Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)
14 gennaio 2019

Compito $\mathbb{H}1$

1) $A =]-1,4[\cap]-2,+\infty[=]-1,4[$, insieme limitato inferiormente e superiormente, $Sup(A) = 4$ e $\delta(A) = \{-1,4\}$.

2) $\binom{n+6}{n+4} + \binom{n+5}{n+3} = \dfrac{(n+6)!}{(n+4)!\cdot 2!} + \dfrac{(n+5)!}{(n+3)!\cdot 2!} =$

$\dfrac{(n+6)(n+5)\cancel{(n+4)!}}{\cancel{(n+4)!}\cdot 2!} + \dfrac{(n+5)(n+4)\cancel{(n+3)!}}{\cancel{(n+3)!}\cdot 2!} =$

$\dfrac{n^2+11n+30}{2} + \dfrac{n^2+9n+20}{2} = n^2+10n+25$. Posto $n^2+10n+25 = 100$ si ha $n^2+10n-75 = 0$ da cui $(n+15)(n-5) = 0$ con soluzioni $n = -15 \vee n = 5$, di cui solo $n = 5$ è accettabile.

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{3kx}+sen(kx)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{e^{3kx}-1}{3kx}\cdot 3k + \dfrac{sen(kx)}{kx}\cdot k\right) = -1\cdot 3k + 1\cdot k = -2k$. Posto $-2k = 5$ si ha $k = -\dfrac{5}{2}$.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+4\,sen(2x)}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+4\,sen(2x)}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+4\,sen(2x)}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+4\,sen(2x)}} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)-(1+4\,sen(2x))}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+4\,sen(2x)}\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x-4\,sen(2x)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+4\,sen(2x)}\right)} =$

$\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1+8\cdot\frac{sen(2x)}{2x}}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+4\,sen(2x)}\right)} = -\dfrac{9}{2}$.

Per $x\to+\infty$, $log\,x - 4 \asymp log\,x$ e $1-log\,x \asymp -log\,x$, pertanto

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{log\,x-4}\right)^{1-log\,x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{log\,x}\right)^{-log\,x} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

5) $C.E.$: $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$; $C.E. = [-1,+\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $x\sqrt{x+1}>0 \Rightarrow x>0$. Funzione positiva in $]0,+\infty[$, negativa in $]-1,0[$, $y=0$ se $x\sqrt{x+1}=0 \Rightarrow$ $x=-1 \vee x=0$; intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $P(-1,0)$ e $O(0,0)$, P è punto di stop per la funzione.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x+1} = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1} = +\infty$;

la funzione non presenta asintoti.

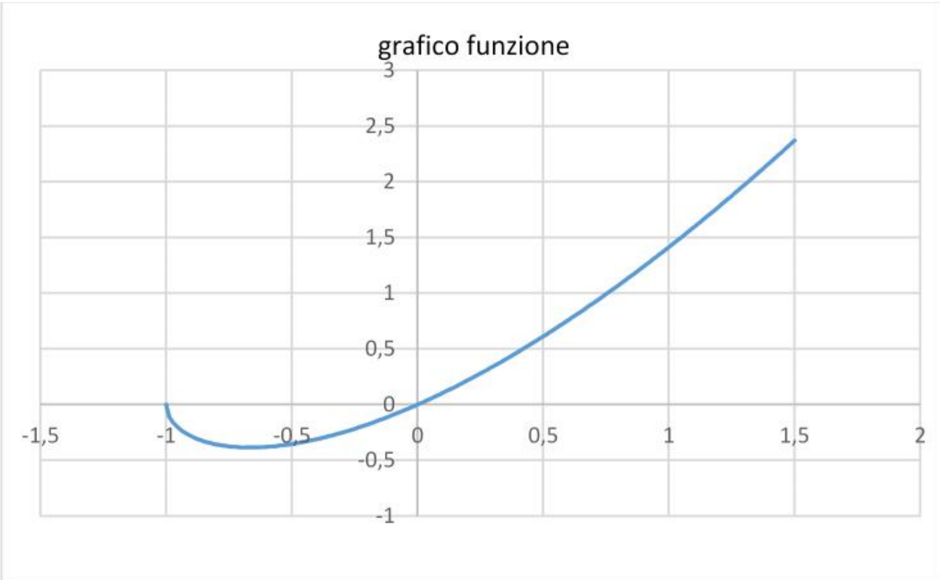
Crescenza e decrescenza: $y' = \sqrt{x+1} + x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$.

$y' > 0 \Rightarrow 3x+2 > 0 \Rightarrow x > -2/3$. Funzione strettamente crescente in $[-2/3, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-1, -2/3]$, la funzione presenta minimo assoluto pari a $y(-2/3) = -2\sqrt{3}/9$ e massimo relativo in $P(-1, 0)$.
Nota che $\lim\limits_{x \to -1} y' = -\infty$, P è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{3\left(2\sqrt{x+1}\right) - (3x+2)\left(\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+1}}\right)}{\left(2\sqrt{x+1}\right)^2} =$

$\dfrac{3x+4}{4\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$, $y'' > 0, \forall x > -1$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen\,x\, e^{-2\cos x}\, dx = \int_0^{\pi/4} e^{-2\cos x}\, d(-\cos x) = \left.\frac{e^{-2\cos x}}{2}\right|_0^{\pi/4} =$
$\dfrac{e^{-2\cos(\pi/4)}}{2} - \dfrac{e^{-2\cos 0}}{2} = \dfrac{e^{-\sqrt{2}} - e^{-2}}{2}$.

7) I polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $\cos x$ e $sen\,x$ sono rispettivamente $P_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ e $P_2(x) = x$, pertanto il polinomio cercato è

$P(x) = P_1(-x) + P_2(2x) = 1 - \dfrac{(-x)^2}{2} + 2x = 1 + 2x - \dfrac{1}{2}x^2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(-e^{3y^2-x}, 6y\, e^{3y^2-x}, 3z^2\right)$.

Compito $\mathbb{H}2$

1) $A =]-2, 2[\cup [-1, +\infty[=]-2, +\infty[$, insieme limitato inferiormente ma non superiormente, $Inf(A) = -2$ e $\delta(A) = \{-2\}$.

2) $\dbinom{n+8}{n+6} + \dbinom{n+5}{n+3} = \dfrac{(n+8)!}{(n+6)! \cdot 2!} + \dfrac{(n+5)!}{(n+3)! \cdot 2!} =$

$$\frac{(n+8)(n+7)\cancel{(n+6)!}}{\cancel{(n+6)!}\cdot 2!}+\frac{(n+5)(n+4)\cancel{(n+3)!}}{\cancel{(n+3)!}\cdot 2!}=$$

$\dfrac{n^2+15n+56}{2}+\dfrac{n^2+9n+20}{2}=n^2+12n+38$. Posto $n^2+12n+38=83$ si ha $n^2+12n-45=0$ da cui $(n+15)(n-3)=0$ con soluzioni $n=-15 \vee n=3$, di cui solo $n=3$ è accettabile.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-2x}+sen(-kx)}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{-2x}-1}{-2x}\cdot 2-\dfrac{sen(-kx)}{-kx}\cdot k\right)=1\cdot 2-1\cdot k=2-k$. Posto $2-k=1$ si ha $k=1$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2\,arcsen\,x}}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+2\,arcsen\,x}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2\,arcsen\,x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2\,arcsen\,x}}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-(1+2\,arcsen\,x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2\,arcsen\,x}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-2\,arcsen\,x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2\,arcsen\,x}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cdot\frac{arcsen\,x}{x}}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+2\,arcsen\,x}\right)}=-\dfrac{1}{2}$.

Per $x\to+\infty$, $2-log\,x\asymp -log\,x$, pertanto

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2-log\,x}\right)^{2\,log\,x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{log\,x}\right)^{2log\,x}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$.

5) $C.E.$: $x\geq 0$; $C.E.=[0,+\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $(x-9)\sqrt{x}>0\Rightarrow x-9>0\Rightarrow x>9$. Funzione positiva in $]9,+\infty[$, negativa in $]0,9[$, $y=0$ se $(x-9)\sqrt{x}=0\Rightarrow$ $x=0\vee x=9$; intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $O(0,0)$ e $P(9,0)$, O è punto di stop per la funzione.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-9)\sqrt{x}=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-9)\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{9}{x}\right)\sqrt{x}=+\infty$;

la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y'=\sqrt{x}+(x-9)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3(x-3)}{2\sqrt{x}}$.

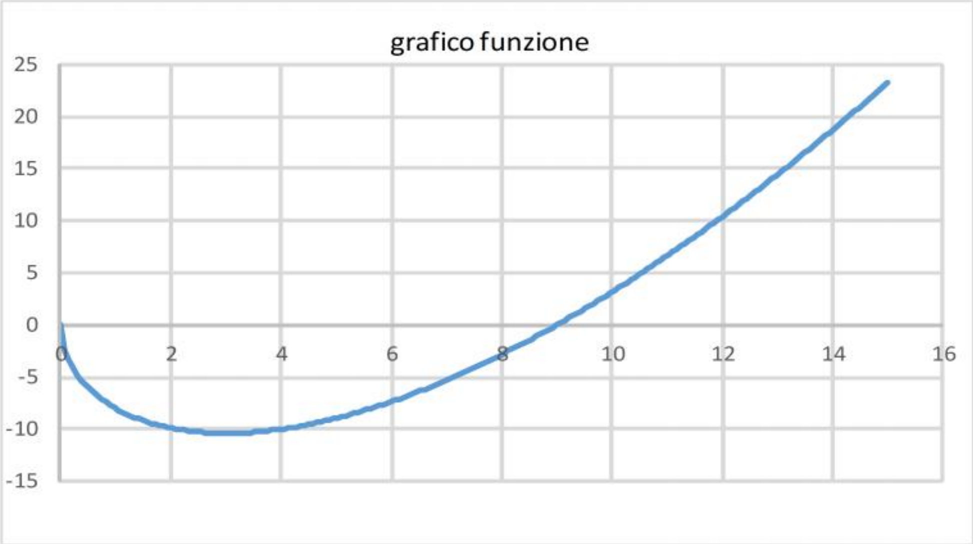
$y'>0\Rightarrow x-3>0\Rightarrow x>3$. Funzione strettamente crescente in $[3,+\infty[$, strettamente decrescente in $[0,3]$, la funzione presenta minimo assoluto pari a $y(3)=-6\sqrt{3}$ e massimo relativo in $O(0,0)$.

Nota che $\lim\limits_{x\to 0}y'=-\infty$, O è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y''=\dfrac{3\left(2\sqrt{x}\right)-3(x-3)\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)}{\left(2\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{3(x+3)}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$,

$y''>0,\forall x>0$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:



6) $\int_0^{\pi} sen\,x\,e^{-cos\,x}\,dx = \int_0^{\pi/4} e^{-cos\,x}\,d(-cos\,x) = e^{-cos\,x}|_0^{\pi} =$
$e^{-cos\,\pi} - e^{-cos\,0} = e - e^{-1}$.

7) I polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni e^x e $log(1+x)$ sono rispettivamente $P_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ e $P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$, pertanto il polinomio cercato è $P(x) = P_1(x) + 3\,P_2(-x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + 3\left(-x - \frac{(-x)^2}{2}\right) =$

$1 - 2x - x^2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(z^5(2+\sqrt{x}) + xz^5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, 0, 5xz^4(2+\sqrt{x})\right)$.

Compito $\mathbb{H}3$

1) $A =]-\infty, -3] \cup [-4, -2[=]-\infty, -2[$, insieme limitato superiormente ma non inferiormente, $Sup(A) = -2$ e $\delta(A) = \{-2\}$.

2) $\binom{n+10}{n+8} + \binom{n+8}{n+6} = \frac{(n+10)!}{(n+8)!\cdot 2!} + \frac{(n+8)!}{(n+6)!\cdot 2!} =$
$\frac{(n+10)(n+9)\cancel{(n+8)!}}{\cancel{(n+8)!}\cdot 2!} + \frac{(n+8)(n+7)\cancel{(n+6)!}}{\cancel{(n+6)!}\cdot 2!} =$
$\frac{n^2+19n+90}{2} + \frac{n^2+15n+56}{2} = n^2 + 17n + 73$. Posto $n^2 + 17n + 73 = 111$ si ha $n^2 + 17n - 38 = 0$ da cui $(n+19)(n-2) = 0$ con soluzioni $n = -19 \vee n = 2$, di cui solo $n = 2$ è accettabile.

3) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(3kx) - log(1-2x)}{x} =$
$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(3kx)}{3kx}\cdot 3k + \frac{log(1-2x)}{-2x}\cdot 2\right) = 1\cdot 3k + 1\cdot 2 = 3k + 2$. Posto $3k + 2 = -2$ si ha $k = -\frac{4}{3}$.

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+sen\,x}-\sqrt{1+x}}{x} =$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+sen\,x}-\sqrt{1+x}}{x} \cdot \dfrac{\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1+x}} =$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+sen\,x)-(1+x)}{x\left(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{sen\,x - x}{x\left(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1+x}\right)} =$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{sen\,x}{x}-1}{\left(\sqrt{1+sen\,x}+\sqrt{1+x}\right)} = 0.$

Per $x \to +\infty$, $4\,log\,x+1 \asymp 4\,log\,x$ e $log\,x-3 \asymp log\,x$, pertanto

$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{4\,log\,x+1}\right)^{log\,x-3} = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1/4}{log\,x}\right)^{log\,x} = e^{1/4} = \sqrt[4]{e}.$

5) $C.E.$: $x \geq 0$; $C.E. = [0, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $(6-x)\sqrt{x}>0 \Rightarrow 0<x<6$. Funzione positiva in $]0,6[$, negativa in $]6,+\infty[$, $y=0$ se $(6-x)\sqrt{x}=0 \Rightarrow$ $x=0 \vee x=6$; intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $O(0,0)$ e $P(6,0)$, O è punto di stop per la funzione.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to +\infty} (6-x)\sqrt{x} = -\infty\,;$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{(6-x)\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{6}{x}-1\right)\sqrt{x} = -\infty\,;$

la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\sqrt{x}+(6-x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3(2-x)}{2\sqrt{x}}$.

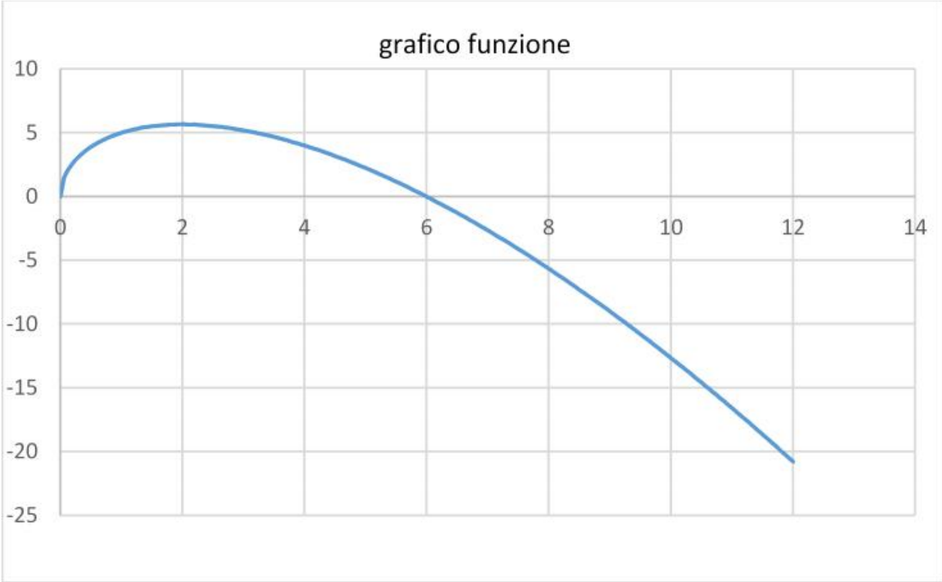
$y'>0 \Rightarrow 0<x<2$. Funzione strettamente crescente in $[0,2]$, strettamente decrescente in $[2,+\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto pari a $y(2)=4\sqrt{2}$ e minimo relativo in $O(0,0)$.

Nota che $\lim_{x \to 0} y' = +\infty$, O è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{3\left(-2\sqrt{x}\right)-3(2-x)\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{-3(2+x)}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}$,

$y''<0, \forall x>0$. Funzione strettamente concava.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} cos\, x\, e^{sen\, x}\, dx = \int_0^{\pi/2} e^{sen\, x}\, d(sen\, x) = e^{sen\, x}\Big|_0^{\pi/2} =$
$e^{sen(\pi/2)} - e^{sen\, 0} = e - 1$.

7) I polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $cos\, x$ e e^x sono rispettivamente $P_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ e $P_2(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, pertanto il polinomio cercato è $P(x) = P_1(2x) - P_2(x) = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2} - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) = -x - \dfrac{5}{2}x^2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(4x^3 z\, e^{3y^2}, 6x^4 yz\, e^{3y^2}, x^4\, e^{3y^2}\right)$.

Compito $\mathbb{H}4$

1) $A =]-\infty, 0[\cap]-3, +\infty[=]-3, 0[$, insieme limitato inferiormente e superiormente, $Inf(A) = -3$ e $\delta(A) = \{-3, 0\}$.

2) $\dbinom{n+8}{n+6} + \dbinom{n+5}{n+3} = \dfrac{(n+8)!}{(n+6)!\cdot 2!} + \dfrac{(n+5)!}{(n+3)!\cdot 2!} =$
$\dfrac{(n+8)(n+7)\cancel{(n+6)!}}{\cancel{(n+6)!}\cdot 2!} + \dfrac{(n+5)(n+4)\cancel{(n+3)!}}{\cancel{(n+3)!}\cdot 2!} =$
$\dfrac{n^2+15n+56}{2} + \dfrac{n^2+9n+20}{2} = n^2 + 12n + 38$. Posto $n^2 + 12n + 38 = 102$ si ha $n^2 + 12n - 64 = 0$ da cui $(n+16)(n-4) = 0$ con soluzioni $n = -16 \vee n = 4$, di cui solo $n = 4$ è accettabile.

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{arcsen(kx) + e^{-2kx} - 1}{x} =$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{arcsen(kx)}{kx}\cdot k - \frac{e^{-2kx}-1}{-2kx}\cdot 2k\right) = 1\cdot k - 1\cdot 2k = -k$. Posto $-k = 1$ si ha $k = -1$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1 + arcsen\, x} - \sqrt{1 - 3\,x}}{x} =$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+arcsen\,x}-\sqrt{1-3\,x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+arcsen\,x}+\sqrt{1-3\,x}}{\sqrt{1+arcsen\,x}+\sqrt{1-3\,x}} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+arcsen\,x)-(1-3\,x)}{x\left(\sqrt{1+arcsen\,x}+\sqrt{1-3\,x}\right)} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{arcsen\,x+3\,x}{x\left(\sqrt{1+arcsen\,x}+\sqrt{1-3\,x}\right)} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{arcsen\,x}{x}+3}{\left(\sqrt{1+arcsen\,x}+\sqrt{1-3\,x}\right)} = 2.$$

Per $x \to +\infty$, $1-log\,x \asymp -log\,x$, pertanto
$$\lim_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{1-log\,x}\right)^{log\,x} = \lim_{x \to +\infty}\left(1-\frac{1}{log\,x}\right)^{log\,x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

5) $C.E.$: $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$; $C.E. = [-3, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $x\sqrt{x+3}>0 \Rightarrow x>0$. Funzione positiva in $]0, +\infty[$, negativa in $]-3, 0[$, $y=0$ se $x\sqrt{x+3}=0 \Rightarrow$ $x=-3 \vee x=0$; intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $P(-3,0)$ e $O(0,0)$, P è punto di stop per la funzione.

Limiti agli estremi del $C.E.$:
$$\lim_{x \to +\infty} x\sqrt{x+3} = +\infty;$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x+3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty;$$
la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = \sqrt{x+3}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+3}} = \frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$.

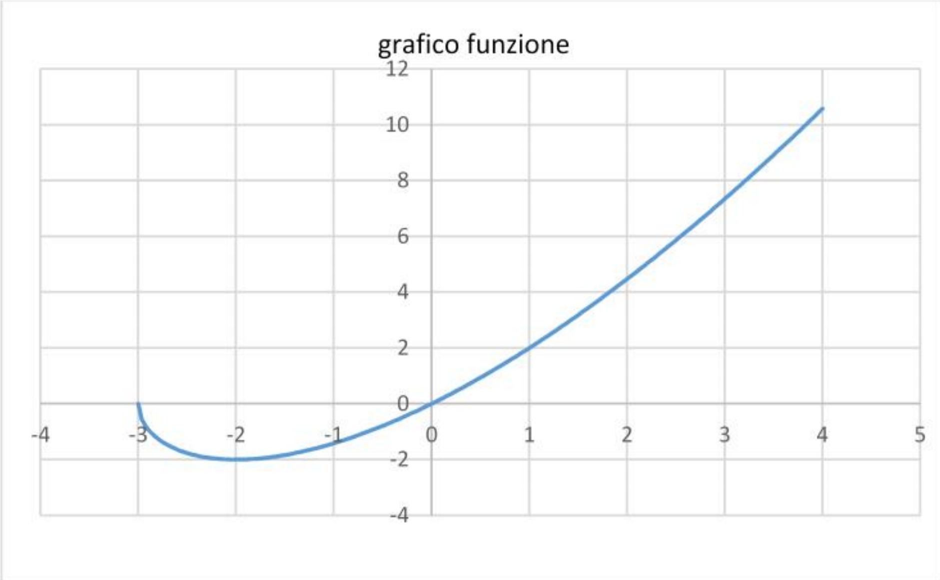
$y'>0 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x>-2$. Funzione strettamente crescente in $[-2, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-3, -2]$, la funzione presenta minimo assoluto pari a $y(-2) = -2$ e massimo relativo in $P(-3,0)$.

Nota che $\lim_{x \to -3} y' = -\infty$, P è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{3\left(2\sqrt{x+3}\right)-3(x+2)\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x+3}}\right)}{\left(2\sqrt{x+3}\right)^2} =$

$\dfrac{3(x+4)}{4\left(\sqrt{x+3}\right)^3}$, $y''>0, \forall x>-3$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:



6) $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} cos\,x\, e^{-sen\,x}\, dx \;=\; \int_0^{3\pi/2} e^{-sen\,x}\; d(sen\,x) \;=\; -\,e^{-sen\,x}\big|_0^{3\pi/2} \;=$
$-\,e^{-sen(3\pi/2)} + e^{-sen\,0} = 1 - e.$

7) I polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $sen\,x$ e $log(1+x)$ sono rispettivamente $P_1(x) = x$ e $P_2(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, pertanto il polinomio cercato è $P(x) = P_1(2x) + P_2(x) = \; 2x + x - \dfrac{x^2}{2} \;=\; 3x - \dfrac{x^2}{2}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(1,\; -\dfrac{z\,sen\,y}{2\sqrt{z\,cos\,y}},\, \dfrac{cos\,y}{2\sqrt{z\,cos\,y}}\right).$

Compito $\mathbb{H}5$

1) $]1,20[\,\cap\,[0,+\infty[\;=\;]1,20[$, insieme limitato inferiormente e superiormente, $Inf(A) = 1$ e $\delta(A) = \{1,20\}$.

2) $\dbinom{n+6}{n+4} + \dbinom{n+5}{n+3} \;=\; \dfrac{(n+6)!}{(n+4)!\cdot 2!} + \dfrac{(n+5)!}{(n+3)!\cdot 2!} \;=$
$\dfrac{(n+6)(n+5)\cancel{(n+4)!}}{\cancel{(n+4)!}\cdot 2!} + \dfrac{(n+5)(n+4)\cancel{(n+3)!}}{\cancel{(n+3)!}\cdot 2!} \;=$
$\dfrac{n^2+11n+30}{2} + \dfrac{n^2+9n+20}{2} \;=\; n^2+10n+25$. Posto $n^2+10n+25 = 36$ si ha $n^2+10n-11 = 0$ da cui $(n+11)(n-1) = 0$ con soluzioni $n = \,-11 \vee n = 1$, di cui solo $n = 1$ è accettabile.

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to 0}\frac{sen(kx)+1-cos(kx)}{x} \;=$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(kx)}{kx}\cdot k + \frac{1-cos(kx)}{(kx)^2}\cdot k^2x\right) \;=\; 1\cdot k + \frac{1}{2}\cdot 0 \;=\; k$. Posto $k = \,-1$ si ha $k = \,-1$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+sen\,x} - \sqrt{1+sen(3x)}}{x} \;=$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+sen\,x} - \sqrt{1+sen(3x)}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1+sen(3x)}}{\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1+sen(3x)}} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+sen\,x) - (1+sen(3x))}{x\left(\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1+sen(3x)}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\,x - sen(3x)}{x\left(\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1+sen(3x)}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen\,x}{x} - 3 \cdot \frac{sen(3x)}{3x}}{\left(\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1+sen(3x)}\right)} = -1.$$

Per $x \to +\infty$, $2 - log\,x \asymp -log\,x$, pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{log\,x}\right)^{2-log\,x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{log\,x}\right)^{-log\,x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

5) $C.E.$: $5 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 5$; $C.E. =]-\infty, 5]$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $x\sqrt{5-x} > 0 \Rightarrow 0 < x < 5$. Funzione positiva in $]0,5[$, negativa in $]-\infty, 0[$, $y = 0$ se $x\sqrt{5-x} = 0 \Rightarrow$ $x = 0 \vee x = 5$; intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $O(0,0)$ e $P(5,0)$, P è punto di stop per la funzione.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to -\infty} x\sqrt{5-x} = -\infty;$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x\sqrt{5-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{5-x} = +\infty;$$

la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = \sqrt{5-x} + x \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \dfrac{10-3x}{2\sqrt{5-x}}$.

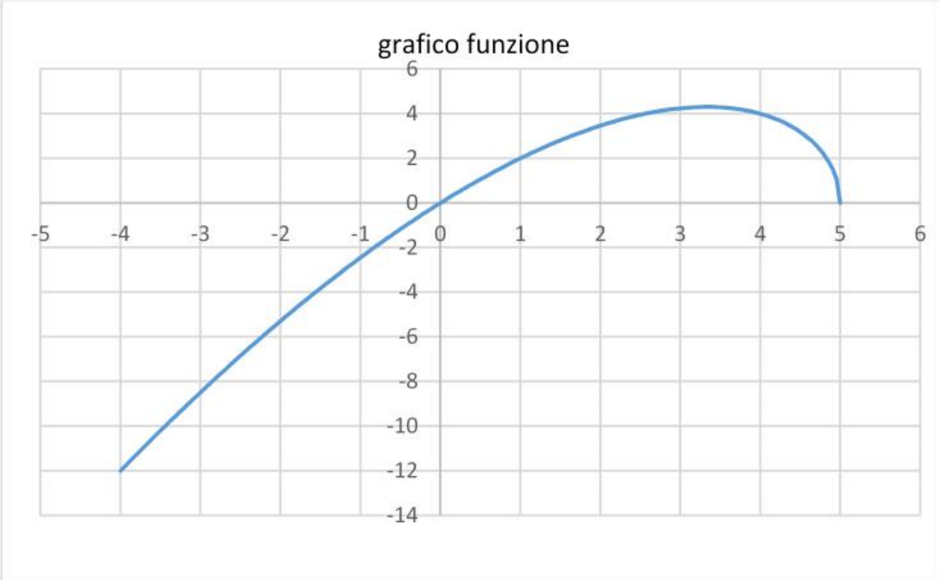
$y' > 0 \Rightarrow 10 - 3x > 0 \Rightarrow x < 10/3$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 10/3]$, strettamente decrescente in $[10/3, 5]$, la funzione presenta massimo assoluto pari a $y(10/3) = 10\sqrt{15}/9$ e minimo relativo in $P(5,0)$.

Nota che $\lim_{x \to 5} y' = -\infty$, P è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-3\left(2\sqrt{5-x}\right) - (10-3x)\left(\cancel{2} \cdot \frac{-1}{\cancel{2}\sqrt{5-x}}\right)}{\left(2\sqrt{5-x}\right)^2} =$

$\dfrac{3x-20}{4\left(\sqrt{5-x}\right)^3}$, $y'' < 0, \forall x < 5$. Funzione strettamente concava.

Grafico:



6) $\int_0^{2\pi} sen\,x\,e^{2\,cos\,x}\,dx = \int_0^{2\pi} -e^{2\,cos\,x}\,d(cos\,x) = -\frac{e^{2\,cos\,x}}{2}\Big|_0^{2\pi} =$
$-\frac{e^{2\,cos(2\pi)}}{2} + \frac{e^{2\,cos\,0}}{2} = 0.$

7) I polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $sen\,x$ e $log(1+x)$ sono rispettivamente $P_1(x) = x$ e $P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$, pertanto il polinomio cercato è
$P(x) = P_1(x) - P_2(2x) = x - \left(2x - \frac{(2x)^2}{2}\right) = -x + 2x^2.$

8) $\nabla f = (f_x', f_y', f_z') = \left(y^2 z^2 e^{tg\,x}\left(1 + tg^2 x\right), 2\,y\,z^2 e^{tg\,x}, 2\,y^2 z\,e^{tg\,x}\right).$

Compito $\mathbb{H}6$

1) $A = \,]-\infty, 2[\, \cup [-1, 1] = \,]-\infty, 2[$, insieme limitato superiormente ma non inferiormente, $Sup(A) = 2$ e $\delta(A) = \{2\}$.

2) $\binom{n+10}{n+8} + \binom{n+8}{n+6} = \frac{(n+10)!}{(n+8)!\cdot 2!} + \frac{(n+8)!}{(n+6)!\cdot 2!} =$
$\frac{(n+10)(n+9)\cancel{(n+8)!}}{\cancel{(n+8)!}\cdot 2!} + \frac{(n+8)(n+7)\cancel{(n+6)!}}{\cancel{(n+6)!}\cdot 2!} =$
$\frac{n^2+19n+90}{2} + \frac{n^2+15n+56}{2} = n^2 + 17n + 73$. Posto $n^2 + 17n + 73 = 211$
si ha $n^2 + 17n - 138 = 0$ da cui $(n+23)(n-6) = 0$ con soluzioni
$n = -23 \vee n = 6$, di cui solo $n = 6$ è accettabile.

3) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1+2kx) - 5\,sen(kx)}{x} =$
$\lim_{x \to 0}\left(\frac{log(1+2kx)}{2kx} \cdot 2k - 5 \cdot \frac{sen(kx)}{kx} \cdot k\right) = 1 \cdot 2k - 5 \cdot 1 \cdot k = -3k$. Posto
$-3k = -3$ si ha $k = 1$.

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1+x}}{x} =$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1+x}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1+x}} =$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+tg\,x)-(1+x)}{x\left(\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{tg\,x - x}{x\left(\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1+x}\right)} =$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\frac{tg\,x}{x}-1}{\left(\sqrt{1+tg\,x}+\sqrt{1+x}\right)} = 0.$

Per $x\to +\infty$, $log\,x+1 \asymp log\,x$ e $2\,log\,x+3\asymp 2\,log\,x$, pertanto

$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{log\,x+1}\right)^{2\,log\,x+3} = \lim_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{log\,x}\right)^{2\,log\,x} = e^2.$

5) $C.E.$: $x\geq 0$; $C.E. = [0,+\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $(2-x)\sqrt{x}>0 \Rightarrow 0<x<2$. Funzione positiva in $]0,2[$, negativa in $]2,+\infty[$, $y=0$ se $(2-x)\sqrt{x}=0\Rightarrow$ $x=0\vee x=2$; intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $O(0,0)$ e $P(2,0)$, O è punto di stop per la funzione.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x\to +\infty}(2-x)\sqrt{x} = -\infty\,;$

$\lim_{x\to +\infty}\dfrac{(2-x)\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{x}-1\right)\sqrt{x} = -\infty\,;$

la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\sqrt{x}+(2-x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}}\,.$

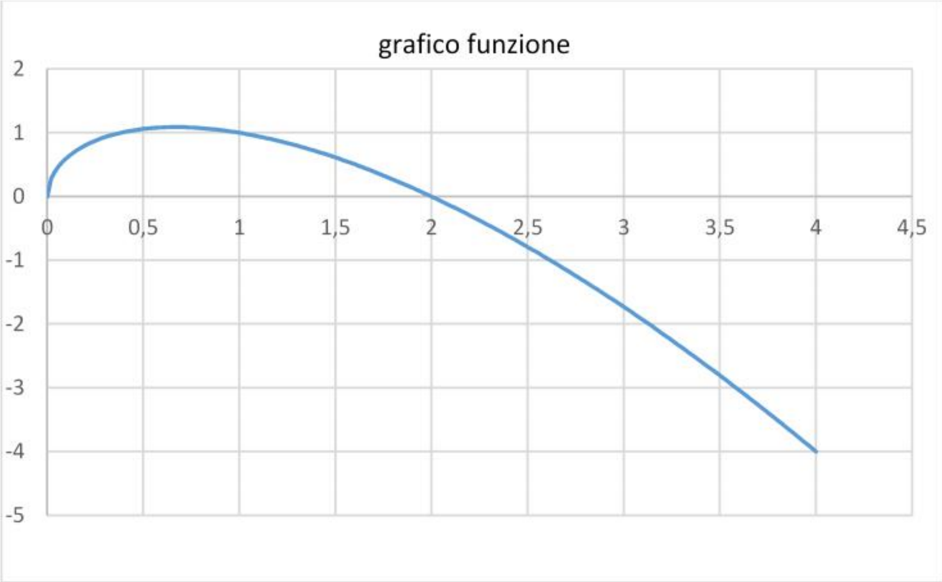
$y'>0\Rightarrow 0<x<2/3$. Funzione strettamente crescente in $[0,2/3]$, strettamente decrescente in $[2/3,+\infty[$, la funzione presenta massimo assoluto pari a $y(2/3)=4\sqrt{6}/9$ e minimo relativo in $O(0,0)$.

Nota che $\lim_{x\to 0} y' = +\infty$, O è punto a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-3\left(2\sqrt{x}\right)-(2-3x)\left(\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\right)}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{-(2+3x)}{4\left(\sqrt{x}\right)^3}\,,$

$y''<0, \forall x>0$. Funzione strettamente concava.

Grafico:



6) $\int_0^{3\pi/4} 2\,cos\,x\,e^{sen\,x}\,dx = \int_0^{3\pi/4} 2\,e^{sen\,x}\,d(sen\,x) = 2\,e^{sen\,x}|_0^{3\pi/4} =$
$2\,e^{sen(3\pi/4)} - 2\,e^{sen\,0} = 2\left(e^{\sqrt{2}/2} - 1\right).$

7) I polinomi di MacLaurin di secondo grado delle funzioni $cos\,x$ e e^x sono rispettivamente $P_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ e $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, pertanto il polinomio cercato è $P(x) = P_1(x) + P_2(-2x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \left(1 + -2x + \frac{(-2x)^2}{2}\right) =$
$2 - 2x + \frac{3}{2}x^2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = \left(3x^2z^2e^{x-y^2} + x^3z^2e^{x-y^2}, -2x^3yz^2e^{x-y^2}, 2x^3ze^{x-y^2}\right).$