Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)
13 febbraio 2019

Compito $\mathbb{I}1$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe che soddisfano le ipotesi poste:

p	q	r	$p\ o\ q$	$(p\ o\ q) \Rightarrow r$	$\neg q\ e\ r$	$((p\ o\ q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg q\ e\ r)$
V	V	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F

2) Nel caso di composizione libera del codice ognuno dei cinque caratteri può essere scelto in 36 modi distinti, in questo caso i possibili codici di accesso sono 36^5; nel caso in cui ogni codice deve necessariamente essere composto da almeno una lettera e da almeno una cifra, al numero prima determinato devono essere sottratti i codici formati solo con lettere 26^5 oppure solo con cifre 10^5, pertanto i possibili codici sono $36^5 - 26^5 - 10^5$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+4x)^k - 1}{x} = 4k$. Posto $4k = 2$ si ha $k = \dfrac{1}{2}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(2x^2+x^3)}{x^2 - 2x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(2x^2+x^3)}{2x^2+x^3} \cdot \dfrac{\cancel{x^2}(2+x)}{\cancel{x^2}(1-2x^2)} = 1 \cdot 2 = 2.$

$$\lim_{x \to +\infty} 2^x \cdot log\left(1 + \frac{1}{5^x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot log\left(1 + \frac{1}{5^x}\right)^{5^x} =$$
$(\to 0) \cdot (\to log\, e) = 0.$

5) $C.E. = \mathbb{R}$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, in quanto somma di esponenziali; $y(0) = 1 + e^2$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x + e^{2-x} = (\to 0) + (\to +\infty) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x + e^{2-x}}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(e^{2-x})$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x + e^{2-x} = (\to +\infty) + (\to 0) = +\infty$;

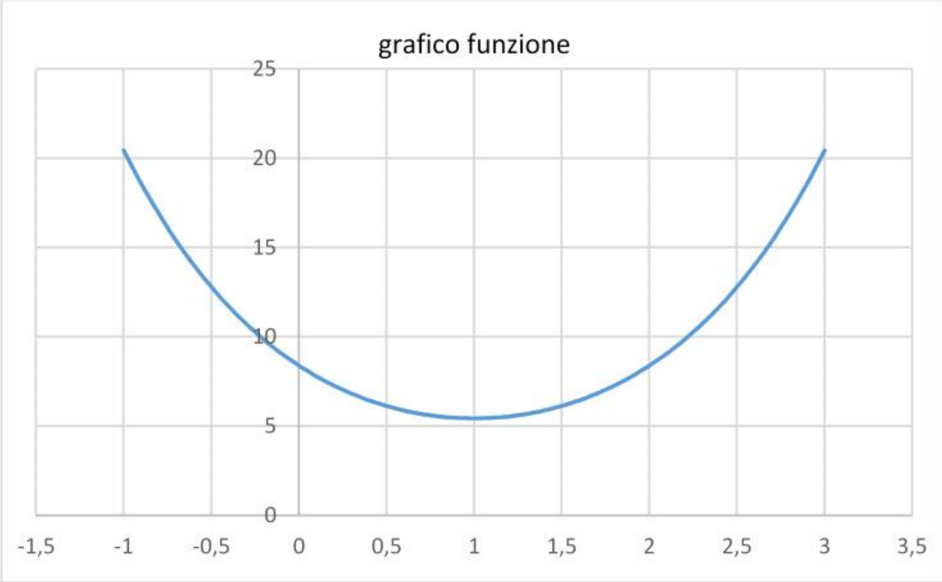
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + e^{2-x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^x)$;

la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^x - e^{2-x}$. $y' > 0 \Rightarrow e^x - e^{2-x} > 0 \Rightarrow e^x > e^{2-x} \Rightarrow x > 2 - x$, vera per $x > 1$. Funzione strettamente crescente in $[1, +\infty[$, strettamente decrescente in $]-\infty, 1]$, la funzione presenta minimo assoluto pari a $y(1) = 2e$.

Concavità e convessità: $y'' = e^x + e^{2-x}$. $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:



6) $\int \frac{x-5}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx - 5\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$

$\frac{1}{2}log(1+x^2) - 5\,arctg\,x + c = log\sqrt{1+x^2} - 5\,arctg\,x + c\,.$

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 5 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & -10 & 11 \\ 17 & 4 & -31 \\ -15 & -12 & 9 \end{bmatrix}.$

8) $\nabla f = (-4x + 6, 3y^2 - 12).$

FOC: $\begin{cases} -4x + 6 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = \pm 2 \end{cases}$, due punti critici

$P_{1,2}(3/2, \pm 2).$

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -24y.$

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = -48 < 0$. P_1 punto di sella.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = 48 > 0,\ f''_{xx}(P_2) = -4 < 0$. P_2 punto di massimo.

Compito $\mathbb{I}2$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe che soddisfano le ipotesi poste:

p	q	r	$p\ e\ q$	$(p\ e\ q) \Leftrightarrow r$	$q \Rightarrow \neg p$	$((p\ e\ q) \Leftrightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p)$
V	V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

2) Nel caso di composizione libera del codice ognuno degli otto caratteri può essere scelto in 36 modi distinti, in questo caso i possibili codici di accesso sono 36^8; nel

caso in cui ogni codice deve necessariamente essere composto da almeno una lettera e da almeno una cifra, al numero prima determinato devono essere sottratti i codici formati solo con lettere 26^8 oppure solo con cifre 10^8, pertanto i possibili codici sono $36^8 - 26^8 - 10^8$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - 2x)^k - 1}{x} = -2k$. Posto $-2k = -2$ si ha $k = 1$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctg(x + x^2)}{x^3 - x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{arctg(x + x^2)}{x + x^2} \cdot \frac{\cancel{x}(1 + x)}{x^{\cancel{3}2}(1 - x)} =$

$(\to 1) \cdot (\to +\infty) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \cdot log\left(1 + \frac{1}{2^x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x \cdot log\left(1 + \frac{1}{2^x}\right)^{2^x} =$

$(\to +\infty) \cdot (\to log\, e) = +\infty$.

5) $C.E. = \mathbb{R}$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0 \Rightarrow e^{-x} - e^{1+x} > 0 \Rightarrow e^{-x} > e^{1+x} \Rightarrow -x > 1 + x$, vera per $x < -1/2$, intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $P(-1/2, 0)$; $y(0) = 1 - e$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} - e^{1+x} = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{-x} - e^{1+x}}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(e^{-x})$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - e^{1+x} = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty$;

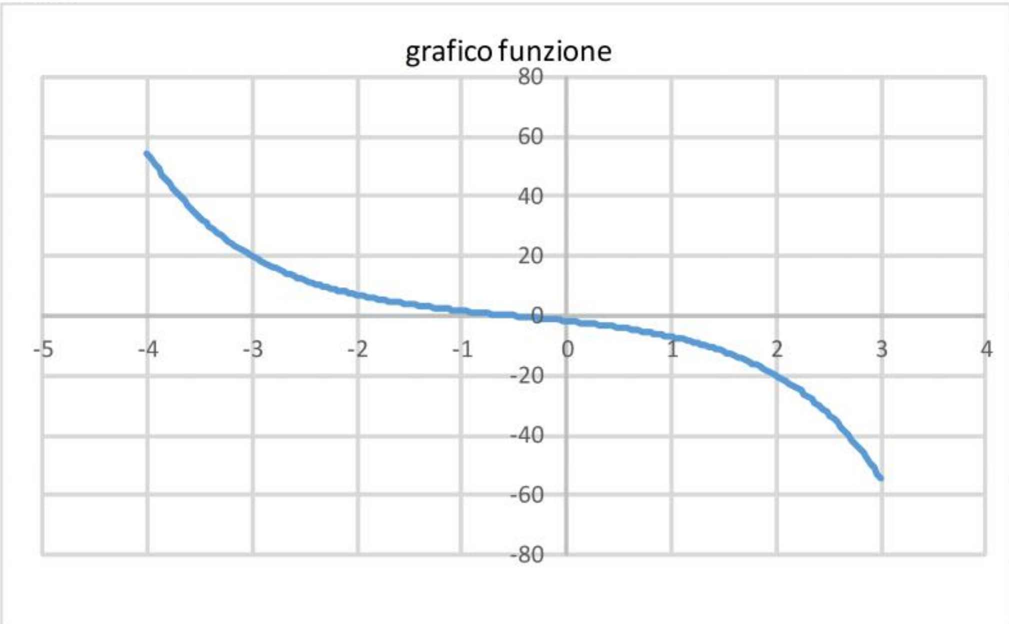
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-x} - e^{1+x}}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^{1+x})$;

la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = -e^{-x} - e^{1+x}$. $y' < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, in quanto somma di opposti di esponenziali. Funzione strettamente decrescente.

Concavità e convessità: $y'' = e^{-x} - e^{1+x}$. $y'' > 0$, vera per $x < -1/2$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, -1/2]$, strettamente concava in $[-1/2, +\infty[$; il punto P è l'unico flesso della funzione.

Grafico:



6) $\displaystyle\int \frac{2x-7}{1+x^2}\,dx = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx - 7\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$
$log(1+x^2) - 7\,arctg\,x + c\,.$

7) $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 10 & -60 \\ 15 & 0 & -35 \\ -10 & -2 & 19 \end{bmatrix}.$

8) $\nabla f = (3x^2 + 6x,\ -12 + 12y).$

FOC: $\begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ -12 + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x(x+2) = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$, due punti critici $P_1(0,1)$ e $P_2(-2,1)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 72x + 72.$

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 72 > 0,\ f''_{yy}(P_1) = 12 > 0.$ P_1 punto di minimo.
$|\mathcal{H}f(P_2)| = -72 < 0.$ P_2 punto di sella.

Compito $\mathbb{I}3$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe che soddisfano le ipotesi poste:

p	q	r	$\neg q\ e\ r$	$p\ e\ q$	$\neg r \Leftrightarrow (\neg q\ e\ r)$	$(p\ e\ q) \Rightarrow (\neg r \Leftrightarrow (\neg q\ e\ r))$
V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V

2) Nel caso di composizione libera del codice ognuno dei sette caratteri può essere scelto in 36 modi distinti, in questo caso i possibili codici di accesso sono 36^7; nel caso in cui ogni codice deve necessariamente essere composto da almeno una lettera e da almeno una cifra, al numero prima determinato devono essere sottratti i codici formati solo con lettere 26^7 oppure solo con cifre 10^7, pertanto i possibili codici sono $36^7 - 26^7 - 10^7$.

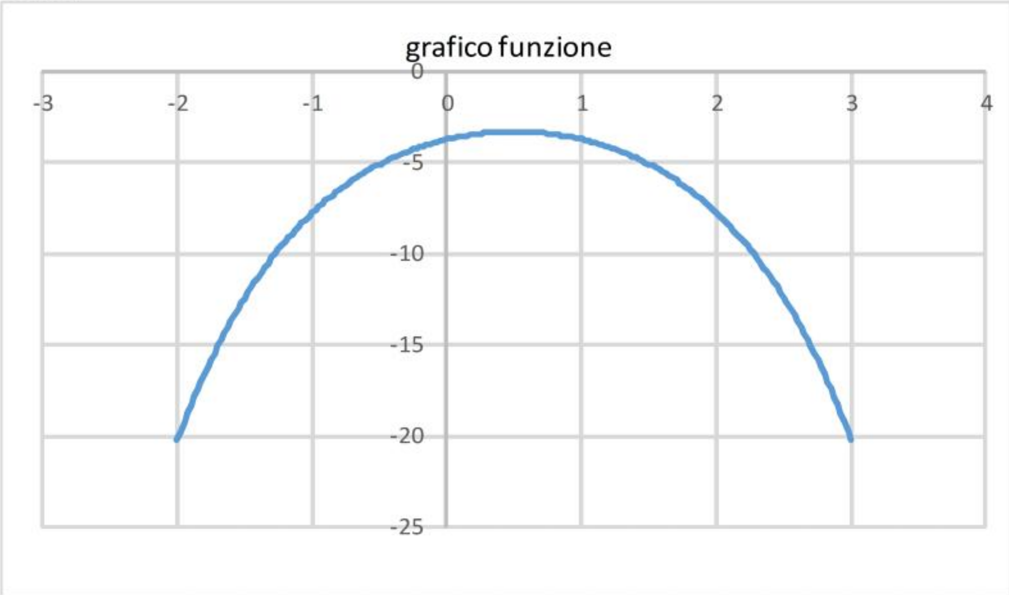
3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+kx)^9 - 1}{x} = 9k$. Posto $9k = 3$ si ha $k = \dfrac{1}{3}$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sen(x^4-x^2)}{3x^2-x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x^4-x^2)}{x^4-x^2} \cdot \frac{\cancel{x^2}(x^2-1)}{\cancel{x^2}(3-x)} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}.$

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2^x \cdot log\left(1 + \frac{1}{4^x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot log\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{4^x} =$
$(\to 0) \cdot (\to log\,e) = 0.$

5) $C.E. = \mathbb{R}.$
Segno ed intersezioni con gli assi: $y < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, in quanto somma di opposti di esponenzialii; $y(0) = -1 - e\,.$
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} -e^x - e^{1-x} = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty;$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{-e^x - e^{1-x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(e^{1-x})$;
$\lim_{x \to +\infty} -e^x - e^{1-x} = (\to -\infty) - (\to 0) = -\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} \frac{-e^x - e^{1-x}}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^x)$;
la funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = -e^x + e^{1-x}$. $y' > 0 \Rightarrow -e^x + e^{1-x} > 0 \Rightarrow e^{1-x} > e^x \Rightarrow 1 - x > x$, vera per $x < 1/2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 1/2]$, strettamente decrescente in $[1/2, +\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto pari a $y(1/2) = -2\sqrt{e}$.
Concavità e convessità: $y'' = -e^x + e^{1-x}$. $y'' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Funzione strettamente concava.
Grafico:



6) $\int \frac{3 - 2x}{1 + x^2}\, dx = 3\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx - \int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx = 3\, arctg\, x - log\left(1 + x^2\right) + c$.

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}^T \cdot \mathbb{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 16 & 1 \\ -6 & 8 \\ 19 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 16 & 50 \\ -8 & -6 & -2 \\ -2 & 19 & 61 \end{bmatrix}$.

8) $\nabla f = (2x + 3, 2y - 6y^2)$.

FOC: $\begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ 2y - 6y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/2 \\ 2y(1 - 3y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/2 \\ y = 0 \vee y = 1/3 \end{cases}$, due punti critici $P_1(-3/2, 0)$ e $P_2(-3/2, 1/3)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 - 12y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 4 - 24y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 4 > 0$, $f''_{xx}(P_1) = 2 > 0$. P_1 punto di minimo.
$|\mathcal{H}f(P_2)| = -4 < 0$. P_2 punto di sella.

Compito $\mathbb{I}4$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe che soddisfano le ipotesi poste:

p	q	r	$p\ o\ q$	$\neg q\ e\ r$	$(p\ o\ q) \Rightarrow \neg r$	$(\neg q\ e\ r) \Leftrightarrow ((p\ o\ q) \Rightarrow \neg r)$
V	V	F	V	F	V	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	V	V

2) Nel caso di composizione libera del codice ognuno dei nove caratteri può essere scelto in 36 modi distinti, in questo caso i possibili codici di accesso sono 36^9; nel caso in cui ogni codice deve necessariamente essere composto da almeno una lettera e da almeno una cifra, al numero prima determinato devono essere sottratti i codici formati solo con lettere 26^9 oppure solo con cifre 10^9, pertanto i possibili codici sono $36^9 - 26^9 - 10^9$.

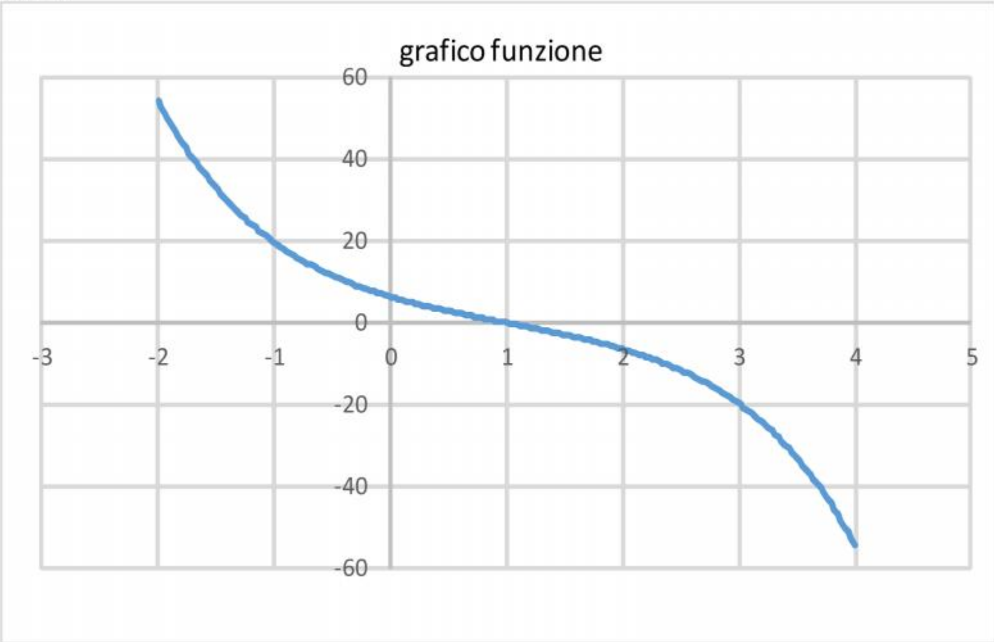
3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-kx)^3 - 1}{x} = -3k$. Posto $-3k = -9$ si ha $k = 3$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(x^3 - x)}{3x^3 - x^6} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(x^3 - x)}{x^3 - x} \cdot \dfrac{\cancel{x}(x^2-1)}{x^{\cancel{3}\,2}(3-x^3)} =$
$(\to 1) \cdot (\to -\infty) = -\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} e^x \cdot log\left(1 + \frac{2}{e^x}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(1 + \frac{2}{e^x}\right)^{e^x} = log\, e^2 = 2.$$

5) $C.E. = \mathbb{R}$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0 \Rightarrow e^{2-x} - e^x > 0 \Rightarrow e^{2-x} > e^x \Rightarrow$ $2 - x > x$, vera per $x < 1$, intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $P(1,0)$; $y(0) = e^2 - 1$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2-x} - e^x = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2-x} - e^x}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(e^{2-x})$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2-x} - e^x = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2-x} - e^x}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^x)$;
la funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = -e^{2-x} - e^x$. $y' < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, in quanto somma di opposti di esponenziali. Funzione strettamente decrescente.
Concavità e convessità: $y'' = e^{2-x} - e^x$. $y'' > 0$, vera per $x < 1$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 1]$, strettamente concava in $[1, +\infty[$; il punto P è l'unico flesso della funzione.

Grafico:



6) $\displaystyle\int \frac{5+x}{1+x^2}\,dx \;=\; 5\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \;+\; \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \;=$

$\quad 5\,arctg\,x + \frac{1}{2}\,log(1+x^2) + c \;=\; 5\,arctg\,x + \;log\sqrt{1+x^2} + c\,.$

7) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}\cdot\mathbb{B}^T = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} =$

$\quad \begin{bmatrix} -2 & 6 & 22 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 8 & -14 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$

8) $\nabla f = (3x^2 - 3,\; -4y - 4).$

$\quad FOC\colon \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = -1 \end{cases}$, due punti critici

$\quad P_{1,2}(\pm 1,\; -1).$

$\quad \mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix};\; |\mathcal{H}f| = -24x.$

$\quad SOC\colon |\mathcal{H}f(P_1)| = -24 < 0.$ P_1 punto di sella.

$\qquad\qquad |\mathcal{H}f(P_2)| = 24 > 0,\; f''_{yy}(P_2) = -4 < 0.$ P_2 punto di massimo.

Compito $\mathbb{I}5$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe che soddisfano le ipotesi poste:

p	q	r	$\neg r\ o\ q$	$\neg(q\ o\ r)$	$(\neg r\ o\ q) \Rightarrow p$	$\neg(q\ o\ r) \Rightarrow ((\neg r\ o\ q) \Rightarrow p)$
V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V

2) Nel caso di composizione libera del codice ognuno dei quattro caratteri può essere scelto in 36 modi distinti, in questo caso i possibili codici di accesso sono 36^4; nel caso in cui ogni codice deve necessariamente essere composto da almeno una lettera e da almeno una cifra, al numero prima determinato devono essere sottratti i codici formati solo con lettere 26^4 oppure solo con cifre 10^4, pertanto i possibili codici sono $36^4 - 26^4 - 10^4$.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - kx)^5 - 1}{x} = -5k$. Posto $-5k = 1$ si ha $k = -\dfrac{1}{5}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + x - x^3)}{4x^3 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1 + x - x^3)}{x - x^3} \cdot \dfrac{\cancel{x}(1 - x^2)}{\cancel{x}(4x^2 - 1)} = 1 \cdot (-1) = -1.$

$$\lim_{x \to +\infty} 3^x \cdot log\left(1 + \frac{1}{3^x}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(1 + \frac{1}{3^x}\right)^{3^x} = log\, e = 1.$$

5) $C.E. = \mathbb{R}$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, in quanto somma di esponenziali; $y(0) = 2e$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} + e^{1+x} = (\to +\infty) + (\to 0) = +\infty;$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{1-x} + e^{1+x}}{x} = -\infty$, in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(e^{1-x})$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} + e^{1+x} = (\to 0) + (\to +\infty) = +\infty;$

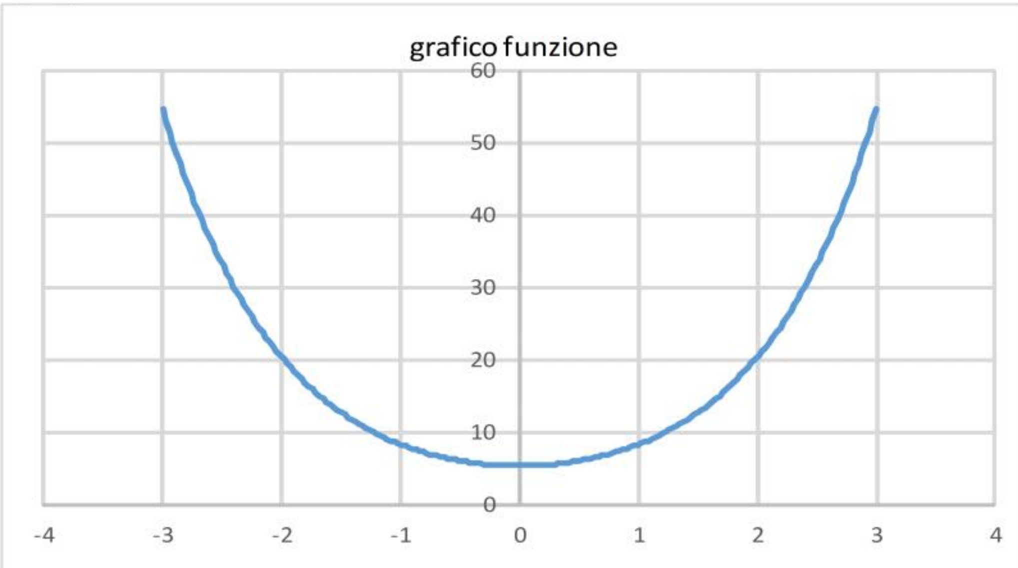
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{1-x} + e^{1+x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^{1+x})$;

la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = -e^{1-x} + e^{1+x}$. $y' > 0 \Rightarrow -e^{1-x} + e^{1+x} > 0 \Rightarrow e^{1+x} > e^{1-x} \Rightarrow 1 + x > 1 - x$, vera per $x > 0$. Funzione strettamente crescente in $[0, +\infty[$, strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$, la funzione presenta minimo assoluto pari a $y(0)$.

Concavità e convessità: $y'' = e^{1-x} + e^{1+x}$. $y'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:



6) $\displaystyle\int \frac{1 + 4x}{1 + x^2}\, dx = \int \frac{1}{1 + x^2}\, dx + 2\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx =$

$arctg\,x + 2\,log\left(1+x^2\right) + c \;=\; arctg\,x + log\left(1+x^2\right)^2 + c\,.$

7) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}\cdot\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -2 & 6 & 22 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 112 & -44 \\ 3 & 8 & -4 \\ -3 & 48 & -18 \end{bmatrix}.$

8) $\nabla f = (2x+9,\,-6y^2+6)$.

FOC: $\begin{cases} 2x+9=0 \\ -6y^2+6=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\,-9/2 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\,-9/2 \\ y=\,\pm 1 \end{cases}$, due punti critici

$P_{1,2}(-9/2,\,\pm 1)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = \,-24y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = \,-24 < 0$. P_1 punto di sella.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = 24 > 0,\; f''_{xx}(P_2) = 2 > 0$. P_2 punto di minimo.

Compito $\mathbb{I}6$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe che soddisfano le ipotesi poste:

p	q	r	$\neg r\ o\ q$	$q\ o\ r$	$\neg(p \Leftrightarrow (\neg r\ o\ q))$	$(q\ o\ r) \Rightarrow \neg(p \Leftrightarrow (\neg r\ o\ q))$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V

2) Nel caso di composizione libera del codice ognuno dei sei caratteri può essere scelto in 36 modi distinti, in questo caso i possibili codici di accesso sono 36^6; nel caso in cui ogni codice deve necessariamente essere composto da almeno una lettera e da almeno una cifra, al numero prima determinato devono essere sottratti i codici formati solo con lettere 26^6 oppure solo con cifre 10^6, pertanto i possibili codici sono $36^6 - 26^6 - 10^6$.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+3x)^k - 1}{x} \;= 3k$. Posto $3k = 10$ si ha $k = \dfrac{10}{3}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(1+x^2-x^4)}{5x^2-x^3} \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{log(1+x^2-x^4)}{x^2-x^4} \cdot \dfrac{\cancel{x^2}(1-x^2)}{\cancel{x^2}(5-x)} \;=\; 1\cdot\dfrac{1}{5} \;=\; \dfrac{1}{5}\,.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} 8^x \cdot log\left(1-\dfrac{1}{4^x}\right) \;=\; \lim\limits_{x\to +\infty} 2^x \cdot log\left(1-\dfrac{1}{4^x}\right)^{4^x} \;=$

$(\to\,+\infty)\cdot\left(\to log\,\dfrac{1}{e}\right) \;=\; -\infty\,.$

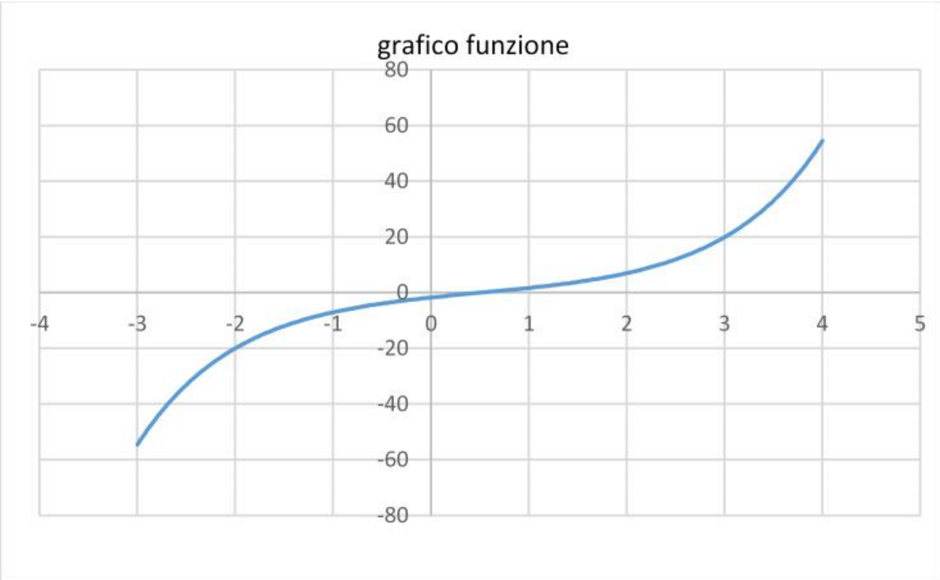
5) $C.E. = \mathbb{R}$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0 \;\Rightarrow e^x - e^{1-x} > 0 \Rightarrow e^x > e^{1-x} \Rightarrow$ $x > 1-x$, vera per $x > 1/2$, intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $P(1/2,0)$; $y(0) = 1-e\,.$

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x\to -\infty} e^x - e^{1-x} \;= (\to 0) - (\to\,+\infty) = \,-\infty;$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - e^{1-x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to -\infty$, $x = o(e^{1-x})$;
$\lim_{x \to +\infty} e^x - e^{1-x} = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - e^{1-x}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to +\infty$, $x = o(e^x)$;
la funzione non presenta asintoti.
Crescenza e decrescenza: $y' = e^x + e^{1-x}$. $y' > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, in quanto somma di esponenziali. Funzione strettamente crescente.
Concavità e convessità: $y'' = e^x - e^{1-x}$. $y'' > 0$, vera per $x > 1/2$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, 1/2]$, strettamente convessa in $[1/2, +\infty[$; il punto P è l'unico flesso della funzione.
Grafico:



6) $\displaystyle\int \frac{3+x}{1+x^2}\,dx = 3\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx =$

$\displaystyle 3\,arctg\,x + \frac{1}{2}\,log\left(1+x^2\right) + c = 3\,arctg\,x + log\sqrt{1+x^2} + c\,.$

7) $\mathbb{A}^T \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{C}^T = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} -18 & 27 & -6 \\ -7 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$

8) $\nabla f = (2x - 1, 12y^2 + 12y)$.

FOC: $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 12y^2 + 12y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ 12y(y+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \vee y = -1 \end{cases}$, due punti critici $P_1(1/2, 0)$ e $P_2(1/2, -1)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 24y + 12 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 48y + 24$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 24 > 0$, $f''_{xx}(P_1) = 2 > 0$. P_1 punto di minimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = -24 < 0$. P_2 punto di sella.