

# Università degli Studi di Siena

## Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)

5 luglio 2019

Compito unico ✓

- 1) (6 punti) Siano dati gli insiemi  $A = [-10, 10]$ ,  $B = ]-10, 20[$  e  $C = [0, 20]$ .  
Determinare gli insiemi  $(A \cup B) \cap C$  e  $(A \cap B) \cup C$ , ed indicare se tali insiemi sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi.
- 2) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione  $f$  che soddisfa le seguenti tre definizioni di limite:
  - 1:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: 0 < |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) > \epsilon;$
  - 2:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: x < -\delta_\epsilon \Rightarrow f(x) < -\epsilon;$
  - 3:  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: x > \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon.$
- 3) (8 punti) Siano date le funzioni  $f(x) = 5x^3$  e  $g(x) = \log_3(1 - x)$ ; determinare le espressioni delle funzioni composte  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$ , e calcolare le espressioni delle funzioni inverse di  $f(g(x))$  e  $g(f(x))$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x^3)}{1 - \cos x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x}}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$ . (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta un solo punto di flesso.)
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_2^3 \left( 3x + e^x - \frac{1}{x} \right) dx$ .
- 7) (6 punti) Determinare il punto nel quale la funzione di equazione  $y = x - x^4$  presenta retta tangente parallela alla retta  $y = x - 2$ ; dopo aver determinato il punto calcolare l'equazione della retta tangente.
- 8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie  $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$  nel punto di coordinate  $P(2, 2)$ .

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono in questa prova una votazione non inferiore a 24 sono ammessi alla prova orale.