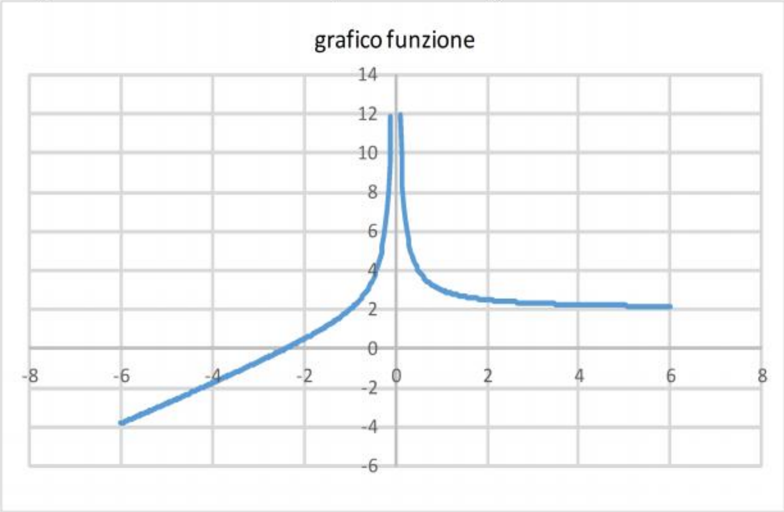
Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)
5 luglio 2019

Compito unico

1) L'insieme $A \cup B = [-10, 20[$, mentre l'insieme $A \cap B =]-10, 10]$; pertanto $(A \cup B) \cap C = [-10, 20[\cap [0, 20] = [0, 20[$, intervallo né aperto né chiuso, e $(A \cap B) \cup C =]-10, 10] \cup [0, 20] =]-10, 20]$, anch'esso intervallo né aperto né chiuso.

2) Le definizioni di limite proposte equivalgono a:
   1: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$;
   2: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$;
   3: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.
   Un possibile grafico di funzione è riportato di seguito.



3) $f(g(x)) = f(log_3(1-x)) = 5(log_3(1-x))^3$, $g(f(x)) = g(5x^3) = log_3(1-5x^3)$.
   Per determinare l'inversa di $f(g(x))$, posto $y = 5(log_3(1-x))^3$ si ha $(log_3(1-x))^3 = \frac{y}{5}$, da cui $log_3(1-x) = \sqrt[3]{\frac{y}{5}} \Rightarrow 1 - x = 3^{\sqrt[3]{\frac{y}{5}}}$ ed infine $x = 1 - 3^{\sqrt[3]{\frac{y}{5}}}$; l'inversa di $f(g(x))$ ha equazione $y = 1 - 3^{\sqrt[3]{\frac{x}{5}}}$. Procediamo nello stesso modo per l'inversa di $g(f(x))$, posto $y = log_3(1-5x^3)$ si ha $1 - 5x^3 = 3^y$ ovvero $x^3 = \frac{1-3^y}{5} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1-3^y}{5}}$; l'inversa di $g(f(x))$ ha equazione $y = \sqrt[3]{\frac{1-3^x}{5}}$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{log(1-x^3)}{1-cos\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{log(1-x^3)}{x^3} \cdot x^{\cancel{3}}}{\frac{1-cos\,x}{x^2} \cdot \cancel{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{log(1-x^3)}{x^3}}{\frac{1-cos\,x}{x^2}} \cdot x =$$
$$\frac{(\to -1)}{(\to \frac{1}{2})} \cdot (\to 0) = 0.$$

Per $x \to +\infty$, $1 + x^2 \asymp x^2$ e $1 + x \asymp x$, pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{1+x^2}}{\sqrt{1+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1.$$

5) $C.E.$: $4 + x^2 > 0 \Rightarrow x^2 > -4$, vera $\forall x \in \mathbb{R}$; $C.E. = \mathbb{R}$.

$y(-x) = \dfrac{-x}{\sqrt{4+(-x)^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}} = -y(x)$; funzione dispari, la studiamo solo per $x > 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}} > 0 \Rightarrow x > 0$, funzione positiva in $]0, +\infty[$; $y(0) = 0$, unica intersezione con gli assi nell'origine O.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

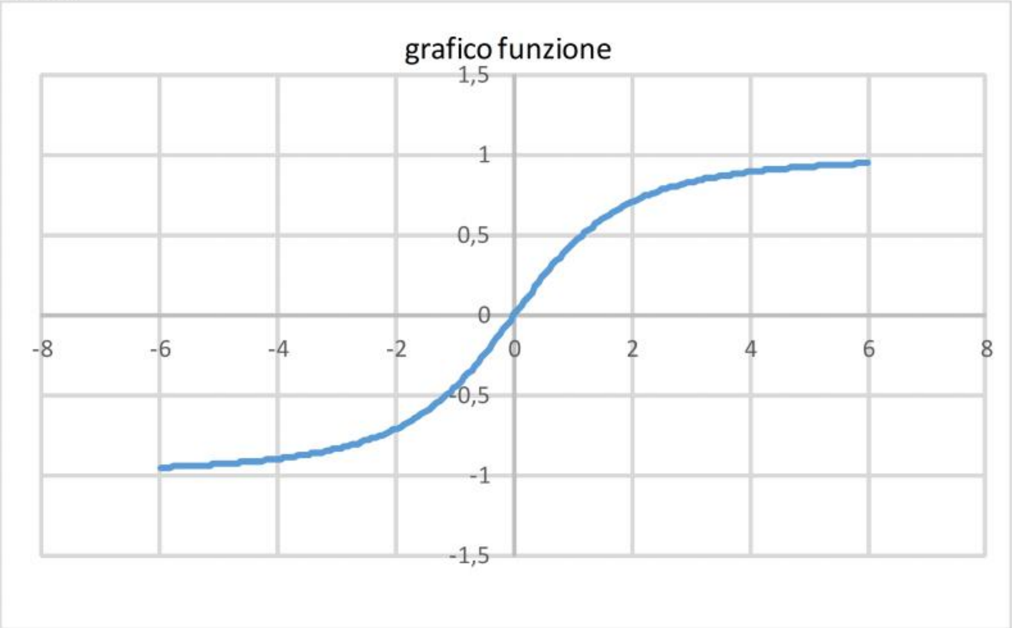
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{4/x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4/x^2+1}} = \frac{1}{(\to 1)} = 1,$$ asintoto orizzontale dx di equazione $y = 1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1 \cdot \sqrt{4+x^2} - x \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4+x^2}}}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^2} = \dfrac{4}{\left(\sqrt{4+x^2}\right)^3}$.

$y' > 0, \forall x > 0$. Funzione strettamente crescente in $]0, +\infty[$.

Concavità e convessità: la stretta monotonia crescente insieme all'esistenza dell'asintoto orizzontale dx, alla simmetria rispetto l'origine e all'esistenza di un unico punto di flesso implicano che la funzione è strettamente concava in $]0, +\infty[$ e l'origine è l'unico punto di flesso.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_2^3 \left(3x + e^x - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 + e^x - log|x|\right)\Bigg|_2^3 =$

$\left(\dfrac{27}{2} + e^3 - log\,3\right) - \left(6 + e^2 - log\,2\right) = \dfrac{15}{2} + e^3 - e^2 + log\,\dfrac{2}{3}$.

7) La retta $y = x - 2$ ha coefficiente angolare uguale a 1 e quindi la retta tangente alla curva di equazione $y = x - x^4$ è parallela alla retta se e solo se $y' = 1$, da cui

$1-4x^3=1$ che ha come unica soluzione $x=0$. La retta tangente ha equazione $y-y(0)=y'(0)\cdot x$ che dopo le opportune sostituzioni dà $y=x$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z-z(P)=\nabla z(P)\cdot\begin{pmatrix}x-2\\y-2\end{pmatrix}$.

$z(P)=3$, $\nabla z=\left(\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2+y^2}},\dfrac{\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2+y^2}}\right)$, $\nabla z(P)=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$.

Equazione del piano tangente: $z-3=\dfrac{2}{3}(x-2)+\dfrac{2}{3}(y-2)$, oppure $2x+2y-3z+1=0$.