Università degli Studi di Siena

Correzione prova scritta di Matematica Generale (A.A. 17-18)

23 marzo 2019

Compito Unico

1) (I° Metodo: con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$B\cup C$	$A\subseteq(B\cup C)$	$A\cap C$	$B\subseteq(A\cap C)$	$A\subseteq C$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	V	$\in$	V	V
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	V	$\notin$	F	
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	V	$\in$	V	V
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	F			
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	V	$\notin$	F	
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	V	$\notin$	F	
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	V	$\notin$	V	V
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	V	$\notin$	V	V

Consideriamo solo le quattro righe dove le ipotesi poste $A\subseteq(B\cup C)$ e $B\subseteq(A\cap C)$ risultano vere, come si nota facilmente nell'ultima colonna l'inclusione $A\subseteq C$ risulta vera.

(II° Metodo: con il ragionamento logico-insiemistico)

Se $B\subseteq(A\cap C)$ ogni elemento di B appartiene anche a A e C, in particolare risulta $B\subseteq C$ da cui $B\cup C=C$; da $A\subseteq(B\cup C)$ banalmente si ottiene $A\subseteq C$.

2) Nel caso in cui la squadra deve essere composta esattamente da 2 maschi e 3 femmine, si hanno $\binom{10}{2}$ modi distinti per la scelta dei due maschi e $\binom{10}{3}$ modi distinti per la scelta delle tre femmine, il numero di possibili squadre è quindi pari a $\binom{10}{2}\cdot\binom{10}{3}=5.400$. Se invece la squadra deve essere composta da almeno due maschi ed almeno due femmine, vi sono due possibilità: una squadra composta da 2 maschi e 3 femmine oppure una squadra composta da 3 maschi e 2 femmine e per simmetria (10 maschi e 10 femmine disponibili) in entrambi i casi il numero di possibili squadre è uguale, pertanto il numero richiesto è pari a $2\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{10}{3}=10.800$.

3) Ricordiamo che $e<3$ e quindi $e^2<9$, da cui $A=[-e^2,e^2]\cap[0,9]=[0,e^2]$.
$\delta(A)=\{0,e^2\}$, $\overset{\circ}{A}=]0,e^2[$ e A è insieme chiuso perché intersezione non vuota di due intervalli chiusi.

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x-sen\,x}-1}{sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x-sen\,x}-1}{3x-sen\,x}\cdot\left(3\cdot\frac{x}{sen\,x}-1\right)=1\cdot 2=2;$$

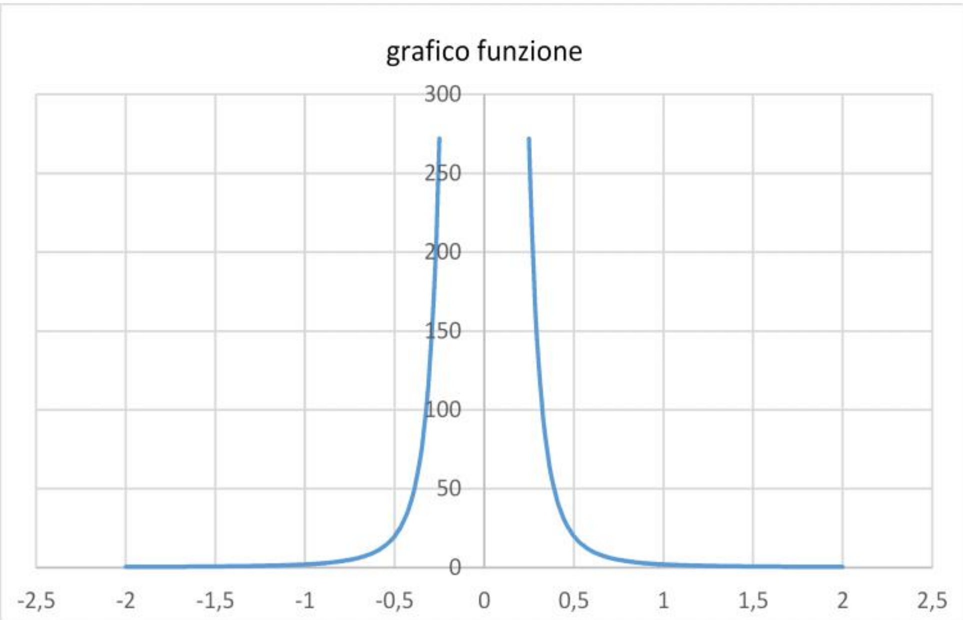
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{log(1+3x)}{log(1+2x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{log(1+3x)-log\,x+log\,x}{log(1+2x)-log\,x+log\,x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{log\left(3+\frac{1}{x}\right)+log\,x}{log\left(2+\frac{1}{x}\right)+log\,x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{log\left(3+\frac{1}{x}\right)}{log\,x}+1}{\frac{log\left(2+\frac{1}{x}\right)}{log\,x}+1}=\frac{(\to 0)+1}{(\to 0)+1}=1.$$

Questo secondo limite può essere risolto anche tramite il Teorema di De L'Hôpital, notiamo infatti che $\lim_{x\to+\infty}\frac{log(1+3x)}{log(1+2x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e sia la funzione al numeratore che quella al denominatore sono derivabili, con

derivata non nulla in un opportuno intorno di $+\infty$; calcoliamo il limite del rapporto delle derivate ed otteniamo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{1+3x}}{\frac{2}{1+2x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3+6x}{2+6x} =$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{x}+6}{\frac{2}{x}+6} = 1.$

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \wedge x^4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$, $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.
Eventuali simmetrie: $y(-x) = \frac{1}{(-x)^2} + \frac{1}{(-x)^4} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = y(x)$; funzione pari, la studiamo solo per le $x > 0$, ed operiamo per simmetria.
Segno: $y > 0, \forall x > 0$, in quanto somma di due quantità positive.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = (\to +\infty) + (\to +\infty) = +\infty$; asintoto verticale di equazione $x = 0$;
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} = (\to 0) + (\to 0) = 0$; asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^5}$, $y' < 0, \forall x > 0$, funzione strettamente decrescente in $\mathbb{R}_{++}$.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{6}{x^4} + \frac{20}{x^6}$. $y'' > 0, \forall x > 0$, funzione strettamente convessa in $\mathbb{R}_{++}$.
Grafico:



6) $\int_1^4 \left(\frac{x + 3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^4 \left(\sqrt{x} + 3 + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx =$
$\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 3x + 4\sqrt{x} \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{16}{3} + 12 + 8 \right) - \left(\frac{2}{3} + 3 + 4 \right) = \frac{53}{3}.$

7) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T =$

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 & 16 \\ 3 & -15 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -2 \\ -8 & -42 \end{bmatrix}.$$

8) $f'_x = z \cdot log\big(y^2 + zw^2\big)\,; \quad f'_y = -\,sen\,y \cdot log\big(y^2 + zw^2\big) + \dfrac{2\,y\,(xz + cos\,y)}{y^2 + zw^2}\,;$

$$f'_z = x \cdot log\big(y^2 + zw^2\big) + \frac{w^2\,(xz + cos\,y)}{y^2 + zw^2}\,; \qquad f'_w = \frac{2\,zw\,(xz + cos\,y)}{y^2 + zw^2}\,.$$