Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)
4 giugno 2019

Compito unico

1) Indichiamo con s la proposizione composta $\neg q \Rightarrow (p\ o\ r)$ e con t la $(p\ e\ q) \Leftrightarrow \neg r$, la tavola di verità richiesta è la seguente:

p	q	r	$p\ o\ r$	$p\ e\ q$	s	t	$s \Rightarrow t$
V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

2) Per gli insiemi A, B e C valgono le seguenti inclusioni: $A \subset B$ e $C \subset B$; pertanto $(A \cup B) \cap C = B \cap C = C$ e
$(A \cap B) \cup C = A \cup C = \{-4, -3\} \cup [-2, 2] \cup \{3, 4\}$. Per quanto riguarda la natura degli insiemi notiamo che la frontiera di C è $\delta(C) = \{-2, 2\} \subset \mathcal{C}(C)$ quindi C è un insieme aperto e di conseguenza $(A \cup B) \cap C$ è aperto, mentre
$\delta(A \cup C) = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\} \subset A \cup C$ quindi $A \cup C$ è un insieme chiuso e di conseguenza $(A \cap B) \cup C$ è chiuso.

3) $f(g(x)) = f(sen\,x) = 1 - e^{3sen\,x}$, $g(f(x)) = g(1 - e^{3x}) = sen(1 - e^{3x})$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(g(x))}{g(f(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{3sen\,x}}{sen(1 - e^{3x})} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^{3sen\,x}}{3\,sen\,x} \cdot \frac{3\,sen\,x}{x} \cdot \frac{x}{1 - e^{3x}} \cdot \frac{1 - e^{3x}}{sen(1 - e^{3x})} = -1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = 1.$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{x(1 - cos\,x)}{sen^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - cos\,x}{x^2}}{\left(\frac{sen\,x}{x}\right)^3} = \frac{\left(\to \frac{1}{2}\right)}{(\to 1)} = \frac{1}{2}.$$

Per $x \to +\infty$, $log^4 x = o(x^2)$ e $log^3 x = o(x^3)$, pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + log^4 x}{x^3 + log^3 x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

5) $C.E.$: $1 + \dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$y(-x) = log\left(1 + \dfrac{1}{(-x)^2}\right) = log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = y(x)$; funzione pari, la studiamo solo per $x > 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) > 0 \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{x^2} > 1$, vera $\forall x > 0$, funzione positiva in $]0, +\infty[$, nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = log(\to +\infty) = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 0$;

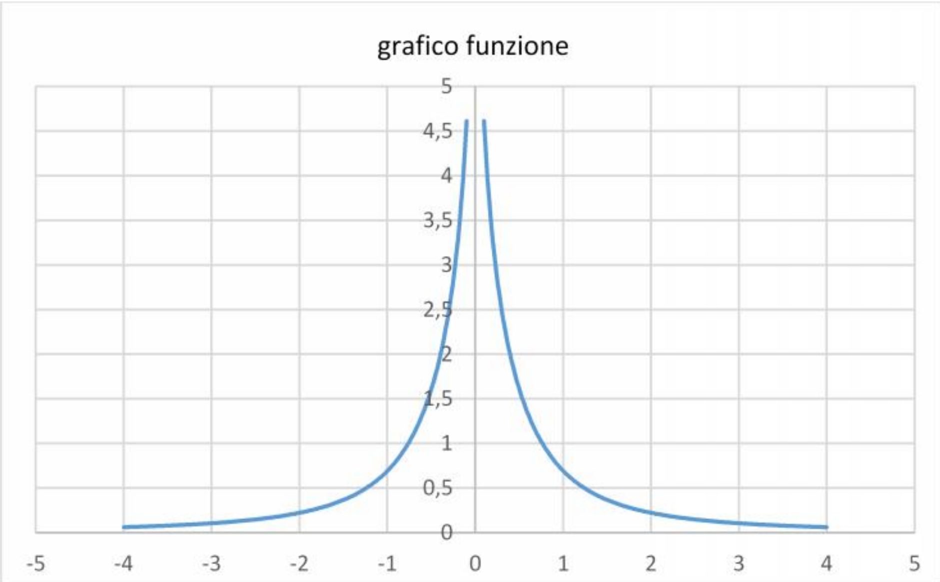
$\lim\limits_{x \to +\infty} log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = log(\to 1) = 0$, asintoto orizzontale dx di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{x(1+x^2)}$.

$y' < 0, \forall x > 0$. Funzione strettamente decrescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{2(1+3x^2)}{(x+x^3)^2}$, $y'' > 0, \forall x > 0$. Funzione strettamente convessa in $]0, +\infty[$.

Grafico:



6) $\int_1^4 \frac{x\sqrt{x}+x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx =$

$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x\sqrt{x}}{3}+\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{16}{4}+\frac{8}{3}+2\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+1\right) = \frac{85}{12}$.

7) I polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni e^x e $cos\,x$ sono rispettivamente $P_1(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}$ e $P_2(x) = 1-\frac{x^2}{2}$, pertanto il polinomio cercato è $P(x) = x(P_1(2x) - 3P_2(x)) = x\left(1+2x+2x^2-3\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\right) =$

$-2x+2x^2+\frac{7}{2}x^3$.

8) $\nabla f = (2\alpha x+\gamma y, 2\beta y+\gamma x)$, $\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2\alpha & \gamma \\ \gamma & 2\beta \end{bmatrix}$; posto $\begin{bmatrix} 2\alpha & \gamma \\ \gamma & 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ si ottiene facilmente $\alpha = 3$, $\beta = -1/2$ e $\gamma = 2$.