Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 18-19)
19 settembre 2019

Compito unico

1) Indichiamo con s la proposizione composta $(p\ e\ r) \Rightarrow q$ e con t la proposizione composta $r \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$, la tavola di verità della proposizione proposta è la seguente:

p	q	r	$p\ e\ r$	$p \Leftrightarrow q$	s	t	$\neg t$	$s\ o\ \neg t$
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	V	F	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V	F	V

La proposizione composta data è una tautologia.

2) In un numero di quattro cifre composto solo con cifre dispari abbiamo per ogni cifra 5 distinti modi di scelta, i numeri possibili sono pertanto $5^4 = 625$. Se il numero deve presentare almeno una volta la cifra 9, consideriamo i numeri che non presentano mai la cifra 9, per tali numeri abbiamo 4 modi distinti per ogni cifra e pertanto tali numeri sono 4^4, concludiamo che i numeri che presentano almeno una volta la cifra 9 sono $5^4 - 4^4 = 369$.

3) $f(g(x)) = f(2x^2) = 2x^2 - 2$, $g(f(x)) = g(x-2) = 2(x-2)^2 = 2x^2 - 8x + 8$, $f(g(x-1)) + g(f(x+1)) = 2(x-1)^2 - 2 + 2(x+1)^2 - 8(x+1) + 8 = 4x^2 - 8x + 2$.

Per risolvere la disequazione poniamo $4x^2 - 8x + 2 < 2$ che equivale a $4x^2 - 8x < 0$ ovvero $4x(x-2) < 0$; il fattore $4x$ è maggiore di 0 per $x > 0$ mentre $x - 2 > 0$ per $x > 2$, di conseguenza il prodotto $4x(x-2)$ è negativo quando $0 < x < 2$.

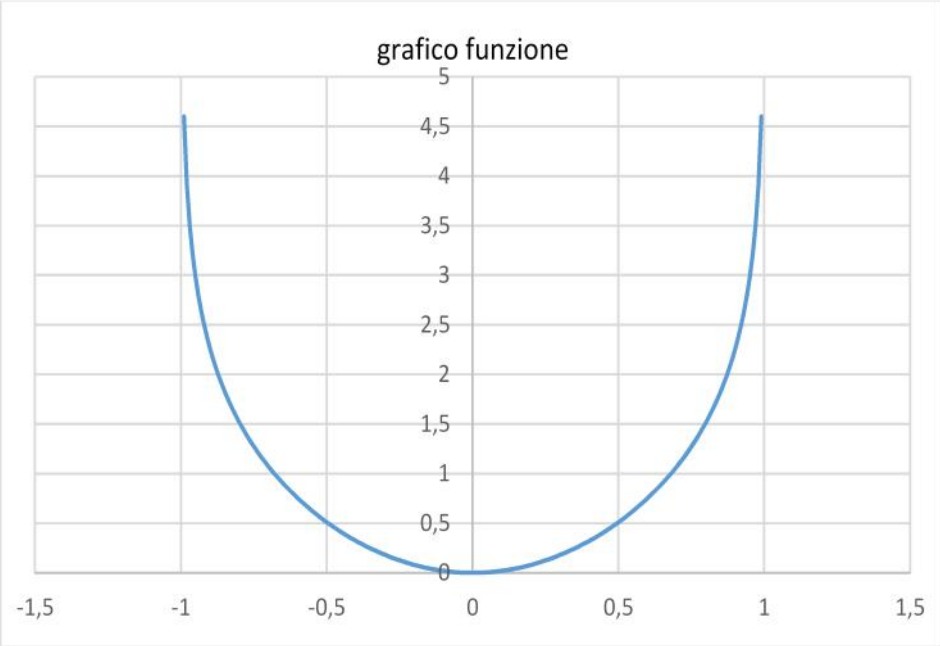
4) $$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 x + tg^2 x}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen^2 x}{x^2} + \frac{tg^2 x}{x^2}}{\frac{1 - cos\, x}{x^2}} = \frac{(\to 1) + (\to 1)}{(\to \frac{1}{2})} = 4.$$

Per $x \to +\infty$, $x^2 = o(3^x)$, $x^4 = o(e^x)$ e 2^x è o-piccolo sia di 3^x che di e^x, pertanto
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x - 2^x + x^2}{2^x - e^x + x^4} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{3^x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} -\left(\frac{3}{e}\right)^x = -\infty.$$

5) $C.E.$: $\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2} > 0 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1$, soddisfatta per $-1 < x < 1$, $C.E. =]-1, 1[$.

$$y(-x) = log\left(\frac{1 + (-x)^2}{1 - (-x)^2}\right) = log\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right) = y(x);$$ funzione pari, la studiamo solo per $x \in [0, 1[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x^2}{1-x^2} \geq 1$ che equivale a $\frac{2x^2}{1-x^2} \geq 0$, verificata per $x \in [0,1[$, funzione non negativa in $[0,1[$;
$y(0) = log\,1 = 0$, unica intersezione con gli assi nell'origine O.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to 1} log\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) = log\left(\frac{(\to 2)}{(\to 0^+)}\right) = log(\to +\infty) = +\infty$, asintoto verticale di equazione $x = 1$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{\frac{1+x^2}{1-\cancel{x^2}}} \cdot \frac{2x \cdot (1-x^2) + 2x \cdot (1+x^2)}{(1-x^2)^{\cancel{2}}} = \frac{4x}{1-x^4}$.
$y' \geq 0, \forall x \in [0,1[$. Funzione strettamente crescente in $[0,1[$. Minimo assoluto in O.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{4 \cdot (1-x^4) - 4x \cdot (-4x^3)}{(1-x^4)^2} = \frac{4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}$.
$y'' > 0, \forall x \in [0,1[$. Funzione strettamente convessa in $[0,1[$.
Grafico:



6) $\int_1^4 \left(x^3 + \sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - log|x|\right)\Big|_1^4 =$
$\left(64 + \frac{16}{3} - log\,4\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - log\,1\right) = \frac{821}{12} - log\,4$.

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$.

$\mathbb{C}^T \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 18 & -6 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -54 & 48 & 6 \\ 22 & -24 & -2 \end{bmatrix}$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(O) = \nabla z(O) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $z(O) = 0$,
$\nabla z = \left(e^{x+y} - (1+y)\, e^{x-y}, e^{x+y} + y\, e^{x-y}\right)$, $\nabla z(O) = (0,1)$. Equazione del piano tangente: $z = 0 \cdot x + 1 \cdot y$, oppure $y - z = 0$.