

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)

5 luglio 2019

Compito unico ✓

- 1) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = [-10, 10]$, $B =]-10, 20[$ e $C = [0, 20]$.
Determinare gli insiemi $(A \cup B) \cap C$ e $(A \cap B) \cup C$, ed indicare se tali insiemi sono aperti, chiusi o né aperti né chiusi.
- 2) (6 punti) Disegnare il grafico di una funzione f che soddisfa le seguenti tre definizioni di limite:
 - 1: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: 0 < |x| < \delta_\epsilon \Rightarrow f(x) > \epsilon;$
 - 2: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: x < -\delta_\epsilon \Rightarrow f(x) < -\epsilon;$
 - 3: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0: x > \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon.$
- 3) (8 punti) Siano date le funzioni $f(x) = 5x^3$ e $g(x) = \log_3(1 - x)$; determinare le espressioni delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$, e calcolare le espressioni delle funzioni inverse di $f(g(x))$ e $g(f(x))$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x^3)}{1 - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x}}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}}$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta un solo punto di flesso.)
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_2^3 \left(3x + e^x - \frac{1}{x} \right) dx$.
- 7) (6 punti) Determinare il punto nel quale la funzione di equazione $y = x - x^4$ presenta retta tangente parallela alla retta $y = x - 2$; dopo aver determinato il punto calcolare l'equazione della retta tangente.
- 8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ nel punto di coordinate $P(2, 2)$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono in questa prova una votazione non inferiore a 24 sono ammessi alla prova orale.