32}\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^{3+x} < 2^{-5}\} = \{x \in \mathbb{R}: 3 + x < -5\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -8\} =]-\infty, -8[$; $A \cap B =]-16, -8[$, $A \cup B =]-\infty, 0[$, $\delta(A \cup B) = \{0\}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsen(log(1-x))}{x^2 + 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{arcsen(log(1-x))}{log(1-x)} \cdot \frac{log(1-x)}{x} \cdot \frac{1}{x+5} = 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{5}$; per $x \to -\infty$, $x + 14 = o(x^2)$ e $3x^2 = o(x^4)$, ne segue che $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x + x^2 + 14}{x^4 + 3x^2}\right)^{2-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x^4}\right)^{2-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{2-x} = (\to 0^+)^{(\to +\infty)} = 0$.

5) Per $x \to 0$ dati l'infinitesimo $f(x)$ e l'infinitesimo campione $g(x)$, se esistono $\alpha \neq 0$ e $\beta > 0$ tali per cui $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{\alpha \cdot (g(x))^\beta} = 1$, β e $\alpha \cdot (g(x))^\beta$ sono rispettivamente l'ordine e la parte principale di $f(x)$ rispetto a $g(x)$. Nel caso specifico nota che $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{1-cos\,x} - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$ e quindi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{1-cos\,x} - 1}{\frac{1}{2} \cdot x^2} = 1$; concludiamo che $e^{1-cos\,x} - 1$ è infinitesimo di ordine 2 rispetto all'infinitesimo campione x e la sua parte principale è $\frac{1}{2} \cdot x^2$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)

17 gennaio 2018

Compito $\mathbb{W}$

1)

p	q	r	$q\ o\ r$	$p \Rightarrow (q\ o\ r)$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$(p \Rightarrow (q\ o\ r)) \Rightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$
V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F

Per le ipotesi poste consideriamo solo le quattro righe ove almeno due delle proposizioni semplici risultano false.

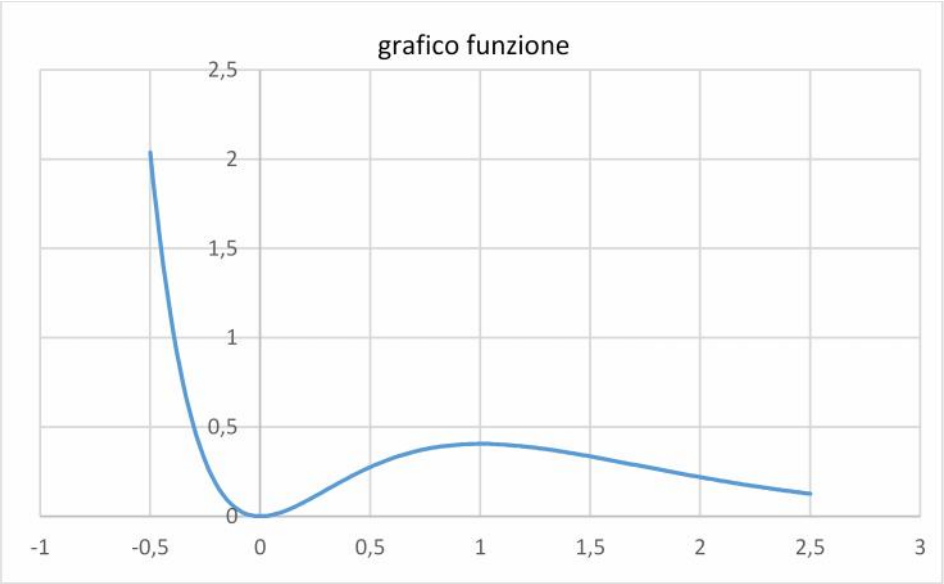
2) Se il numero deve avere cifre tutte distinte e diverse da 0, i possibili numeri sono dati dal numero di disposizioni semplici di 9 oggetti presi 7 a 7:
$\mathcal{D}_{9,7} = \dfrac{9!}{(9-7)!} = 181.440$; se invece una ed una sola cifra può essere presente al massimo due volte, al numero precedente dobbiamo aggiungere il numero di possibili alternative con una cifra che si ripete una sola volta, in questo caso abbiamo 9 modi distinti di scegliere la cifra che si ripete, $\binom{7}{2}$ modi distinti di scelta su dove posizionare la cifra che si ripete e $\mathcal{D}_{8,5}$ modi distinti per la scelta delle rimanenti cinque cifre, la risposta alla seconda domanda è quindi:
$181.440 + 9 \cdot \binom{7}{2} \cdot \dfrac{8!}{(8-5)!} = 1.451.520$.

3) $A =]-6,2[\cup \{z \in \mathbb{Z}: |z| \leq 4\} =]-6,2[\cup \{-4,\ -3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3, 4\} =$
$=]-6,2[\cup \{2,3,4\}$; $\delta(A) = \{-6, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{D}(A) = [-6, 2]$. Dato che $\delta(A) \nsubseteq A$ e $\delta(A) \nsubseteq \mathcal{C}(A)$, l'insieme è nè aperto nè chiuso.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen(2x) - 3x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen(2x) - 3x)}{sen(2x) - 3x} \cdot \left(\dfrac{sen(2x)}{x} - 3\right) =$
$1 \cdot (2-3) = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4x+1}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1/4}{x+1/4}\right)^x$; dato che per $x \to +\infty$, $x + 1/4 \asymp x$ concludiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4x+1}\right)^x = e^{1/4}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = 3(-x)^2 e^{-2(-x)} = 3x^2 e^{2x}$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione prodotto fra 3, un quadrato ed un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 e^{-2x} = (\to +\infty) e^{(\to +\infty)} = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 e^{-2x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x e^{-2x} = (\to -\infty) e^{(\to +\infty)} = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 e^{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{e^{2x}} = 0$, perché per $x \to +\infty$, $3x^2 = o(e^{2x})$;
asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = 6xe^{-2x} + 3x^2 e^{-2x}(-2) = 6x(1-x)e^{-2x}$.

$y' > 0 \Rightarrow x(1-x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$. Funzione strettamente crescente in $[0,1]$, strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $[1, +\infty[$, la funzione presenta minimo assoluto $O(0,0)$ e massimo relativo in $M\left(1, 3e^{-2}\right)$.
L'esistenza del massimo e del minimo insieme all'asintoto orizzontale dx implica che i due punti di flesso presentano entrambi ascissa positiva ed in particolare uno di ascissa compresa fra zero ed uno ed uno di ascissa maggiore di uno.
Grafico:



6) $\displaystyle\int \left(xe^{3x} - 2x\right) dx = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}\, dx - x^2 = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} - x^2 + k$.

7) L'equazione della retta tangente alla curva y nel punto di ascissa $x_0 = 1$ è
$y - y(1) = y'(1) \cdot (x-1)$; nel caso specifico $y(1) = f\left(\dfrac{1}{g(1) \cdot h(1)}\right) = f(1) = 1$,
$y'(x) = f'\left(\dfrac{1}{g(x) \cdot h(x)}\right) \cdot \left(-\dfrac{g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}{(g(x) \cdot h(x))^2}\right)$ e
$y'(1) = f'\left(\dfrac{1}{g(1) \cdot h(1)}\right) \cdot \left(-\dfrac{g'(1) \cdot h(1) + g(1) \cdot h'(1)}{(g(1) \cdot h(1))^2}\right) = f'(1) \cdot 1 = -1$.
Pertanto l'equazione richiesta è $y - 1 = -(x-1)$ ovvero $y = 2 - x$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ con $f'_x = -\dfrac{y^2 z^2 \cdot (1 - 3x^2 y)}{(x - x^3 y)^2}$,
$f'_y = \dfrac{2yz^2 \cdot (x - x^3 y) - y^2 z^2 \cdot (-x^3)}{(x - x^3 y)^2} = \dfrac{2xyz^2 - x^3 y^2 z^2}{(3y - z^2)^2}$ e $f'_z = \dfrac{2y^2 z}{x - x^3 y}$, con
$f'_x(P) = f'_y(P) = f'_z(P) = 0$; pertanto $\nabla f(P) = (0,0,0)$.

Compito $\mathbb{X}$

1)

p	q	r	$q\ e\ p$	$(q\ e\ p) \Rightarrow \neg r$	$p \Rightarrow q$	$((q\ e\ p) \Rightarrow \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V

Per le ipotesi poste consideriamo solo le quattro righe ove almeno due delle proposizioni semplici risultano vere.

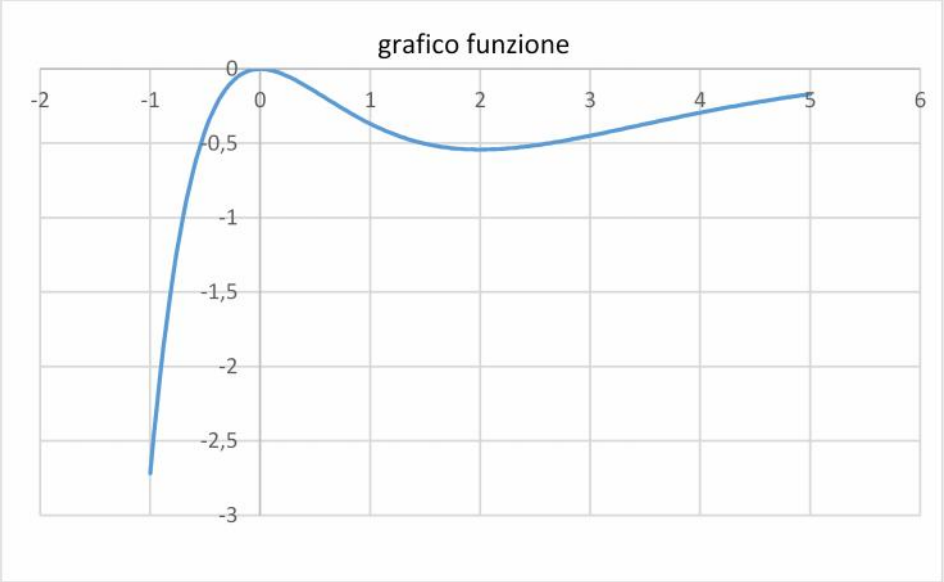
2) Se il numero deve avere cifre tutte distinte e diverse da 0, i possibili numeri sono dati dal numero di disposizioni semplici di 9 oggetti presi 8 a 8:
$\mathcal{D}_{9,8} = \dfrac{9!}{(9-8)!} = 362.880$; se invece una ed una sola cifra può essere presente al massimo due volte, al numero precedente dobbiamo aggiungere il numero di possibili alternative con una cifra che si ripete una sola volta, in questo caso abbiamo 9 modi distinti di scegliere la cifra che si ripete, $\binom{8}{2}$ modi distinti di scelta su dove posizionare la cifra che si ripete e $\mathcal{D}_{8,6}$ modi distinti per la scelta delle rimanenti sei cifre, la risposta alla seconda domanda è quindi:
$362.880 + 9 \cdot \binom{8}{2} \cdot \dfrac{8!}{(8-6)!} = 5.443.200$.

3) $A = [-8, 3[\cup \{z \in \mathbb{Z}: |z| \leq 5\} =$
$[-8, 3[\cup \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} = [-8, 3[\cup \{3, 4, 5\}$;
$\delta(A) = \{-8, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{D}(A) = [-8, 3]$. Dato che $\delta(A) \subseteq A$, l'insieme è chiuso.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg(x - sen(3x))}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg(x - sen(3x))}{x - sen(3x)} \cdot \left(1 - \dfrac{sen(3x)}{x}\right) =$
$1 \cdot (1 - 3) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x+1}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1/2}{x + 1/2}\right)^x$; dato che per $x \to +\infty$, $x + 1/2 \asymp x$ concludiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x+1}\right)^x = e^{1/2}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = -(-x)^2 e^{-(-x)} = -x^2 e^x$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \leq 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione prodotto fra l'opposto di un quadrato ed un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $O(0, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 e^{-x} = (\to -\infty) e^{(\to +\infty)} = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2 e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x e^{-x} = (\to +\infty) e^{(\to +\infty)} = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{e^x} = 0$, perché per $x \to +\infty$, $-x^2 = o(e^x)$;
asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = -2xe^{-x} - x^2 e^{-x}(-1) = x(x-2)e^{-x}$.
$y' > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$, strettamente decrescente in $[0, 2]$, la funzione presenta massimo assoluto $O(0, 0)$ e minimo relativo in $m\left(2, -4e^{-2}\right)$.

L'esistenza del massimo e del minimo insieme all'asintoto orizzontale dx implica che i due punti di flesso presentano entrambi ascissa positiva ed in particolare uno di ascissa compresa fra zero e due ed uno di ascissa maggiore di due.
Grafico:



6) $\displaystyle\int \left(xe^{4x} + 2x\right)\, dx \;=\; x \cdot \frac{e^{4x}}{4} - \int 1 \cdot \frac{e^{4x}}{4}\, dx + x^2 \;=\; x \cdot \frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + x^2 + k\,.$

7) L'equazione della retta tangente alla curva y nel punto di ascissa $x_0 = 1$ è $y - y(1) = y'(1) \cdot (x-1)$; nel caso specifico

$$y(1) = \frac{1}{f(g(1) \cdot h(1))} = \frac{1}{f(1)} \;=\; -1\,,$$

$$y'(x) = \; - \frac{f'(g(x) \cdot h(x)) \cdot (g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x))}{\left(f(g(x) \cdot h(x))\right)^2} \quad \text{e}$$

$$y'(1) = \; - \frac{f'(g(1) \cdot h(1)) \cdot (g'(1) \cdot h(1) + g(1) \cdot h'(1))}{\left(f(g(x) \cdot h(x))\right)^2} \;=\; - \frac{1 \cdot (-1)}{(-1)^2} = 1\,.$$

Pertanto l'equazione richiesta è $y + 1 = x - 1$ ovvero $y = x - 2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ con $f'_x = \dfrac{y^2}{3y - z^2}$, $f'_y = \dfrac{2xy \cdot (3y - z^2) - xy^2 \cdot 3}{(3y - z^2)^2} =$ $\dfrac{3xy^2 - 2xz^2}{(3y - z^2)^2}$ e $f'_z = \; - \dfrac{xy^2 \cdot (-2z)}{(3y - z^2)^2}$, con $f'_x(P) = f'_y(P) = f'_z(P) = 0$; pertanto $\nabla f(P) = (0, 0, 0)$.

Compito $\mathbb{Y}$

1)

p	q	r	$\neg(q\ e\ r)$	$p \Leftrightarrow \neg(q\ e\ r)$	$r \Rightarrow q$	$(p \Leftrightarrow \neg(q\ e\ r)) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V

Per le ipotesi poste consideriamo solo le quattro righe ove almeno due delle proposizioni semplici risultano vere.

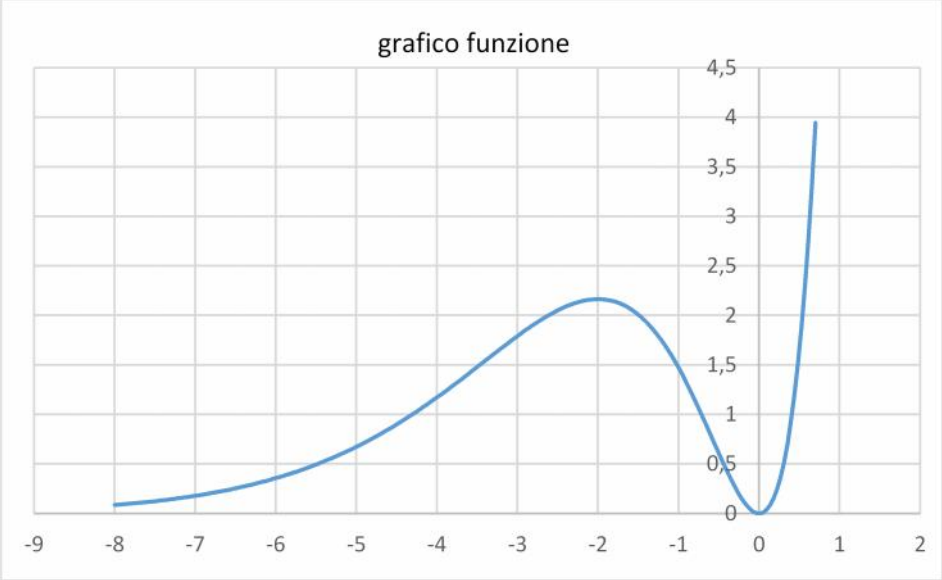
2) Se il numero deve avere cifre tutte distinte e diverse da 0, i possibili numeri sono dati dal numero di disposizioni semplici di 9 oggetti presi 5 a 5:
$\mathcal{D}_{9,5} = \dfrac{9!}{(9-5)!} = 15.120$; se invece una ed una sola cifra può essere presente al massimo due volte, al numero precedente dobbiamo aggiungere il numero di possibili alternative con una cifra che si ripete una sola volta, in questo caso abbiamo 9 modi distinti di scegliere la cifra che si ripete, $\binom{5}{2}$ modi distinti di scelta su dove posizionare la cifra che si ripete e $\mathcal{D}_{8,3}$ modi distinti per la scelta delle rimanenti tre cifre, la risposta alla seconda domanda è quindi:
$15.120 + 9 \cdot \binom{5}{2} \cdot \dfrac{8!}{(8-3)!} = 45.360$.

3) $A = [-1,9] \cup \{z \in \mathbb{Z}: |z| \le 2\} = [-1,9] \cup \{-2,-1,0,1,2\} = [-1,9] \cup \{-2\}$; $\delta(A) = \{-2,-1,9\}$, $\mathcal{D}(A) = [-1,9]$. Dato che $\delta(A) \subseteq A$, l'insieme è chiuso.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(3x + arctg(2x))}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(3x + arctg(2x))}{3x + arctg(2x)} \cdot \left(3 + \dfrac{arctg(2x)}{x}\right) = 1 \cdot (3+2) = 5$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x+1}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1/3}{x+1/3}\right)^x$; dato che per $x \to +\infty$, $x + 1/3 \asymp x$ concludiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{3x+1}\right)^x = e^{1/3}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = 4(-x)^2 e^{-x} = 4x^2 e^{-x}$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \ge 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione prodotto fra un quadrato ed un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} 4x^2 e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{e^{-x}} = 0$, perché per $x \to -\infty$, $4x^2 = o(e^{-x})$; asintoto orizzontale sx di equazione $y = 0$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^2 e^x = (\to +\infty) e^{(\to +\infty)} = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 4x e^x = (\to +\infty) e^{(\to +\infty)} = +\infty$;
Crescenza e decrescenza: $y' = 8xe^x + 4x^2 e^x = 4x(x+2)e^x$.
$y' > 0 \Rightarrow x(x+2) > 0 \Rightarrow x < -2 \vee x > 0$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -2]$ e in $[0, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-2, 0]$, la funzione presenta massimo relativo in $M(-2, 16e^{-2})$ e minimo assoluto in $O(0,0)$.
L'esistenza del massimo e del minimo insieme all'asintoto orizzontale sx implica che i due punti di flesso presentano entrambi ascissa negativa ed in particolare uno di ascissa inferiore a -2 ed uno di ascissa compresa fra -2 e zero.

Grafico:



6) $\displaystyle\int \left(xe^{3x} + 3x^2\right)\, dx \;=\; x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int 1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}\, dx + x^3 \;=\; x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + x^3 + k\,.$

7) L'equazione della retta tangente alla curva y nel punto di ascissa $x_0 = 1$ è $y - y(1) = y'(1) \cdot (x-1)$; nel caso specifico $y(1) = f\left(\dfrac{h(1)}{g(1)}\right) = f(1) = -1$,

$y'(x) = f'\left(\dfrac{h(x)}{g(x)}\right) \cdot \dfrac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ e

$y'(1) = f'\left(\dfrac{h(1)}{g(1)}\right) \cdot \dfrac{h'(1) \cdot g(1) - h(1) \cdot g'(1)}{(g(1))^2} = f'(1) \cdot \dfrac{1-1}{(-1)^2} = 0$. Pertanto l'equazione richiesta è $y + 1 = 0$ ovvero $y = -1$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ con $f'_x = -\dfrac{y^3 z \cdot 1}{(x - z^2)^2}$, $f'_y = \dfrac{3y^2 z}{x - z^2}$ e

$f'_z = \dfrac{y^3 \cdot (x - z^2) - y^3 z \cdot (-2z)}{(x - z^2)^2} = \dfrac{xy^3 + y^3 z^2}{(x - z^2)^2}$, con $f'_x(P) = f'_z(P) = 1$ e $f'_y(P) = 3$; pertanto $\nabla f(P) = (1, 3, 1)$.

Compito $\mathbb{Z}$

1)

p	q	r	$\neg(p\ o\ r)$	$r \Rightarrow p$	$\neg(p\ o\ r) \Rightarrow q$	$(r \Rightarrow p) \Rightarrow (\neg(p\ o\ r) \Rightarrow q)$
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Per le ipotesi poste consideriamo solo le quattro righe ove almeno due delle proposizioni semplici risultano false.

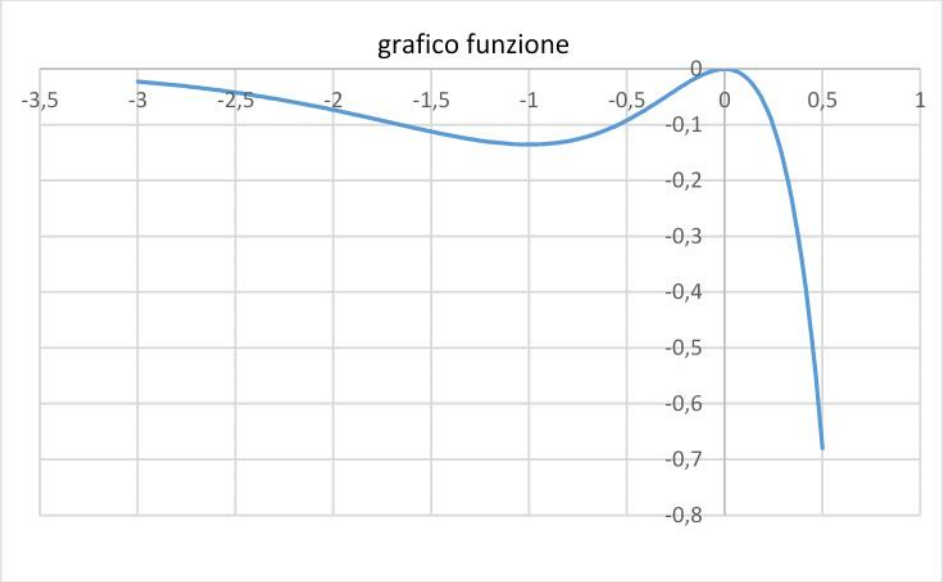
2) Se il numero deve avere cifre tutte distinte e diverse da 0, i possibili numeri sono dati dal numero di disposizioni semplici di 9 oggetti presi 4 a 4:
$\mathcal{D}_{9,4} = \dfrac{9!}{(9-4)!} = 3.024$; se invece una ed una sola cifra può essere presente al massimo due volte, al numero precedente dobbiamo aggiungere il numero di possibili alternative con una cifra che si ripete una sola volta, in questo caso abbiamo 9 modi distinti di scegliere la cifra che si ripete, $\binom{4}{2}$ modi distinti di scelta su dove posizionare la cifra che si ripete e $\mathcal{D}_{8,2}$ modi distinti per la scelta delle rimanenti due cifre, la risposta alla seconda domanda è quindi:
$3.024 + 9 \cdot \binom{4}{2} \cdot \dfrac{8!}{(8-2)!} = 6.048$.

3) $A =]-1,4] \cup \{z \in \mathbb{Z}\colon |z| \le 3\} =]-1,4] \cup \{-3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3\} =$
$=]-1,4] \cup \{-3,\ -2,\ -1\}$; $\delta(A) = \{-3,\ -2,\ -1, 4\}$, $\mathcal{D}(A) = [-1,4]$.
Dato che $\delta(A) \subseteq A$, l'insieme è chiuso.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x + tg(-5x))}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x + tg(-5x))}{x + tg(-5x)} \cdot \left(1 + \dfrac{tg(-5x)}{x}\right) =$
$1 \cdot (1-5) = -4$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{5x-1}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1/5}{x - 1/5}\right)^x$; dato che per $x \to +\infty$, $x - 1/5 \asymp x$ concludiamo che $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{5x-1}\right)^x = e^{1/5}$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = -(-x)^2 e^{2(-x)} = -x^2 e^{-2x}$; funzione nè pari, nè dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \le 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione prodotto fra l'opposto di un quadrato ed un'esponenziale, unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2 e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{e^{-2x}} = 0$, perché per $x \to -\infty$, $-x^2 = o(e^{-2x})$;
asintoto orizzontale sx di equazione $y = 0$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 e^{2x} = (\to -\infty) e^{(\to +\infty)} = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2 e^{2x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x e^{2x} = (\to -\infty) e^{(\to +\infty)} = -\infty$;
Crescenza e decrescenza: $y' = -2x e^{2x} - x^2 e^{2x} \cdot 2 = -2x(x+1)e^{2x}$.
$y' > 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$. Funzione strettamente crescente in $[-1, 0]$, strettamente decrescente in $]-\infty, -1]$ e in $[0, +\infty[$, la funzione presenta minimo relativo in $m(-1, -e^{-2})$ e massimo assoluto in $O(0,0)$.

L'esistenza del massimo e del minimo insieme all'asintoto orizzontale sx implica che i due punti di flesso presentano entrambi ascissa negativa ed in particolare uno di ascissa inferiore a -1 ed uno di ascissa compresa fra -1 e zero.
Grafico:



6) $\displaystyle\int \left(xe^{2x} + 4x^3\right) dx = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{e^{2x}}{2}\, dx + x^4 = x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + x^4 + k\,.$

7) L'equazione della retta tangente alla curva y nel punto di ascissa $x_0 = 1$ è
$y - y(1) = y'(1) \cdot (x-1)$; nel caso specifico $y(1) = \dfrac{f(h(1))}{f(g(1))} = \dfrac{f(1)}{f(1)} = 1\,,$
$y'(x) = \dfrac{f'(h(x)) \cdot h'(x) \cdot f(g(x)) - f(h(x)) \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x)}{\left(f(g(x))\right)^2}$ e
$y'(1) = \dfrac{f'(h(1)) \cdot h'(1) \cdot f(g(1)) - f(h(1)) \cdot f'(g(1)) \cdot g'(1)}{\left(f(g(1))\right)^2} = \dfrac{1-1}{(1)^2} = 0\,.$
Pertanto l'equazione richiesta è $y - 1 = 0$ ovvero $y = 1$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ con $f'_x = \dfrac{3x^2 z}{y+3z}$, $f'_y = -\dfrac{x^3 z \cdot 1}{(y+3z)^2}$ e
$f'_z = \dfrac{x^3 \cdot (y+3z) - x^3 z \cdot 3}{(y+3z)^2} = \dfrac{x^3 y}{(y+3z)^2}$, con $f'_x(P) = f'_y(P) = f'_z(P) = 0$;
pertanto $\nabla f(P) = (0,0,0)$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)
16 febbraio 2018
Compito $\mathbb{W}$

1) $h(x) = f\left(\dfrac{1+g(x)}{1+f(x)}\right) = f\left(\dfrac{1+x}{1+x+2}\right) = f\left(\dfrac{x+1}{x+3}\right) = \dfrac{x+1}{x+3} + 2 = \dfrac{3x+7}{x+3}$.
$h(x) \le g(x) \Leftrightarrow \dfrac{3x+7}{x+3} \le x \Leftrightarrow \dfrac{3x+7}{x+3} - x \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+7}{x+3} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-7}{x+3} \ge 0$.
Studiamo separatamente il numeratore ed il denominatore, in particolare $x^2 - 7 \ge 0$ se e solo se $x \le -\sqrt{7} \vee x \ge \sqrt{7}$, mentre $x + 3 > 0$ se e solo se $x > -3$. Pertanto la disequazione $h(x) \le g(x)$ è verificata se $-3 < x \le -\sqrt{7} \vee x \ge \sqrt{7}$.

2) Un numero di sette cifre che non contiene le cifre 0 e 9 si ottiene disponendo con ripetizione le restanti otto cifre a sette a sette, pertanto i numeri richiesti sono pari a $\mathcal{D}^r_{8,7} = 8^7 = 2.097.152$; se invece le cifre non possono ripetersi dobbiamo usare le disposizioni semplici, i numeri richiesti sono allora $\mathcal{D}_{8,7} = \dfrac{8!}{(8-7)!} = 40.320$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: -3 \le x \le 6\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x^2 \le 16\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: -3 \le x \le 6\} \cup \{x \in \mathbb{R}: -4 \le x \le 4\} = \{x \in \mathbb{R}: -4 \le x \le 6\} =$
$[-4, 6]$. $\delta(A) = \{-4, 6\}$, $\mathcal{D}(A) = [-4, 6]$.

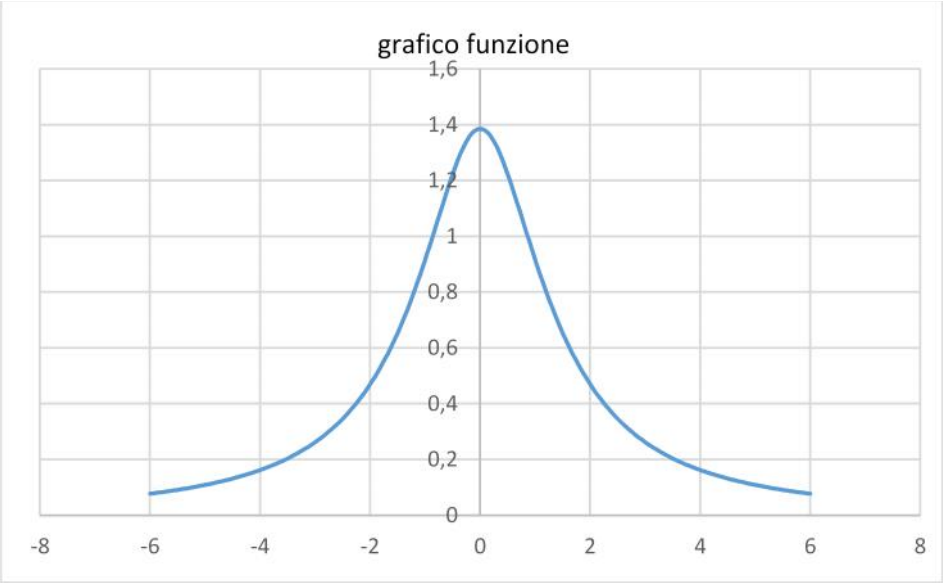
4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen^2 x) + tg(tg\, x)}{x} =$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen^2 x)}{sen^2 x} \cdot \dfrac{sen\, x}{x} \cdot sen\, x + \dfrac{tg(tg\, x)}{tg\, x} \cdot \dfrac{tg\, x}{x} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$;
per $x \to +\infty$, $e^{-x} = o(3^x)$ e $x^3 = o(4^x)$ pertanto $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x - e^{-x}}{x^3 + 4^x} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{4^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 0$.

5) $C.E.$: $\dfrac{4+x^2}{1+x^2} > 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$; $C.E. = \mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\dfrac{4+(-x)^2}{1+(-x)^2}\right) = log\left(\dfrac{4+x^2}{1+x^2}\right) = y(x)$;
funzione pari, la studiamo solo per le $x \ge 0$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \ge 0$ se $log\left(\dfrac{4+x^2}{1+x^2}\right) \ge 0 \Rightarrow$
$\dfrac{4+x^2}{1+x^2} \ge 1 \Rightarrow 4 + x^2 \ge 1 + x^2$, vera $\forall x \ge 0$, funzione ad ordinate positive;
$y(0) = log\, 4$, unica intersezione con gli assi nel punto $A(0, log\, 4)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{4+x^2}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{\frac{4}{x^2}+1}{\frac{1}{x^2}+1}\right) = log\left(\dfrac{(\to 1)}{(\to 1)}\right) = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{4+x^2}{1+x^2}} \cdot \dfrac{2x(1+x^2) - 2x(4+x^2)}{(1+x^2)^2} =$

$\frac{1+\cancel{x^2}}{4+x^2} \cdot \frac{-6x}{(1+x^2)^{\cancel{2}}} = -\frac{6x}{(4+x^2)(1+x^2)}$; $y' \leq 0,\ \forall x \geq 0$. Funzione strettamente decrescente in $[0,\ +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $A(0, log\,4)$.

L'esistenza del massimo nel punto $x = 0$ insieme alla stretta decrescenza ed alla presenza dell'asintoto orizzontale implica che un punto di flesso ha ascissa positiva.

Grafico:



6) $\int_0^3 xe^{2+x^2}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{2}e^{2+x^2}\,d(2+x^2) = \frac{1}{2}e^{2+x^2}\Big|_0^3 = \frac{1}{2}e^{11} - \frac{1}{2}e^2 = \frac{e^2}{2}\left(e^9 - 1\right)$.

7) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è $y = f'(0)x + f(0)$; nel caso specifico $f(0) = 1$, $f'(x) = -2e^{-2x} - 1$ e $f'(0) = -3$. Pertanto l'equazione richiesta è $y = -3x + 1$.

8) $\nabla f = (6x - 2,\ -4 + 3y^2)$.

FOC: $\begin{cases} 6x - 2 = 0 \\ -4 + 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 2 \\ 3y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/3 \\ y = \pm 2\sqrt{3}/3 \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(1/3,\ \pm 2\sqrt{3}/3)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 36y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 24\sqrt{3} > 0$, $f''_{xx}(P_1) = 6 > 0$. P_1 punto di minimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = -24\sqrt{3} < 0$. P_2 punto di sella.

Compito $\mathbb{X}$

1) $h(x) = \dfrac{g(1+g(x))}{g(1+f(x))} = \dfrac{g(1+x+2)}{g(1+x-1)} = \dfrac{g(x+3)}{g(x)} = \dfrac{x+3+2}{x+2} = \dfrac{x+5}{x+2}$.

$h(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x+2} \geq x-1 \Leftrightarrow \dfrac{x+5}{x+2} - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+7}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2-7}{x+2} \leq 0$. Studiamo separatamente il numeratore ed il denominatore, in particolare $x^2 - 7 \geq 0$ se e solo se $x \leq -\sqrt{7} \vee x \geq \sqrt{7}$, mentre $x + 2 > 0$ se e solo se $x > -2$. Pertanto la disequazione $h(x) \geq f(x)$ è verificata se $x \leq -\sqrt{7} \vee -2 < x \leq \sqrt{7}$.

2) Un numero di cinque cifre che non contiene le cifre 0 e 9 si ottiene disponendo con ripetizione le restanti otto cifre a cinque a cinque, pertanto i numeri richiesti sono pari a $\mathcal{D}^r_{8,5} = 8^5 = 32.768$; se invece le cifre non possono ripetersi dobbiamo usare le disposizioni semplici, i numeri richiesti sono allora $\mathcal{D}_{8,5} = \dfrac{8!}{(8-5)!} = 6.720$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x^2 < 9\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}: -3 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x < 3\} =$
$[-5, 3[$. $\delta(A) = \{-5, 3\}$, $\mathcal{D}(A) = [-5, 3]$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen\, x) - sen(sen^2 x)}{x} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen\, x)}{sen\, x} \cdot \dfrac{sen\, x}{x} - \dfrac{sen(sen^2 x)}{sen^2 x} \cdot \dfrac{sen\, x}{x} \cdot sen\, x = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = 1$;

per $x \to -\infty$, $e^x = o(3^{-x})$ e $x^2 = o(5^{-x})$ pertanto $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^{-x} - e^x}{x^2 + 5^{-x}} =$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^{-x}}{5^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-x} = 0.$

5) $C.E.$: $\dfrac{1+x^2}{2+x^2} > 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$; $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\dfrac{1+(-x)^2}{2+(-x)^2}\right) = log\left(\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right) = y(x)$;

funzione pari, la studiamo solo per le $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $log\left(\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right) \geq 0 \Rightarrow$

$\dfrac{1+x^2}{2+x^2} \geq 1 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 2 + x^2$, falsa $\forall x \geq 0$, funzione ad ordinate negative;

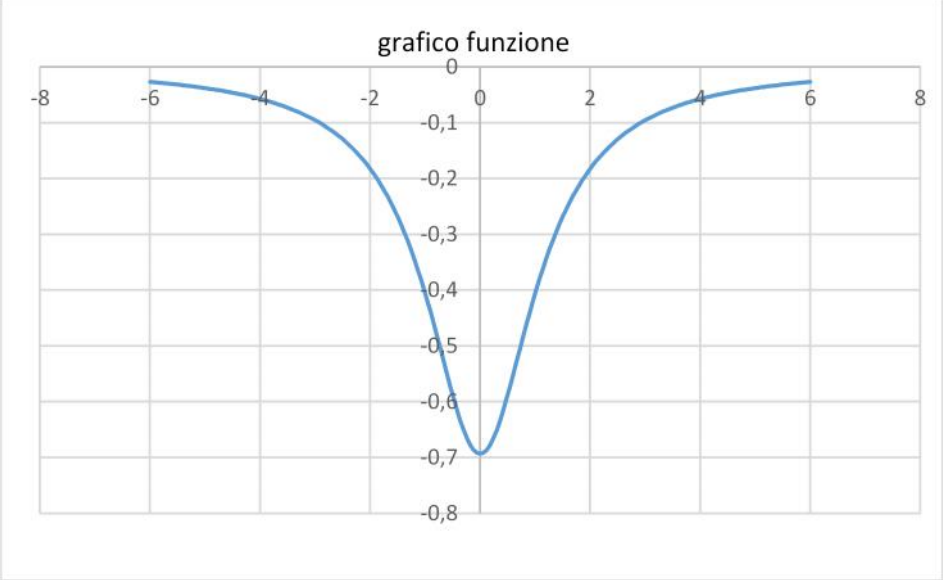
$y(0) = log\,\dfrac{1}{2}$, unica intersezione con gli assi nel punto $A(0, log\,\dfrac{1}{2})$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{2}{x^2}+1}\right) = log\left(\dfrac{(\to 1)}{(\to 1)}\right) = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{1+x^2}{2+x^2}} \cdot \dfrac{2x(2+x^2) - 2x(1+x^2)}{(2+x^2)^2} =$

$\dfrac{2+\cancel{x^2}}{1+x^2}\cdot\dfrac{2x}{(2+x^2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{2x}{(1+x^2)(2+x^2)}$; $y' \geq 0,\ \forall x \geq 0$. Funzione strettamente crescente in $[0,\ +\infty[$, la funzione presenta minimo assoluto in $A(0, log\,\dfrac{1}{2})$.
L'esistenza del minimo nel punto $x = 0$ insieme alla stretta crescenza ed alla presenza dell'asintoto orizzontale implica che un punto di flesso ha ascissa positiva.
Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^1 xe^{3-x^2}\,dx = \int_0^1 -\frac{1}{2}e^{3-x^2}\,d(3-x^2) = -\frac{1}{2}e^{3-x^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^3 = \frac{e^2}{2}(e-1)$.

7) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è $y = f'(0)x + f(0)$; nel caso specifico $f(0) = 1$, $f'(x) = 2e^{2x}+1$ e $f'(0) = 3$.
Pertanto l'equazione richiesta è $y = 3x + 1$.

8) $\nabla f = (-4x-8, 6-3y^2)$.

FOC: $\begin{cases} -4x-8=0 \\ 6-3y^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -8 \\ 3y^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(-2,\ \pm\sqrt{2})$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 24y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 24\sqrt{2} > 0$, $f''_{xx}(P_1) = -4 < 0$. P_1 punto di massimo.
$|\mathcal{H}f(P_2)| = -24\sqrt{2} < 0$. P_2 punto di sella.

Compito $\mathbb{Y}$

1) $h(x) = \dfrac{1+g(g(x))}{1+f(f(x))} = \dfrac{1+g(x-10)}{1+f(x+5)} = \dfrac{1+x-10-10}{1+x+5+5} = \dfrac{x-19}{x+11}$.
$h(x) > g(x) \Leftrightarrow \dfrac{x-19}{x+11} > x-10 \Leftrightarrow \dfrac{x-19}{x+11} - x + 10 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+91}{x+11} > 0 \Leftrightarrow$
$\dfrac{x^2-91}{x+11} < 0$. Studiamo separatamente il numeratore ed il denominatore, in particolare $x^2 - 91 > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{91} \vee x > \sqrt{91}$, mentre $x + 11 > 0$ se e solo se $x > -11$. Pertanto la disequazione $h(x) > g(x)$ è verificata se $x < -11 \vee -\sqrt{91} < x < \sqrt{91}$.

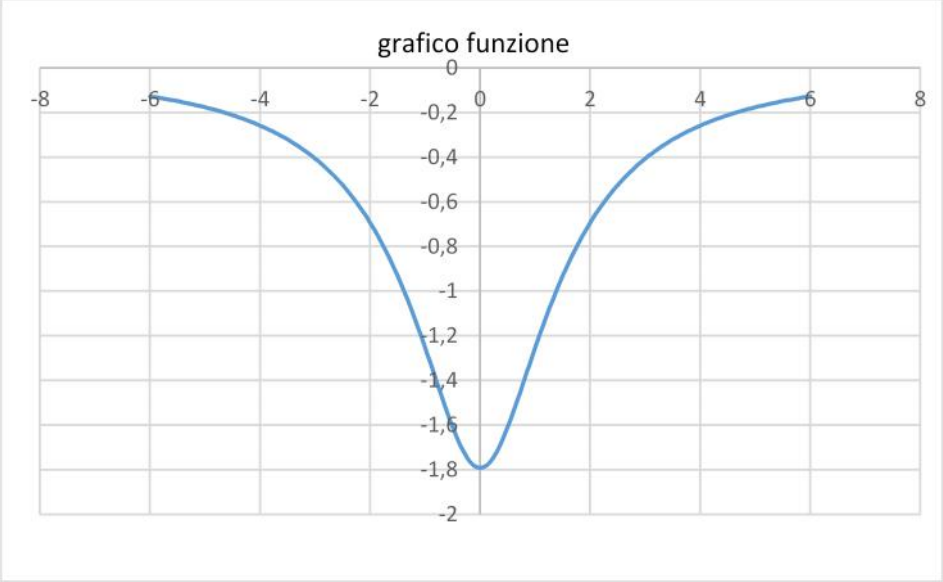
2) Un numero di sette cifre che non contiene le cifre 0, 8 e 9 si ottiene disponendo con ripetizione le restanti sette cifre a sette a sette, pertanto i numeri richiesti sono pari a $\mathcal{D}^r_{7,7} = 7^7 = 823.543$; se invece le cifre non possono ripetersi dobbiamo usare le disposizioni semplici, i numeri richiesti sono allora $\mathcal{D}_{7,7} = \dfrac{7!}{(7-7)!} = 5.040$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x^2 < 4\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 3\} \cap \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 2\} = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 2\} =$
$]-2, 2[$. $\delta(A) = \{-2, 2\}$, $\mathcal{D}(A) = [-2, 2]$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(tg^3 x) + 3\, sen(tg\, x)}{x} =$
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(tg^3 x)}{tg^3 x} \cdot \dfrac{tg\, x}{x} \cdot tg^2 x + 3\, \dfrac{sen(tg\, x)}{tg\, x} \cdot \dfrac{tg\, x}{x} = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$;
per $x \to -\infty$, $e^{-x} = o(5^{-x})$, $2^x = o(x^4)$ e $x^4 = o(5^{-x})$ pertanto
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5^{-x} - e^{-x}}{x^4 + 2^x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5^{-x}}{x^4} = +\infty$.

5) $C.E.$: $\dfrac{1+x^2}{6+x^2} > 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$; $C.E. = \mathbb{R}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\dfrac{1+(-x)^2}{6+(-x)^2}\right) = log\left(\dfrac{1+x^2}{6+x^2}\right) = y(x)$;
funzione pari, la studiamo solo per le $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $log\left(\dfrac{1+x^2}{6+x^2}\right) \geq 0 \Rightarrow$
$\dfrac{1+x^2}{6+x^2} \geq 1 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 6 + x^2$, falsa $\forall x \geq 0$, funzione ad ordinate negative;
$y(0) = log\, \dfrac{1}{6}$, unica intersezione con gli assi nel punto $A(0, log\, \dfrac{1}{6})$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{1+x^2}{6+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{6}{x^2}+1}\right) = log\left(\dfrac{(\to 1)}{(\to 1)}\right) = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{1+x^2}{6+x^2}} \cdot \dfrac{2x(6+x^2) - 2x(1+x^2)}{(6+x^2)^2} =$

$\dfrac{6+\cancel{x^2}}{1+x^2}\cdot\dfrac{10x}{(6+x^2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{10x}{(1+x^2)(6+x^2)}$; $y' \geq 0,\ \forall x \geq 0$. Funzione strettamente crescente in $[0,\ +\infty[$, la funzione presenta minimo assoluto in $A(0, log\,\frac{1}{6})$.
L'esistenza del minimo nel punto $x = 0$ insieme alla stretta crescenza ed alla presenza dell'asintoto orizzontale implica che un punto di flesso ha ascissa positiva.
Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^4 xe^{3+x^2}\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}e^{3+x^2}\,d(3+x^2) = \frac{1}{2}e^{3+x^2}\Big|_0^4 = \frac{1}{2}e^{19} - \frac{1}{2}e^3 = \frac{e^3}{2}\left(e^{16}-1\right)$.

7) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è $y = f'(0)x + f(0)$; nel caso specifico $f(0) = 1$, $f'(x) = e^x + 3$ e $f'(0) = 4$.
Pertanto l'equazione richiesta è $y = 4x + 1$.

8) $\nabla f = (15x^2 - 30, 6 - 2y)$.

FOC: $\begin{cases} 15x^2 - 30 = 0 \\ 6 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x^2 = 30 \\ 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = 3 \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(\pm\sqrt{2}, 3)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 30x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -60x$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = -60\sqrt{2} < 0$. P_1 punto di sella.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = 60\sqrt{2} > 0$, $f''_{yy}(P_2) = -2 < 0$. P_2 punto di massimo.

Compito $\mathbb{Z}$

1) $h(x) = g\left(\frac{g(x)}{f(x)} - 1\right) = g\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} + 2 = \frac{2x+3}{x+1}$.

$h(x) < f(x) \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} < x+1 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} - x - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{x^2-2}{x+1} > 0$. Studiamo separatamente il numeratore ed il denominatore, in particolare $x^2 - 2 > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$, mentre $x + 1 > 0$ se e solo se $x > -1$. Pertanto la disequazione $h(x) < f(x)$ è verificata se $-\sqrt{2} < x < -1 \vee x > \sqrt{2}$.

2) Un numero di cinque cifre che non contiene le cifre 0, 8 e 9 si ottiene disponendo con ripetizione le restanti sette cifre a cinque a cinque, pertanto i numeri richiesti sono pari a $\mathcal{D}^r_{7,5} = 7^5 = 16.807$; se invece le cifre non possono ripetersi dobbiamo usare le disposizioni semplici, i numeri richiesti sono allora $\mathcal{D}_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)!} = 2.520$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: -10 < x < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 1\} =$
$\{x \in \mathbb{R}: -10 < x < 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}: -1 \leq x < 0\} =$
$[-1, 0[$. $\delta(A) = \{-1, 0\}$, $\mathcal{D}(A) = [-1, 0]$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{4\, sen(tg^2 x) - arctg^2(sen\, x)}{x} =$

$\lim_{x \to 0} 4\, \frac{sen(tg^2 x)}{tg^2 x} \cdot \frac{tg\, x}{x} \cdot tg\, x - \frac{arctg(sen\, x)}{sen\, x} \cdot \frac{sen\, x}{x} \cdot arctg(sen\, x) =$
$4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$;
per $x \to +\infty$, $6^{-x} = o(e^x)$, $3^{-x} = o(x^4)$ e $x^4 = o(e^x)$ pertanto
$\lim_{x \to +\infty} \frac{6^{-x} + e^x}{x^4 - 3^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^4} = +\infty$.

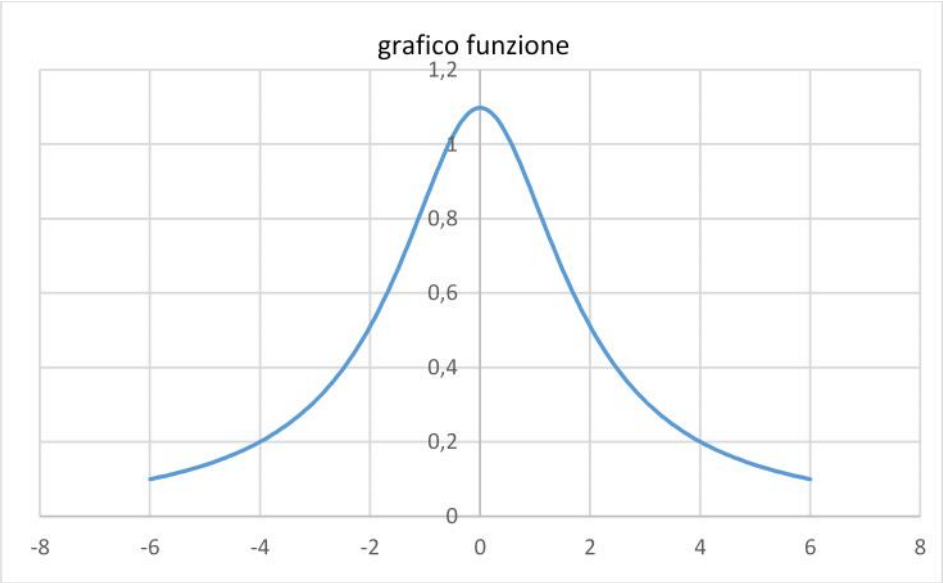
5) $C.E.$: $\frac{6+x^2}{2+x^2} > 0$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$; $C.E. = \mathbb{R}$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\left(\frac{6+(-x)^2}{2+(-x)^2}\right) = log\left(\frac{6+x^2}{2+x^2}\right) = y(x)$;
funzione pari, la studiamo solo per le $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $log\left(\frac{6+x^2}{2+x^2}\right) \geq 0 \Rightarrow$
$\frac{6+x^2}{2+x^2} \geq 1 \Rightarrow 6 + x^2 \geq 2 + x^2$, vera $\forall x \geq 0$, funzione ad ordinate positive;
$y(0) = log\, 3$, unica intersezione con gli assi nel punto $A(0, log\, 3)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{6+x^2}{2+x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(\frac{\frac{6}{x^2}+1}{\frac{2}{x^2}+1}\right) = log\left(\frac{(\to 1)}{(\to 1)}\right) = 0$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{6+x^2}{2+x^2}} \cdot \frac{2x(2+x^2) - 2x(6+x^2)}{(2+x^2)^2} =$

$\frac{2+\cancel{x^2}}{6+x^2} \cdot \frac{-8x}{(2+x^2)^{\cancel{2}}} = -\frac{8x}{(6+x^2)(2+x^2)}$; $y' \leq 0,\ \forall x \geq 0$. Funzione strettamente decrescente in $[0,\ +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto in $A(0, log\,3)$.

L'esistenza del massimo nel punto $x = 0$ insieme alla stretta decrescenza ed alla presenza dell'asintoto orizzontale implica che un punto di flesso ha ascissa positiva.

Grafico:



6) $\int_0^2 xe^{1-2x^2}\,dx = \int_0^2 -\frac{1}{4}e^{1-2x^2}\,d(1-2x^2) = -\frac{1}{4}e^{1-2x^2}\Big|_0^2 =$
$-\frac{1}{4}e^{-7} + \frac{1}{4}e = \frac{e}{4}(1-e^{-8})$.

7) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$ è $y = f'(0)x + f(0)$; nel caso specifico $f(0) = 1$, $f'(x) = -e^{-x} - 4$ e $f'(0) = -5$. Pertanto l'equazione richiesta è $y = -5x + 1$.

8) $\nabla f = (-3x^2 + 9,\ -2y)$.

FOC: $\begin{cases} -3x^2 + 9 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 9 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(\pm\sqrt{3}, 0)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 12x$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 12\sqrt{3} > 0$, $f''_{yy}(P_1) = -2 < 0$. P_1 punto di massimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = -12\sqrt{3} < 0$. P_2 punto di sella.

Università degli Studi di Siena

Correzione prova scritta di Matematica Generale (A.A. 16-17)

24 marzo 2018

Compito Unico

1) Indichiamo con a, b, c e d rispettivamente le proposizioni composte $(p \Rightarrow \neg r)$, $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r)$, $(r \Leftrightarrow q)$ e $(q \Rightarrow \neg p)$ e costruiamo la tavola di verità:

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$p \Leftrightarrow q$	a	b	c	d	$c \Rightarrow d$
V	V	V	F	F	V	F	V			
V	V	F	F	V	V	V	F			
V	F	V	F	F	F	F	V			
V	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	F			

Per le ipotesi poste escludiamo le quattro righe dove almeno una fra le proposizioni composte a o b è falsa, come è facile notare dall'ultima colonna la proposizione $c \Rightarrow d$ risulta vera.

2) La parola $MUSICA$ è composta da sei lettere tutte distinte, il numero dei suoi anagrammi anche privi di senso è $6! = 720$; la parola $MUSICISTA$ è composta da nove lettere in cui le lettere I e S si ripetono due volte ciascuna, il numero dei suoi anagrammi anche privi di senso è $\dfrac{9!}{2! \cdot 2!} = 90.720$.

3) Nota che $\sqrt{3} < 2 < e$ mentre $e < 3 < \sqrt{10}$ quindi $A = [0, \sqrt{10}[$, da cui abbiamo $\delta(A) = \{0, \sqrt{10}\}$ e $\overset{\circ}{A} =]0, \sqrt{10}[$.

4) Per $x \to -\infty$, x^3 e $sen\, x$ sono o-piccoli di e^{-x} e quindi

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - e^{-x} - sen\, x}{3^x + 8^x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{3^x + 8^x + 2} = \frac{(\to -\infty)}{(\to 2)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{3^{x+1}}\right)^{3^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1/3}{3^x}\right)^{3^x} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}.$$

5) $C.E.$: $\sqrt{4 - x^2} > 0 \Rightarrow 4 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2, C.E. =]-2, 2[$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = log\sqrt{4 - (-x)^2} = log\sqrt{4 - x^2} = y(x)$; funzione pari, la studiamo solo per le $x \in [0, 2[$ ed operiamo per simmetria.

Segno: $log\sqrt{4 - x^2} > 0 \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} > 1 \Rightarrow 4 - x^2 > 1 \Rightarrow x^2 < 3 \Rightarrow$ $0 \le x < \sqrt{3}$, funzione positiva nell'intervallo $[0, \sqrt{3}[$, negativa nell'intervallo $]\sqrt{3}, 2[$, intersezione con l'asse delle ascisse nel punto di coordinate $A\left(\sqrt{3}, 0\right)$, $y(0) = log\, 2$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 2} log\sqrt{4 - x^2} = log(\to 0^+) = -\infty$; asintoto verticale di equazione $x = 2$.

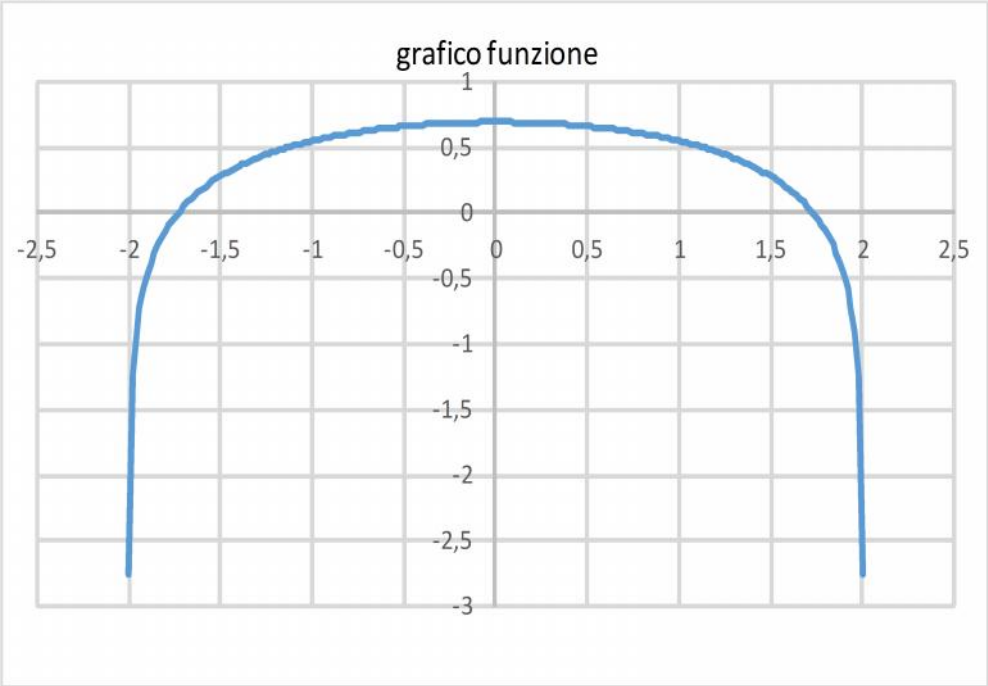
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \cdot \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4 - x^2}} = -\dfrac{x}{4 - x^2}$,

$y' < 0, \forall x \in]0, 2[$, funzione strettamente decrescente in $]0, 2[$; punto di massimo assoluto in $M(0, log\, 2)$.

Concavità e convessità: $y'' = -\dfrac{1\cdot(4-x^2)-x\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} = -\dfrac{4+x^2}{(4-x^2)^2}$.

$y''<0, \forall x \in [0,2[$, funzione strettamente concava.

Grafico:



6) $\displaystyle\int\left(x^3+\frac{2x+1}{x^2+x}\right)dx = \frac{x^4}{4}+log|x^2+x|+c\,.$

7) $\mathbb{B} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{X}\cdot\mathbb{Y}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix}5 & 10 & 20\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. $\mathbb{Z} = \mathbb{B}\cdot\mathbb{Y} = \begin{pmatrix}5 & 10 & 20\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}105\\0\end{pmatrix}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P)\cdot\begin{pmatrix}x-0\\y-2\end{pmatrix}$.

$z(P)=10$, $\nabla z = (4(x+2),\ -6(y-2))$, $\nabla z(P) = (8,0)$. Equazione del piano tangente: $z-10=8x$, oppure $8x-z+10=0$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)
11 giugno 2018
Compito Unico

1) Indichiamo con s la proposizione composta $p \Rightarrow (q\ o\ r)$, con t la $(p \Rightarrow q)\ o\ (p \Rightarrow r)$ e con u la $(p \Rightarrow (q\ o\ r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q)\ o\ (p \Rightarrow r))$.

p	q	r	$q\ o\ r$	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow r$	s	t	u
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V .
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	V

Come è facile verificare dall'ultima colonna della tavola di verità, la proposizione proposta è una tautologia.

2) In un numero polidigitale di cinque cifre, la prima cifra può essere scelta in 9 modi distinti, per le rimanenti quattro si hanno $D_{9,4}$ modi distinti di scelta, pari alle disposizioni semplici di 9 elementi presi 4 a 4, in totale i numeri richiesti sono pari a $9 \cdot \dfrac{9!}{(9-4)!} = 27.216$. Se si usano esclusivamente cifre dispari (cinque cifre) i possibili numeri polidigitali a cinque cifre sono pari a $5! = 120$.

3) $\lim\limits_{x \to 2} 3x - 5 = 1$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|3x - 5 - 1\right| = \left|3(x-2)\right| = 3|x-2|$, posto $3|x-2| < \epsilon$ risulta $|x-2| < \dfrac{\epsilon}{3}$ da cui $\delta_\epsilon = \dfrac{\epsilon}{3}$, limite verificato.

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sen(x-1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{sen(x-1)}{x-1} \cdot \dfrac{1}{x+1} = 1 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$;

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+2}{x^2}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^2}\right)^{x^2} = e^2$.

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^*$.

Eventuali simmetrie: $y(-x) = e^{1-\frac{1}{(-x)^2}} = e^{1-\frac{1}{x^2}} = y(x)$; funzione pari, la studiamo solo per le $x > 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0,\ \forall x > 0$ perché funzione esponenziale.

Nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1-\frac{1}{x^2}} = e^{1-\frac{1}{(\to 0^+)}} = e^{(\to -\infty)} = 0$. L'origine degli assi è un punto di discontinuità di terza specie (eliminabile).

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-\frac{1}{x^2}} = e^{1-\frac{1}{(\to +\infty)}} = e^{(\to 1)} = e$; asintoto orizzontale di equazione $y = e$.

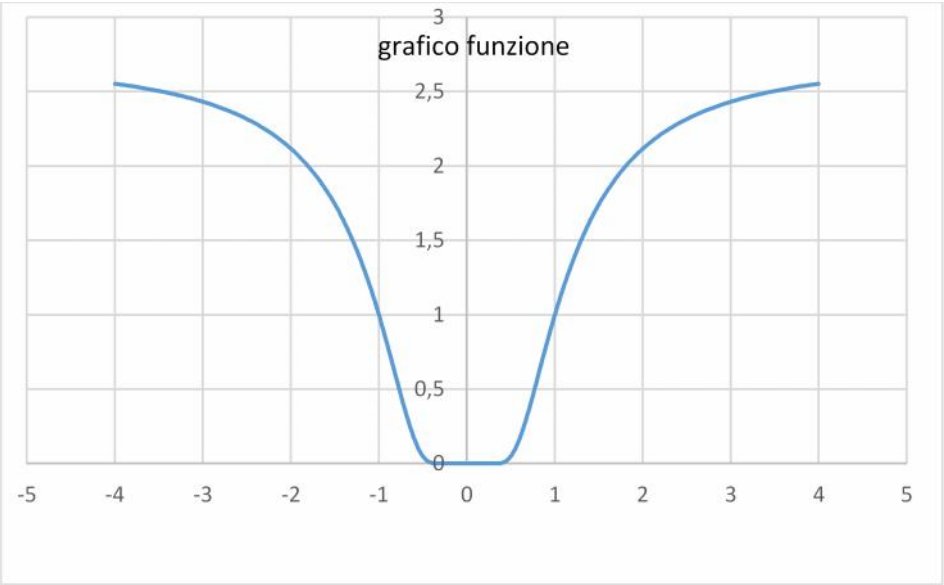
Crescenza e decrescenza: $y' = e^{1-\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{2\, e^{1-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$; $y' > 0,\ \forall x > 0$. Funzione strettamente crescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = 2 \cdot \dfrac{\frac{2\,e^{1-\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x^3}} \cdot \cancel{x^3} - e^{1-\frac{1}{x^2}} \cdot 3\,x^2}{x^6} = 2\,\dfrac{e^{1-\frac{1}{x^2}}}{x^6}\left(2 - 3\,x^2\right)$.

$y'' > 0$, se $2 - 3\,x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 2/3 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{2/3}$, funzione strettamente convessa in $]0, \sqrt{2/3}]$, strettamente concava$[\sqrt{2/3}, +\infty[$.

$y\left(\sqrt{2/3}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1/e}$. Punto di flesso discendente di coordinate $F\left(\sqrt{2/3}, \sqrt{1/e}\right)$.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x|x^2\,dx = \int_{-1}^{0}\left(-x^3\right)dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx = \left(-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{2} = \left(0 + \frac{1}{4}\right) + (4 - 0) = \frac{17}{4}$.

7) Le rette parallele alla retta di equazione $y = 3x$ presentano coefficiente angolare $m = 3$ mentre il coefficiente angolare della retta tangente nel punto di ascissa x_0 è $y'(x_0)$, pertanto per determinare l'ascissa del punto di tangenza è necessario risolvere l'equazione: $y' = 3$ con $y' = 2\,e^{2x}$, da cui $2\,e^{2x} = 3 \Rightarrow e^{2x} = 3/2 \Rightarrow$ $2\,x = log(3/2) \Rightarrow x_0 = log\sqrt{3/2}$, con $y(x_0) = 3/2$. Segue l'equazione richiesta: $y - 3/2 = 3\left(x - log\sqrt{3/2}\right)$ ovvero $y = 3\,x + 3/2 - log\sqrt{27/8}$ e punto di tangenza $P\left(log\sqrt{3/2}, 3/2\right)$.

8) $\nabla f = (y^2 + 6x, 2xy + 2y)$.

FOC: $\begin{cases} y^2 + 6x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + 6x = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases}$; si hanno due possibilità:

$i)$ $\begin{cases} 6x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, primo punto critico di coordinate $O(0,0)$;

$ii)$ $\begin{cases} y^2 - 6 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 6 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{6} \\ x = -1 \end{cases}$, secondo e terzo punto critico di coordinate $P_{1,2}\left(-1, \pm\sqrt{6}\right)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6 & 2y \\ 2y & 2x + 2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 12x + 12 - 4y^2$.

SOC: $|\mathcal{H}f(O)| = 12 > 0$, $f''_{xx}(O) = 6 > 0$. O punto di minimo.

$|\mathcal{H}f(P_{1,2})| = -24 < 0$. $P_{1,2}$ punti di sella.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)

10 luglio 2018

Compito Unico

1)

A	B	C	$A\cap C$	$\mathcal{C}(B\cup C)$	$\mathcal{C}(A)\cap C$	$(A\cap C)\subseteq\mathcal{C}(B)$	$\mathcal{C}(B\cup C)\subseteq A$	$(\mathcal{C}(A)\cap C)\subseteq B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	F	V	$\not V$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V	V	V
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	V	V	V
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	V	V	V
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	V	V	V
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V	V	V
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	V	V	F
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	V	F	$\not V$

.

Per le ipotesi poste escludiamo la prima e l'ultima riga perché le due ipotesi indicate non risultano entrambe vere, come si evince dalla settima riga (caso di falsità), sotto le ipotesi poste non possiamo concludere con certezza che $(\mathcal{C}(A)\cap C)\subseteq B$.

2) L'equazione $(n+2)!-4(n+1)!=4\,n!$ può essere riscritta come $(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!-4(n+1)\cdot n!=4\,n!$, che è equivalente a $(n+2)\cdot(n+1)-4(n+1)=4$ ovvero $n^2-n-6=0$ con soluzioni $n=3$ o $n=-2$, di cui solo $n=3$ è accettabile perché -2 non è un numero naturale.

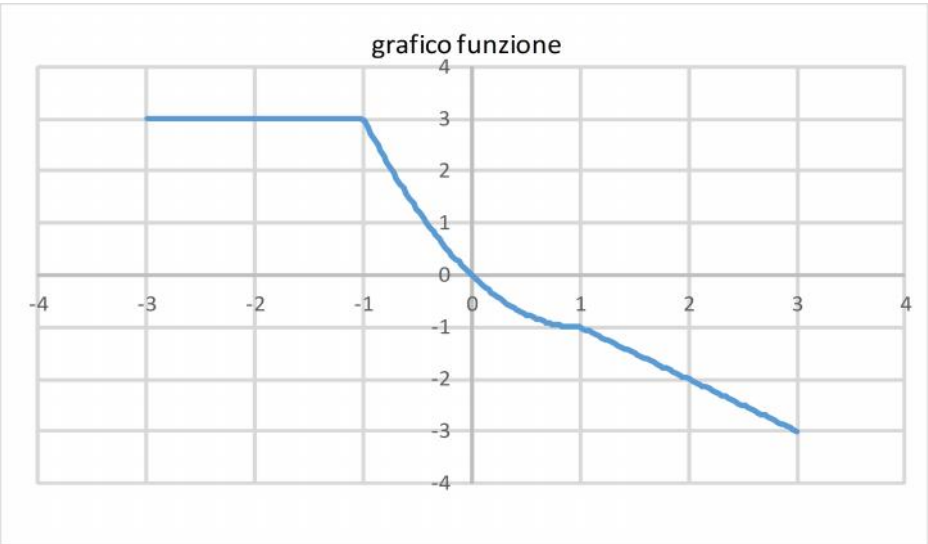
3) La funzione è chiaramente continua in tutti i numeri reali diversi da -1 e 1, per l'analisi in questi due punti passiamo a calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} a=a \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x^2-2x=3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2-2x=-1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} bx=b$$

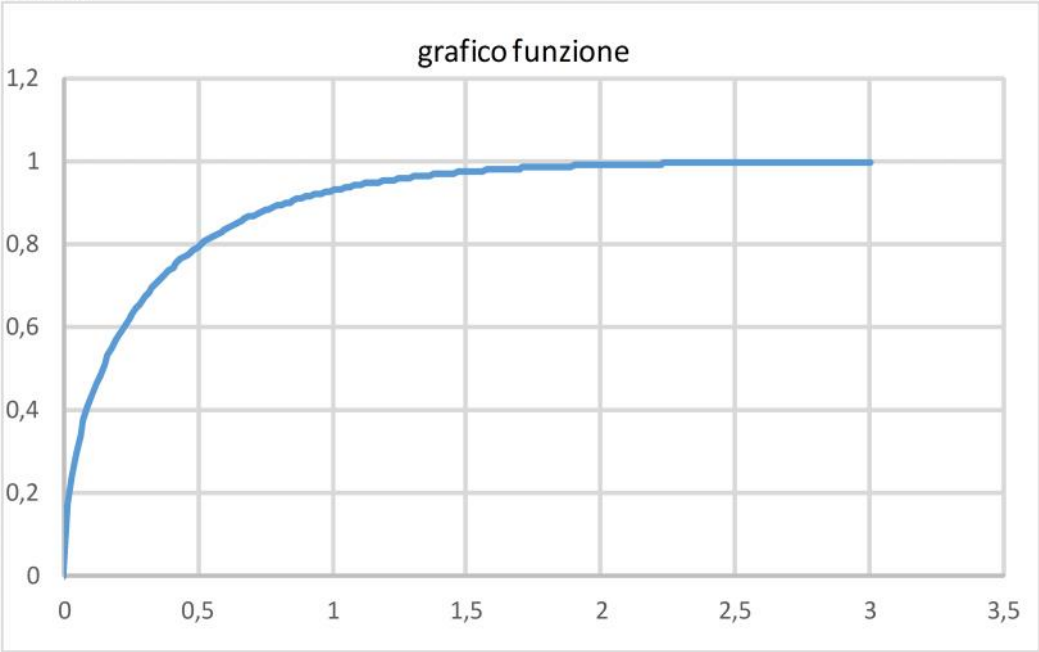
dai quattro limiti precedenti risulta la continuità in -1 e 1 e quindi in tutto $\mathbb{R}$ se e solo se: $a=3$ e $b=-1$.

Grafico:



4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(x+log(1+x))}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{sen(x+log(1+x))}{x+log(1+x)}\cdot\left(1+\dfrac{log(1+x)}{x}\right)=$ $1\cdot(1+1)=2$; per $x\to+\infty$, $e^{-x}=o(3^x)$, $log\,x=o(3^x)$, $5^{-x}=o(x^2)$, $cosx=o(x^2)$ e $x^2=o(3^x)$, pertanto $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3^x+e^{-x}+log\,x}{5^{-x}+x^2+cos\,x}=$ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^2}=+\infty$.

5) $C.E.$: $1-e^{-2x} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-2x} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$; $C.E. = [0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione irrazionale di ordine 2, unica intersezione con gli assi e punto di stop in $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1-e^{-2x}} = \sqrt{(\to 1)} = 1$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 1$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{2\,e^{-2x}}{2\sqrt{1-e^{-2x}}} = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$.
$y' > 0, \forall x > 0$. Funzione strettamente crescente nel suo $C.E.$, $\lim_{x \to 0} y' = +\infty$, O punto a tangente verticale e di minimo assoluto.
Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-2\,e^{-2x} \cdot \sqrt{1-e^{-2x}} - e^{-2x} \cdot \frac{2\,e^{-2x}}{2\sqrt{1-e^{-2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{-2x}}\right)^2}$. con
$y'' < 0, \forall x > 0$, perché il numeratore della derivata seconda è somma di quantità negative, funzione strettamente concava.
Grafico:



6) $\int_{-2}^{1} e^{|x|}\,dx = \int_{-2}^{0} e^{-x}\,dx + \int_{0}^{1} e^{x}\,dx = -e^{-x}|_{-2}^{0} + e^{x}|_{0}^{1} =$
$-1 + e^2 + e - 1 = e^2 + e - 2$.

7) Per la formula del differenziale ricordiamo che il valore $f(x_0+h)$ può essere approssimato tramite $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$; nel caso specifico scelta $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$ e l'incremento $h = 0.1$ otteniamo: $f(8) = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,
$f'(8) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \dfrac{1}{12}$, da cui $\sqrt[3]{8.1} \approx 2 + \dfrac{1}{12} \cdot 0.1 = \dfrac{241}{120} = 2.008\overline{3}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$.
$z(P) = 0$, $\nabla z = \left((2-y)x^{1-y} - 3y^3, x^{2-y} \cdot \log x \cdot (-1) - 9xy^2\right)$,
$\nabla z(P) = (-2, -9)$. Equazione del piano tangente: $z = -2(x-1) - 9(y-1)$, oppure $2x + 9y + z = 11$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)

6 settembre 2018

Compito Unico

1) Nel caso in cui la bandiera ha quattro bande verticali tutte a colori distinti si hanno 8 modi distinti per la scelta del colore sulla prima banda, 7 modi per la seconda, 6 modi per la terza e 5 modi per la quarta, le possibili bandiere sono $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1.680$. Se invece si richiede che la bandiera abbia colori distinti su bande adiacenti, si hanno 8 modi distinti per la scelta del colore sulla banda di sinistra, 7 modi per ognuna delle bande al centro e 7 modi per la restante banda, le possibili bandiere sono $8 \cdot 7^3 = 2.744$.

2) $g(f(x)) = (4-x)^2$, $f(g(x)) = 4 - x^2$, $\dfrac{1}{g(f(x))} + \dfrac{1}{f(g(x))} =$

$\dfrac{1}{(4-x)^2} + \dfrac{1}{4-x^2} = \dfrac{1}{(4-x)^2} + \dfrac{1}{(2-x)(2+x)} = \dfrac{4-x^2+(4-x)^2}{(4-x)^2(2-x)(2+x)} =$

$\dfrac{20-8x}{(4-x)^2(2-x)(2+x)}$, pertanto $\dfrac{1}{g(f(x))} + \dfrac{1}{f(g(x))} < 0$ se e solo se

$\dfrac{20-8x}{(4-x)^2(2-x)(2+x)} < 0$. Studiamo separatamente il segno di ogni singolo fattore della frazione: $20 - 8x > 0 \Rightarrow x < 5/2$, $(4-x)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 4$, $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$ e infine $2 + x > 0 \Rightarrow x > -2$; la disequazione è verificata quando il numero di fattori positivi è dispari (uno o tre) e questo accade quando $x < -2$ oppure $2 < x < 5/2$. S: $x < -2 \vee 2 < x < 5/2$.

3) $C.E.$: $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 9 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$;

$C.E. =]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x(x \cancel{-} 3)}{(x \cancel{-} 3)(x+3)} = \infty$; $x = -3$ è punto di discontinuità di seconda specie.

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-3x}{x^2-9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x(x \cancel{-} 3)}{(x \cancel{-} 3)(x+3)} = \dfrac{1}{2}$; $x = 3$ è punto di discontinuità di terza specie o eliminabile.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + senx}{1 - e^{-2x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + \frac{senx}{x}}{\frac{1-e^{-2x}}{-2x} \cdot (-2)} = \dfrac{1 + (\to 1)}{(\to -1) \cdot (-2)} = 1$;

per $x \to +\infty$, $log\, x = o(2x)$, pertanto $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{log\, x}\right)^{2x} =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{log\, x}\right)^{log\, x}\right)^{\frac{2x}{log\, x}} = (\to e)^{(\to +\infty)} = +\infty$.

5) $C.E.$: $\dfrac{e^x}{e^x + 2} \geq 0$, vera per ogni x reale perché rapporto fra quantità positive;

$C.E. = \mathbb{R}$.

$y(-x) = \sqrt{\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+2}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+2e^x}}$, funzione né pari, né dispari .

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché funzione irrazionale con argomento positivo, $y(0) = \sqrt{\frac{e^0}{e^0+2}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, unica intersezione con gli assi nel punto $F\left(0, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{e^x}{e^x+2}} = \sqrt{\frac{(\to 0)}{(\to 0)+2}} = 0$; asintoto orizzontale sx di equazione $y = 0$.

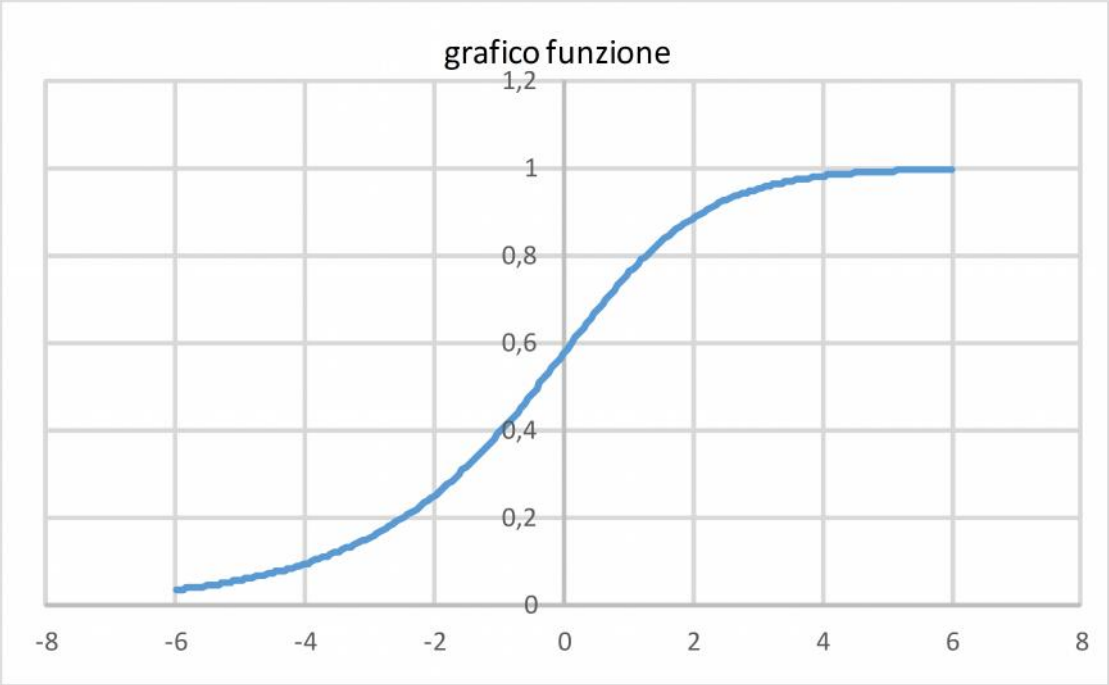
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{e^x}{e^x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{1+2/e^x}} = \sqrt{\frac{1}{1+(\to 0)}} = 1$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^x}{e^x+2}}} \cdot \frac{e^x(e^x+2) - e^x \cdot e^x}{(e^x+2)^2} =$

$\frac{\sqrt{e^x+2}}{\cancel{2}\sqrt{e^x}} \cdot \frac{\cancel{2}\, e^x}{(e^x+2)^2} = \sqrt{\frac{e^x}{(e^x+2)^3}}$. $y' > 0, \forall x$. Funzione strettamente crescente nel suo $C.E.$.

Concavità e convessità: la stetta crescenza della funzione insieme all'esistenza dei due asintoti orizzontali ed all'unico punto di flesso in corrispondenza di $x = 0$, fanno si che la funzione è convessa in $]-\infty, 0]$ e concava in $[0, +\infty[$.

Grafico:



6) $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right) dx \quad (log|x+1| + 2\, log|x+2|)|_0^1 =$

$log\, 2 + 2\, log\, 3 - log\, 1 - 2\, log\, 2 = log\, 9/2.$

7) $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$; $\mathbb{B} \cdot \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. L'uguaglianza $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{U}$ è verificata se $2x_1 + x_2 = 3$ e $x_1 + x_2 = 7$ ovvero $x_1 = -4$ e $x_2 = 11$.

8) $\nabla f = \left(f'_x, f'_y, f'_z, f'_w\right)$.

$f'_x = 2xy^3 + z^{x+y-w} \cdot log\, z$ $\qquad$ $f'_y = 3x^2y^2 + z^{x+y-w} \cdot log\, z$

$f'_z = (x + y - w)z^{x+y-w-1}$ $\qquad$ $f'_w = -z^{x+y-w} \cdot log\, z.$

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)

21 settembre 2018

Compito Unico

1) Indichiamo con s la proposizione composta $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow \ (q \Rightarrow r))$ e con t la proposizione composta $(p\ e\ r) \Leftrightarrow \neg q$, la tavola di verità risulta:

p	q	r	$\neg q$	$q \Rightarrow r$	$q \Leftrightarrow$	$(q \Rightarrow r)$	$p\ e\ r$	s	t	$s \Rightarrow t$
V	V	V	F	V		V	V	V	F	F
V	V	F	F	F		F	F	F	V	V
V	F	V	V	V		F	V	F	V	V
V	F	F	V	V		F	F	F	F	V
F	V	V	F	V		V	F	V	V	V
F	V	F	F	F		F	F	V	V	V
F	F	V	V	V		F	F	V	F	F
F	F	F	V	V		F	F	V	F	F

2) Per un numero palindro di dieci cifre abbiamo 9 modi distinti per scegliere la prima cifra, 10 modi distinti di scelta per la seconda cifra, 10 modi distinti di scelta per la terza cifra e così via fino alla quinta cifra, pertanto i numeri palindromi di dieci cifre sono $9 \cdot 10^4 = 90.000$. Se si richiede che il numero sia pari, l'unica differenza è nella scelta della prima cifra, in questo caso abbiamo 4 modi distinti di scelta (la prima cifra non può essere 0), pertanto i numeri pari palindromi di dieci cifre sono $4 \cdot 10^4 = 40.000$.

3) $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -2 \vee x \geq 2\}$; $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}: |x| < 1\} = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x < 1\}$; $\mathcal{C}(\mathbb{A}) = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x < 2\}$. Dato che $\mathbb{B} \subset \mathcal{C}(\mathbb{A})$, $\mathbb{C} = \mathcal{C}(\mathbb{A}) \cap \mathbb{B} = \mathbb{B}$; $\delta(\mathbb{C}) = \delta(\mathbb{B}) = \{-1, 1\}$; $\mathbb{C}$ è un insieme aperto.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + sen^2 x}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{sen^2 x}{x^2}}{\frac{1 - cos\, x}{x^2}} = \frac{2}{1/2} = 4;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x\right)^2 = \left(e^2\right)^2 = e^4.$$

5) $C.E.$: $x \geq 0$; $C.E. = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (nota che il denominatore è somma di quantità positive, quindi sicuramente diverso da zero).

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in C.E.$ perché rapporto fra quantità positive, $y(0) = \dfrac{e^{\sqrt{0}}}{e^{\sqrt{0}} + 2} = \dfrac{1}{3}$, unica intersezione con gli assi nel punto $P\left(0, \dfrac{1}{3}\right)$, punto di stop per la funzione.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+2/e^{\sqrt{x}}} = \frac{1}{1+(\to 0)} = 1$; asintoto orizzontale dx di equazione $y = 1$.

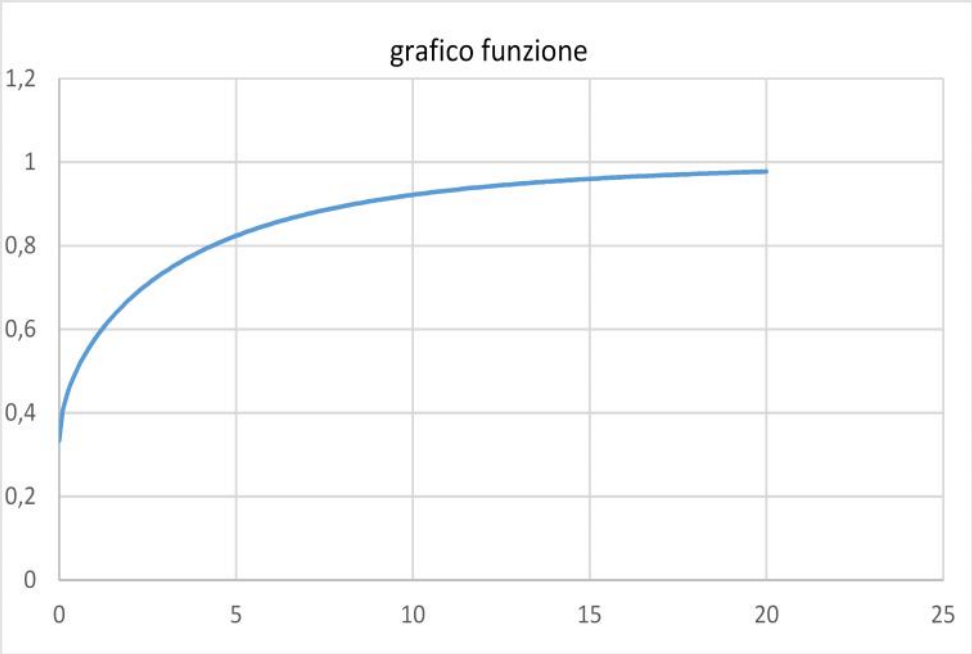
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(e^{\sqrt{x}}+2\right) - e^{\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(e^{\sqrt{x}}+2\right)^2} =$

$\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}+2\right)^2}$. $y' > 0, \forall x > 0$. Funzione strettamente crescente nel suo $C.E.$.

$\lim_{x \to 0^+} y'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}+2\right)^2} = \frac{(\to 1)}{(\to 0^+) \cdot (\to 9)} = +\infty$; P punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: la stetta crescenza della funzione insieme all'esistenza dell'asintoto orizzontale destro e al fatto che la funzione non presenta punti di flesso, fanno sì che la funzione è concava in $[0, +\infty[$.

Grafico:



6) $\int \left(5x^4 + 2x - \frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \left(5x^4 + 2x - \frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}} - x^{-2}\right) =$

$x^5 + x^2 - x^{\frac{8}{5}} + x^{-1} + k = x^5 + x^2 - \sqrt[5]{x^8} + \frac{1}{x} + k$.

7) Se le due funzioni presentano nel punto $x_0 = 1$ rette tangenti parallele esse hanno nel punto derivate uguali; calcoliamo le due derivate: $y' = 2x + k$ e $y' = 3x^2 + 2k$ con $y'(1) = 2 + k$ e $y'(1) = 3 + 2k$, posto $2 + k = 3 + 2k$ si ottiene $k = -1$ e per entrame le funzioni $y'(1) = 1$. Nel punto $x_0 = 1$ le funzioni presentano $y(1) = 0$ e $y(1) = -1$, ne segue che le equazioni delle rette tangenti alle curve sono rispettivamente: $y = x - 1$ e $y = x - 2$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $w - w(P) = \nabla w(P) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix}$.

$w(P) = 1,\ \nabla w = \left(-\dfrac{y}{(x+z)^2}, \dfrac{1}{x+z}, -\dfrac{y}{(x+z)^2} \right)$, $\nabla w(P) = (-1, 1, -1)$.

Equazione del piano tangente: $w - 1 = -(x-1) + (y-1) - (z-0)$, oppure $x - y + z + w = 1$.

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)

13 ottobre 2018

Compito Unico

1) Indichiamo con s la proposizione composta $(p\ e\ r) \Rightarrow (p\ o\ \neg q)$ e con t la proposizione composta $\neg(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow \neg q$, la tavola di verità risulta:

p	q	r	$\neg q$	$p\ o\ \neg q$	$\neg(p \Leftrightarrow r)$	$p\ e\ r$	s	t	$s \Rightarrow t$
V	V	V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	V	V	V

2) $f(g(x)) = f(cos\,x) = 3^{cos\,x}$; $f\left(\dfrac{1}{g(x)}\right) = f\left(\dfrac{1}{cos\,x}\right) = 3^{\frac{1}{cos\,x}}$. Le derivate delle due funzioni composte sono rispettivamente:

$y' = 3^{cos\,x} \cdot log\,3 \cdot (-sen\,x) = -sen\,x \cdot 3^{cos\,x} \cdot log\,3$ e

$y' = 3^{\frac{1}{cos\,x}} \cdot log\,3 \cdot \left(-\dfrac{-sen\,x}{cos^2 x}\right) = \dfrac{sen\,x \cdot 3^{\frac{1}{cos\,x}} \cdot log\,3}{cos^2 x}$.

3) $\mathcal{C}(\mathbb{B}) = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\}$; $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cap \mathcal{C}(\mathbb{B}) = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 1\}$.
Dato che $\mathbb{C}$ è un intervallo chiuso e limitato, $\mathcal{D}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ e $\delta(\mathbb{C}) = \{-2, 1\}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\,x^2}{1 - cos\,x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{sen\,x^2}{x^2}}{\frac{1-cos\,x}{x^2}} = \dfrac{1}{1/2} = 2$;

per $x \to +\infty$, $2\,x^3$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[5]{x}$ e $3\,x^4$ sono $o(e^x)$ pertanto

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 2\,x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x} + 3\,x^4 + e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1.$

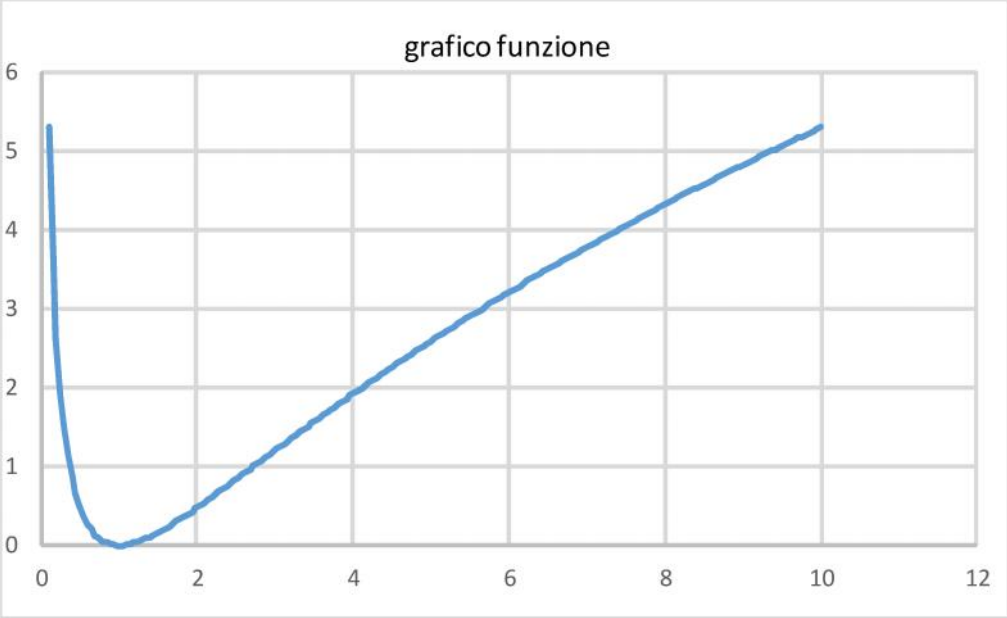
5) $C.E.$: $x > 0$; $C.E. = \mathbb{R}_{++} =]0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$ perché y è un quadrato, $y = 0 \Leftrightarrow log^2 x = 0 \Leftrightarrow log\,x = 0 \Leftrightarrow x = 1$, unica intersezione con gli assi nel punto $P(1, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to 0^+} log^2 x = (\to -\infty)^2 = +\infty$; asintoto verticale di equazione $x = 0$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} log^2 x = (\to +\infty)^2 = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log^2 x}{x} = 0$, in quanto per $x \to +\infty$, $log^2 x$ è $o(x)$.
Crescenza e decrescenza: $y' = 2 \cdot log\,x \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\,log\,x}{x}$.

$y' > 0$ se $log\, x > 0$ ovvero $x > 1$. Funzione strettamente crescente in $[1, +\infty[$, strettamente decrescente in $]0, 1]$, minimo assoluto nel punto $P(1, 0)$.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{\not{x}} \cdot \not{x} - 2\, log\, x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{2\,(1 - log\, x)}{x^2}$.

$y'' > 0$ se $1 - log\, x > 0$ ovvero $log\, x < 1$ da cui $x < e$. Funzione strettamente concava in $[e, +\infty[$, strettamente convessa in $]0, e]$. $y(e) = log^2 e = 1$, punto di flesso di coordinate $F(e, 1)$.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^k 2x\, dx = x^2|_0^k = k^2$ mentre $\displaystyle\int_0^k 3x^2\, dx = x^3|_0^k = k^3$; ne segue che $\displaystyle\int_0^k 2x\, dx = \int_0^k 3x^2\, dx$ se e solo se $k^2 = k^3$ che può essere riscritta come $k^2(1 - k) = 0$ che ha come unica soluzione positiva $k = 1$.

7) Una retta passante per l'origine degli assi ha equazione $y = mx$, se essa è parallela alla retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0 = 0$, $m = y'(0)$; in particolare $y' = e^x + 4\,x$ con $y'(0) = 1$ e quindi l'equazione cercata è $y = x$.

8) $\nabla f = \left(f'_x, f'_y, f'_z\right)$ con:

$f'_x = 2xy^2$;

$f'_y = 2x^2y - 2(y + z^3) = 2(x^2y - y - z^3)$;

$f'_z = -2(y + z^3) \cdot 3\,z^2 = -6\,z^2(y + z^3)$.