Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)
12 ottobre 2019

Compito unico

1) Indichiamo con s la proposizione composta $(p\ o\ r) \Rightarrow q$ e con t la proposizione composta $r \Rightarrow (p\ e\ q)$, la tavola di verità della proposizione proposta è la seguente:

p	q	r	$p\ o\ r$	$p\ e\ q$	s	t	$s \Leftrightarrow t$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V

.

2) Nel primo caso abbiamo 8 distinti modo di scelta per il colore della banda centrale, 7 distinti modi di scelta per il colore della banda di sinistra o di destra e 6 distinti modi di scelta per il colore della banda rimanente, le possibili bandiere sono quindi $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. Nel secondo caso abbiamo 8 modi distinti per la centrale e 7 distinti modi per ognuna delle due rimanenti, le possibili bandiere sono quindi $8 \cdot 7 \cdot 7 = 392$.

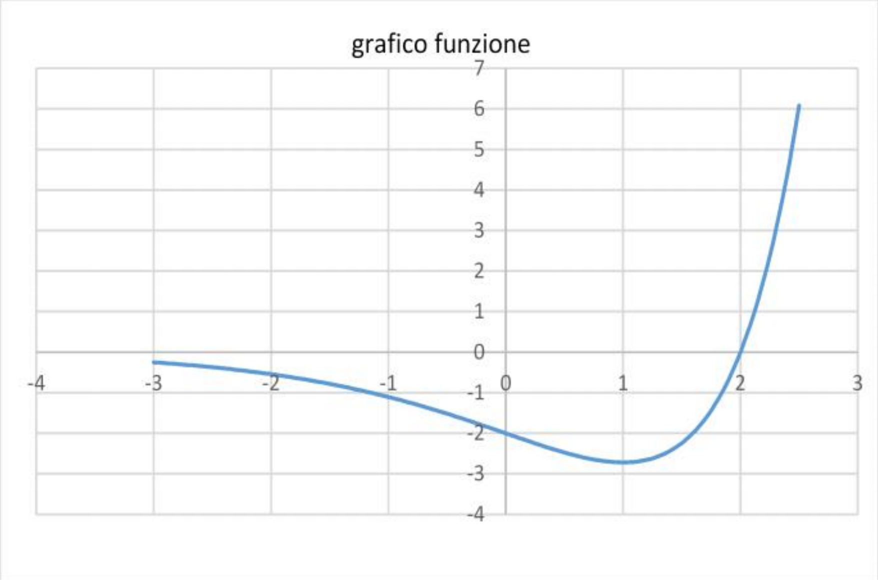
3) $D = A \cup B = [0,10] \cup]-5,5[=]-5,10]$; $\delta(D) = \{-5,10\}$.
$E = (A \cap B) \cup C = ([0,10] \cap]-5,5[) \cup [2,+\infty[= [0,5[\cup [2,+\infty[= [0,+\infty[$; $\delta(E) = \{0\}$.

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{sen(1-cos\,x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(1-cos\,x)}{1-cos\,x} \cdot \frac{1-cos\,x}{x^2} = (\to 1) \cdot \left(\to \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-2x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} -2 \cdot \frac{\sqrt{1-2x}-1}{-2x} = -2 \cdot \left(\to \frac{1}{2}\right) = -1.$$

5) $C.E. = \mathbb{R}$. Funzione né pari né dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $(x-2)e^x \geq 0 \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$, funzione non negativa in $[2,+\infty[$, non positiva in $]-\infty,2]$; $y(0) = -2$, intersezione con l'asse delle ascisse in $(2,0)$, con l'asse delle ordinate in $(0,-2)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} (x-2)e^x = (\to -\infty) \cdot (\to 0)$ - $\boldsymbol{FI}$. Riscriviamo il limite come:
$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = 0$, in quanto $x-2 = o(e^{-x})$ per $x \to -\infty$, asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = 0$.
$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} (x-2)e^x = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$.
$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2)e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)e^x = (\to 1) \cdot (\to +\infty) = +\infty$. A dx né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo.
Crescenza e decrescenza: $y' = 1 \cdot e^x + (x-2)e^x = (x-1)e^x$.

$y' \geq 0$, se $(x-1)e^x \geq 0 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Funzione strettamente decrescente in $]-\infty, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty[$; $y(1) = -e$. Minimo assoluto nel punto $m(1, -e)$.
Concavità e convessità: $y'' = 1 \cdot e^x + (x-1)e^x = xe^x$. $y'' \geq 0$, se $xe^x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, 0]$, strettamente convessa in $[0, +\infty[$. Punto di flesso $(0, -2)$.
Grafico:



6) $\displaystyle\int \frac{2+x}{3+x}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{3+x}\right)dx = x - log|3+x| + c.$

7) $$y' = \frac{cos(x+2^x)\cdot(1+2^x\cdot log\,2)\cdot(1+x)^3 - sen(x+2^x)\cdot 3\cdot(1+x)^2}{(1+x)^6}$$

$$= \frac{cos(x+2^x)\cdot(1+2^x\cdot log\,2)\cdot(1+x) - 3\,sen(x+2^x)}{(1+x)^4}.$$

8) $\nabla f = (6x^2-6, -2y)$.

FOC: $\begin{cases} 6x^2-6=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(\pm 1, 0)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 12x & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -24x$

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = -24 < 0$. P_1 punto di sella.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = 24 > 0$, $f''_{yy}(P_2) = -2 < 0$. P_2 punto di massimo.