Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)
5 settembre 2019

Compito unico

1) Indichiamo con s la proposizione composta $(p\ o\ q) \Rightarrow r$ e con t la proposizione composta $\neg q \Rightarrow (p\ e\ r)$, la tavola di verità della proposizione proposta è la seguente:

p	q	r	$p\ o\ q$	$\neg q$	$p\ e\ r$	s	t	$s \Leftrightarrow t$
V	V	V	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F

.

2) In un numero di cinque cifre composto solo con cifre dispari abbiamo per ogni cifra 5 distinti modi di scelta, i numeri possibili sono pertanto $5^5 = 3.125$. Se il numero deve presentare una sola volta la cifra 1, abbiamo 5 modi distinti ove posizionare la cifra 1 e per ognuna delle restanti 4 cifre vi sono 4 distinti modi di scelta, i numeri possibili sono pertanto $5 \cdot 4^4 = 1.280$.

3) $f(g(x)) = f(1-x^2) = 2(1-x^2) - 1 = 1 - 2x^2$,
$g(f(x)) = g(2x-1) = 1 - (2x-1)^2 = 4x - 4x^2$,
$f(g(x)) - g(f(x)) = 1 - 2x^2 - (4x - 4x^2) = 2x^2 - 4x + 1$.
Per risolvere la disequazione poniamo $2x^2 - 4x + 1 > 1$ che equivale a $2x^2 - 4x > 0$ ovvero $2x(x-2) > 0$; il fattore $2x$ è maggiore di 0 per $x > 0$ mentre $x - 2 > 0$ per $x > 2$, di conseguenza il prodotto $2x(x-2)$ è positivo quando $x < 0 \vee x > 2$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x \cdot tg\, x}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen\, x}{x} \cdot \frac{tg\, x}{x}}{\frac{1 - cos\, x}{x^2}} = \frac{(\to 1) \cdot (\to 1)}{(\to \frac{1}{2})} = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x\right)^2 = (\to e^2)^2 = e^4.$$

5) $C.E.$: $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$, il fattore $1 - x$ è maggiore di 0 per $x < 1$ mentre $1 + x > 0$ per $x > -1$, il rapporto $\dfrac{1-x}{1+x}$ è positivo quando i due fattori hanno segno eguale, e questo accade se e solo se $-1 < x < 1$, $C.E. =]-1, 1[$.

$$y(-x) = log\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right) = log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} =$$

$-log\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) = -y(x)$; funzione dispari, la studiamo solo per $x \in [0, 1[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} > 1$ che equivale a $\frac{-2x}{1+x} > 0$, non verificata per $x \in [0,1[$, funzione non positiva in $[0,1[$; $y(0) = log\,1 = 0$, unica intersezione con gli assi nell'origine O.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 1} log\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = log(\to 0) = -\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 1$.

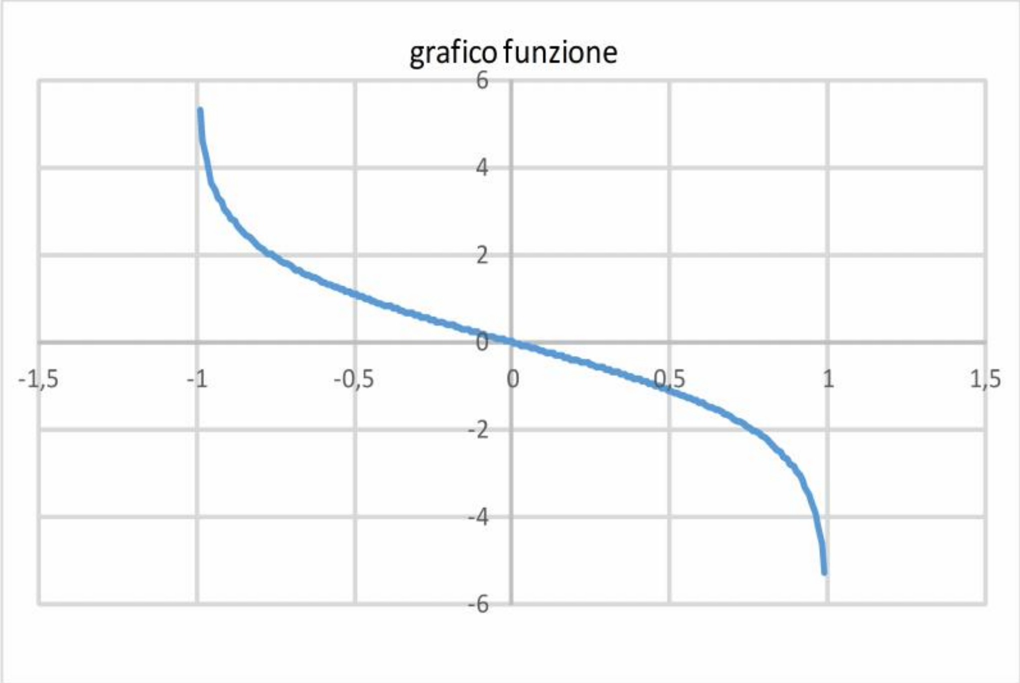
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-1\cdot(1+x) - 1\cdot(1-x)}{(1+x)^{2}} = \frac{-2}{1-x^2}$.

$y' < 0, \forall x \in [0,1[$. Funzione strettamente decrescente in $[0,1[$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}$. $y'' < 0, \forall x \in [0,1[$.

Funzione strettamente concava in $[0,1[$, punto di flesso in O.

Grafico:



6) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (sen\,x - 3\cos x)\,dx = (-\cos x - 3\,sen\,x)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$

$\left(-\cos\frac{\pi}{4} - 3\,sen\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 3\,sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$.

7) $y = sen(2x) - e^x \Rightarrow y(0) = -1$,

$y' = 2\cos(2x) - e^x \Rightarrow y'(0) = 1$,

$y'' = -4\,sen(2x) - e^x \Rightarrow y''(0) = -1$,

$y''' = -8\cos(2x) - e^x \Rightarrow y'''(0) = -9$.

Il polinomio di Mac Laurin delle funzione proposta è

$P_3(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3$.

8) $\nabla f = (y^2 - 18x, 2xy - 4y)$.

FOC: $\begin{cases} y^2 - 18x = 0 \\ 2xy - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 18x = 0 \\ 2y(x-2) = 0 \end{cases}$

$\nearrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\searrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow (x = 2 \wedge y = -6) \vee (x = 2 \wedge y = 6)$, tre punti critici

$P_1(0,0),\ P_2(2,-6)$, $P_3(2,6)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -18 & 2y \\ 2y & 2x-4 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -18(2x-4) - 4y^2 = 72 - 36x - 4y^2$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 72 > 0$, $f''_{xx}(P_1) = -18 < 0$. P_1 punto di massimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = |\mathcal{H}f(P_3)| = -144 < 0$. P_2 e P_3 punti di sella.