

Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 18-19)

5 novembre 2018

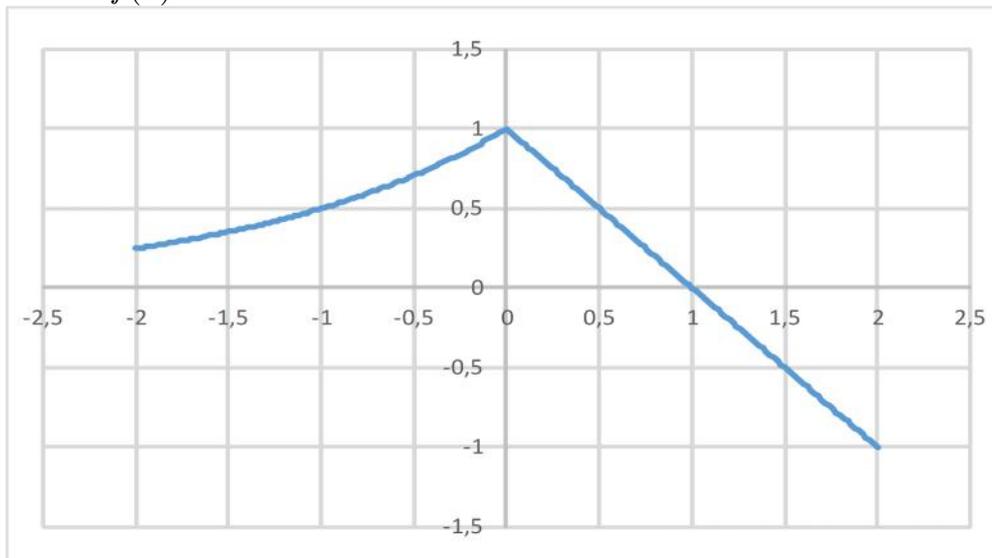
Compito A1

p	q	r	$\neg(q \circ p)$	$p \Rightarrow \neg q$	$r \Rightarrow \neg(q \circ p)$	$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow \neg(q \circ p))$
V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	F
1) V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

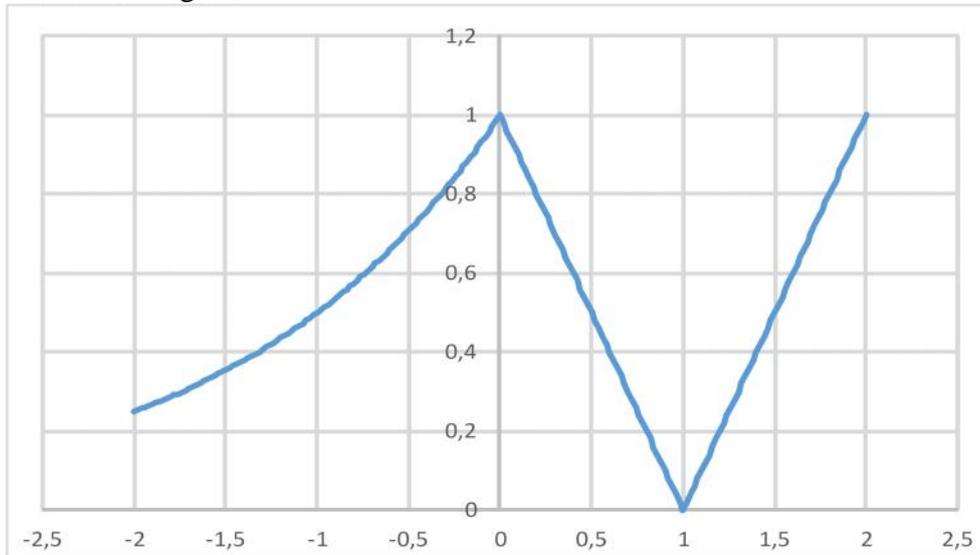
2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n$ vale: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; pertanto

l'uguaglianza $\binom{n}{126} = \binom{n}{87}$ è verificata se e solo se $n = 126 + 87 = 213$.

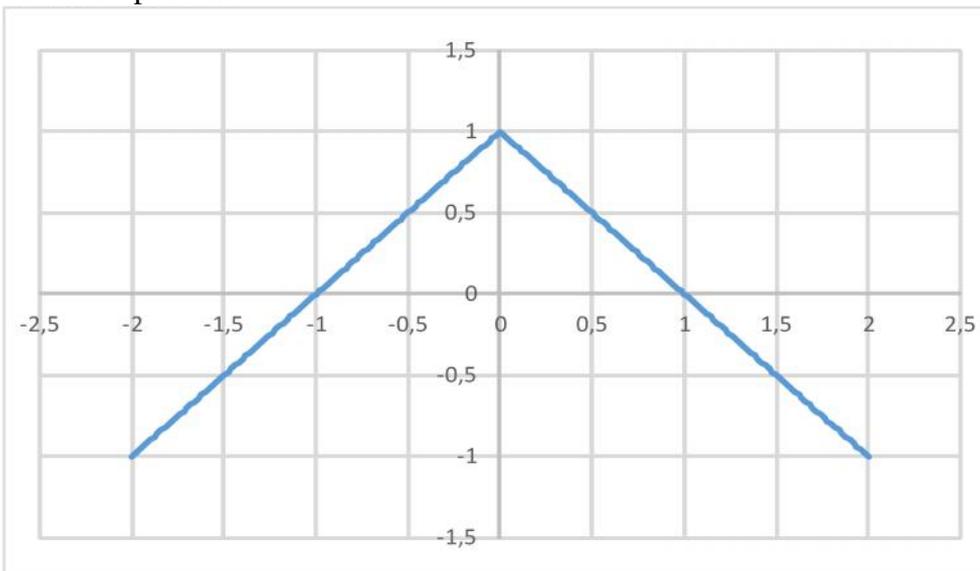
3) Grafico di $f(x)$.



Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ascisse, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ordinate negative.



Il grafico della funzione $f(|x|)$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ordinate, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ascisse positive.



- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\text{sen } x - x} - 1}{8x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\text{sen } x - x} - 1}{\text{sen } x - x} \cdot \left(\frac{\text{sen } x}{x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{8} = \log 3 \cdot (1 - 1) \cdot \frac{1}{8} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(10x + 1)^{15} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 10x)^{15} - 1}{10x} \cdot 10 = 15 \cdot 10 = 150$.
- 5) $\lim_{x \rightarrow -2} 6 + 2x = 2$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $|6 + 2x - 2| = |2(x + 2)| = 2|x + 2|$, posto $2|x + 2| < \epsilon$ risulta $|x + 2| < \epsilon/2$ da cui $\delta_\epsilon = \epsilon/2$, limite verificato.

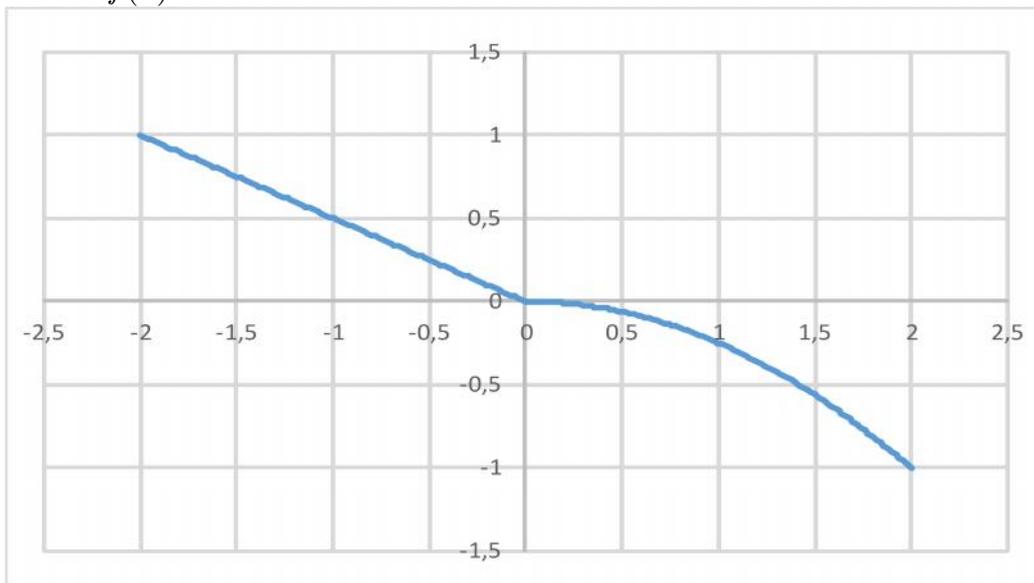
Compito A2

p	q	r	$r \wedge p$	$p \Leftrightarrow r$	$\neg((r \wedge p) \Rightarrow \neg q)$	$(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow \neg((r \wedge p) \Rightarrow \neg q)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F
1) V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F

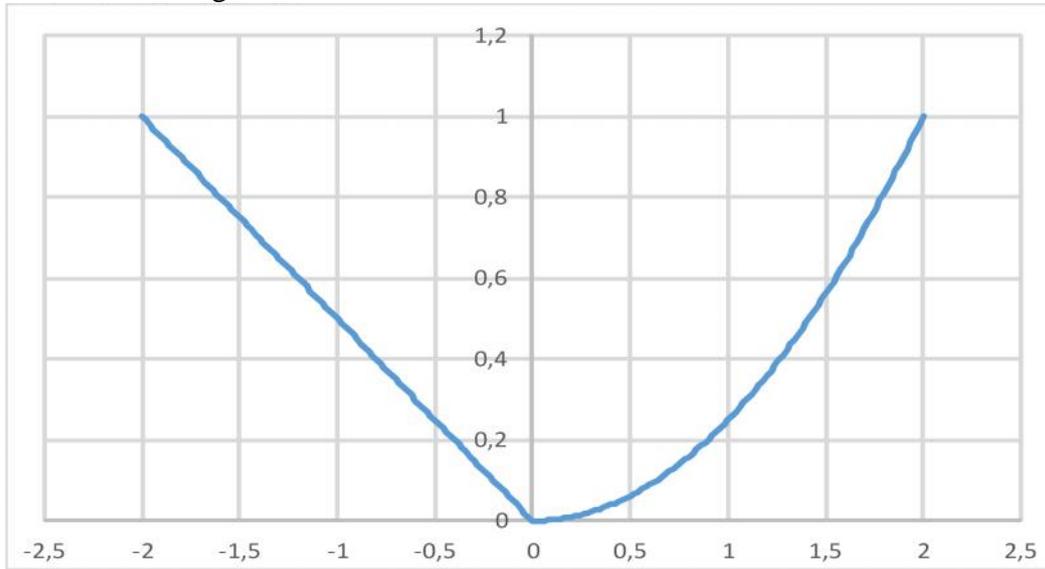
2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n$ vale: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; pertanto

l'uguaglianza $\binom{n}{23} = \binom{n}{255}$ è verificata se e solo se $n = 23 + 255 = 278$.

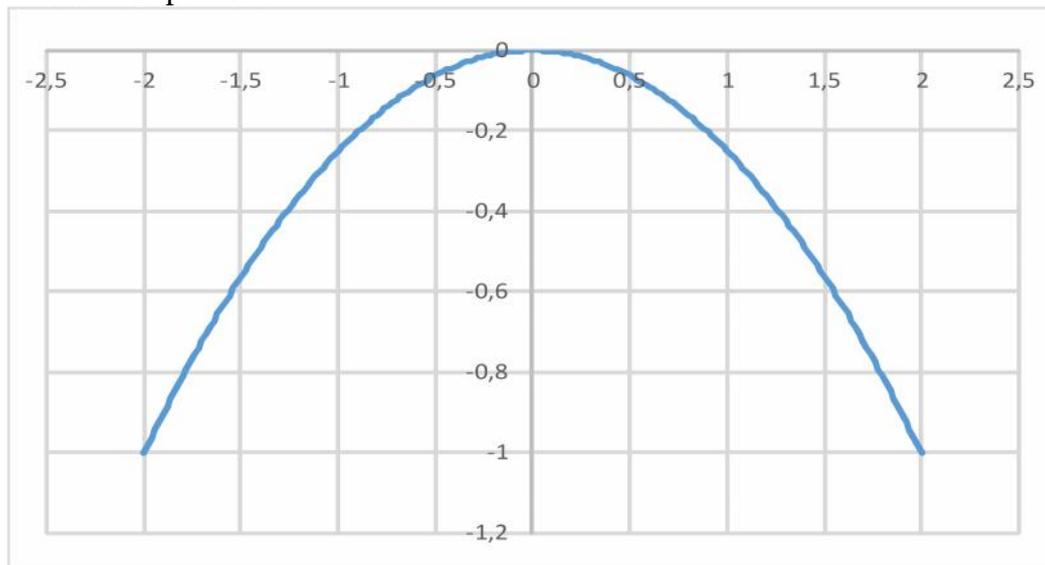
3) Grafico di $f(x)$.



Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ascisse, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ordinate negative.



Il grafico della funzione $f(|x|)$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ordinate, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ascisse positive.



- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4^x - 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(4^x - 1)}{4^x - 1} \cdot \frac{4^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \log 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\log 4}{2}$;
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x + 1)^{30} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2x)^{30} - 1}{2x} \cdot 2 = 30 \cdot 2 = 60$.
- 5) $\lim_{x \rightarrow -1} 2x - 4 = -6$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $|2x - 4 - (-6)| = |2(x + 1)| = 2|x + 1|$, posto $2|x + 1| < \epsilon$ risulta $|x + 1| < \epsilon/2$ da cui $\delta_\epsilon = \epsilon/2$, limite verificato.

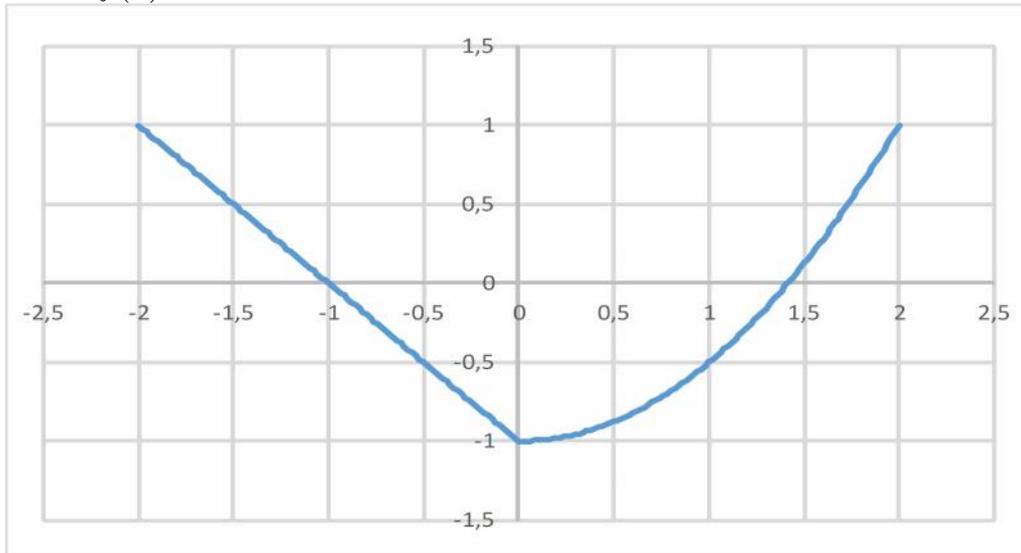
Compito A3

p	q	r	$\neg(r \text{ e } p)$	$\neg(\neg(r \text{ e } p) \Rightarrow q)$	$p \text{ o } q$	$\neg(\neg(r \text{ e } p) \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \text{ o } q)$
V	V	V	F	F	V	F
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	F	V	F
1) V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	F

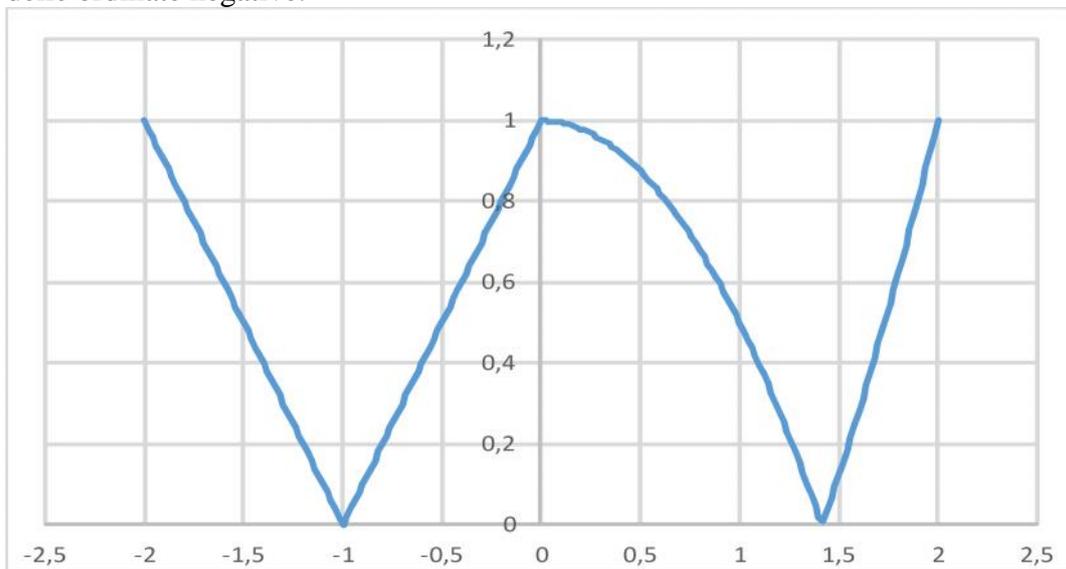
2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n$ vale: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; pertanto

l'uguaglianza $\binom{n}{41} = \binom{n}{320}$ è verificata se e solo se $n = 41 + 320 = 361$.

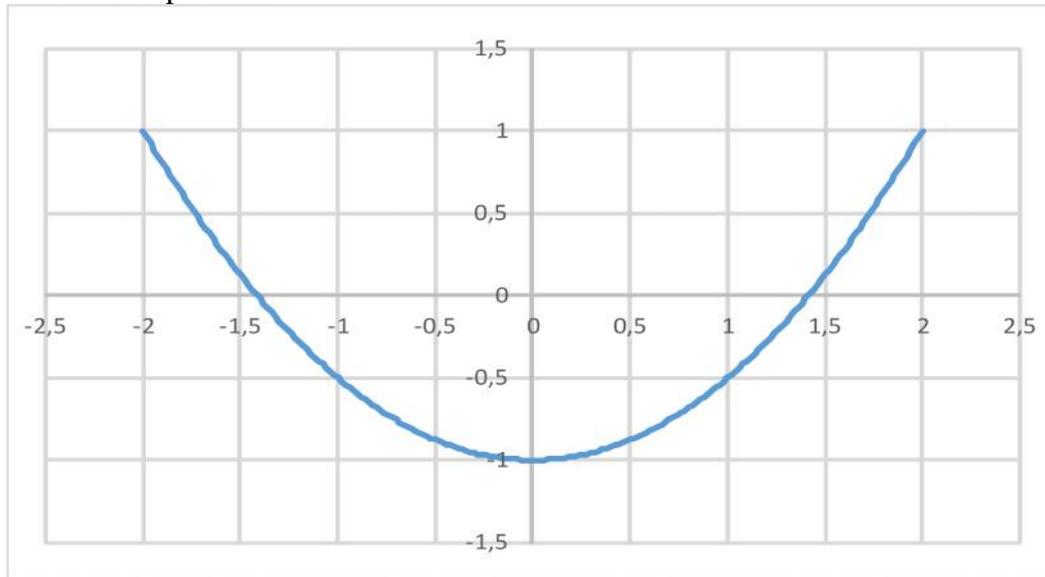
3) Grafico di $f(x)$.



Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ascisse, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ordinate negative.



Il grafico della funzione $f(|x|)$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ordinate, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ascisse positive.



$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(e^x - 1)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(e^x - 1)}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x + 1)^5 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 3x)^5 - 1}{3x} \cdot 3 = 5 \cdot 3 = 15.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x + \frac{5}{2} = 3. \text{ Verifica: } \forall \epsilon > 0 \text{ si ha } \left| x + \frac{5}{2} - 3 \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right|, \text{ posto}$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \text{ banalmente si ottiene } \delta_\epsilon = \epsilon, \text{ limite verificato.}$$

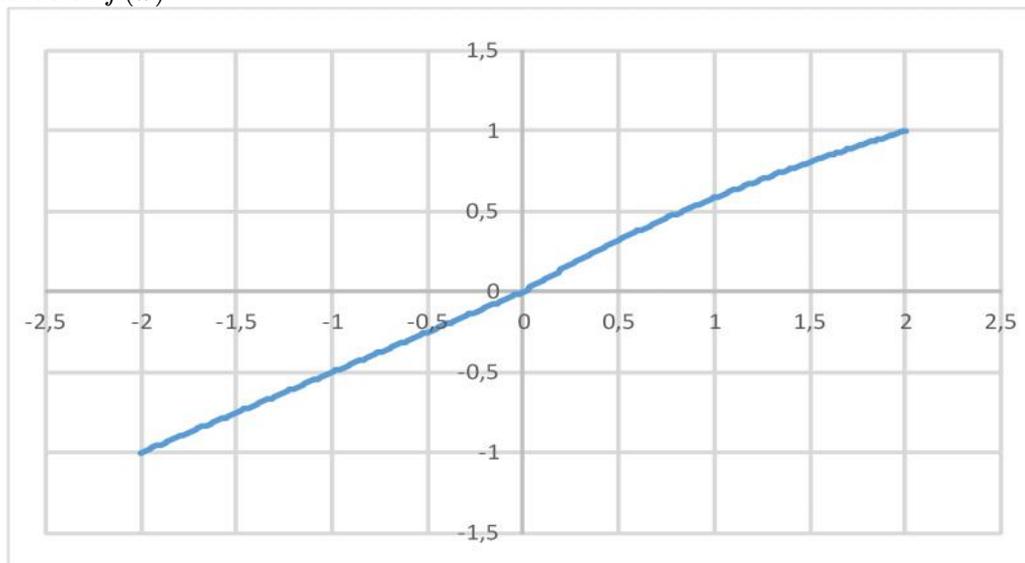
Compito A4

	p	q	r	$r \Rightarrow p$	$\neg((r \Rightarrow p) \wedge q)$	$p \vee \neg q$	$\neg((r \Rightarrow p) \wedge q) \Rightarrow (p \vee \neg q)$
	V	V	V	V	F	V	V
	V	V	F	V	F	V	V
	V	F	V	V	V	V	V
1)	V	F	F	V	V	V	V
	F	V	V	F	V	F	F
	F	V	F	V	F	F	V
	F	F	V	F	V	V	V
	F	F	F	V	V	V	V

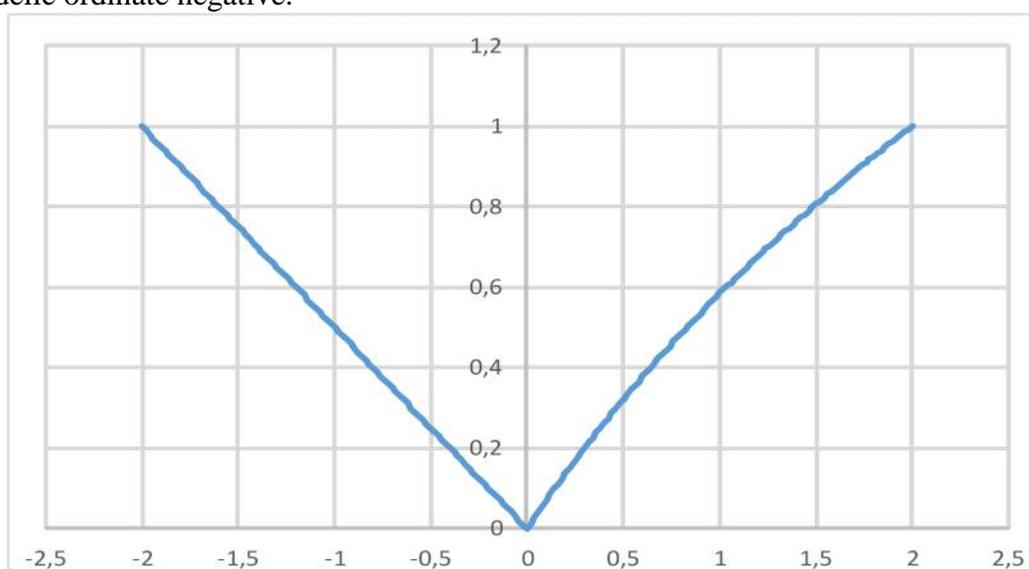
2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n$ vale: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; pertanto

l'uguaglianza $\binom{n}{1} = \binom{n}{523}$ è verificata se e solo se $n = 1 + 523 = 524$.

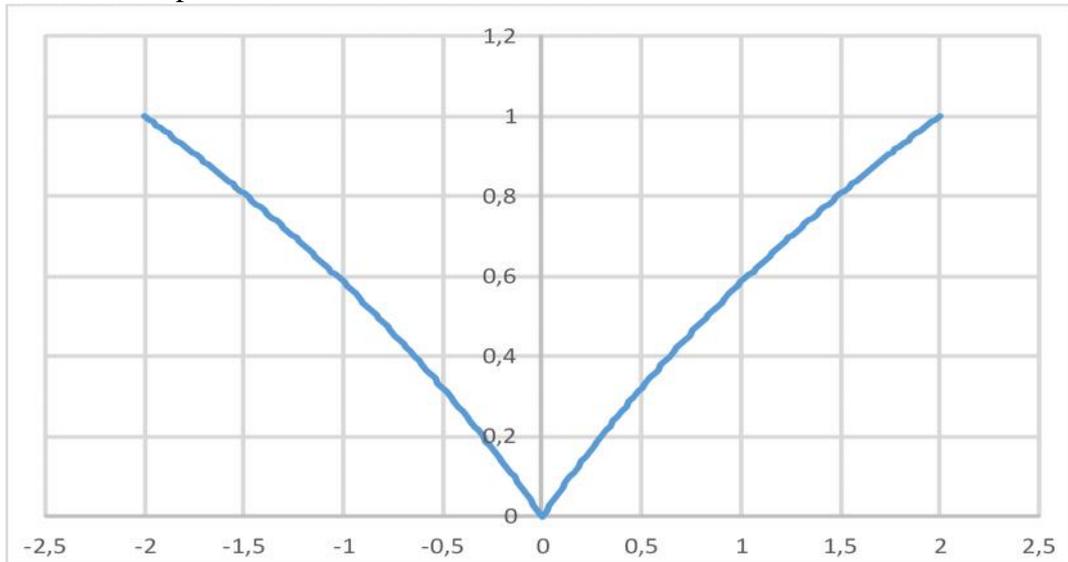
3) Grafico di $f(x)$.



Il grafico della funzione $|f(x)|$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ascisse, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ordinate negative.



Il grafico della funzione $f(|x|)$ si ottiene per simmetria ribaltando, rispetto l'asse delle ordinate, la parte del grafico della funzione originaria che si trova sul semipiano delle ascisse positive.



$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x} - 1}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} 3x} - 1}{\operatorname{arctg} 3x} \cdot \frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^{25} - 1}{30x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{25} - 1}{x} \cdot \frac{1}{30} = 25 \cdot \frac{1}{30} = \frac{5}{6}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -7} 3 - 2x = 17. \text{ Verifica: } \forall \epsilon > 0 \text{ si ha } |3 - 2x - 17| = |2(x+7)| = 2|x+7|, \text{ posto } 2|x+7| < \epsilon \text{ risulta } |x+7| < \epsilon/2 \text{ da cui } \delta_\epsilon = \epsilon/2, \text{ limite verificato.}$$

Compito **Z**

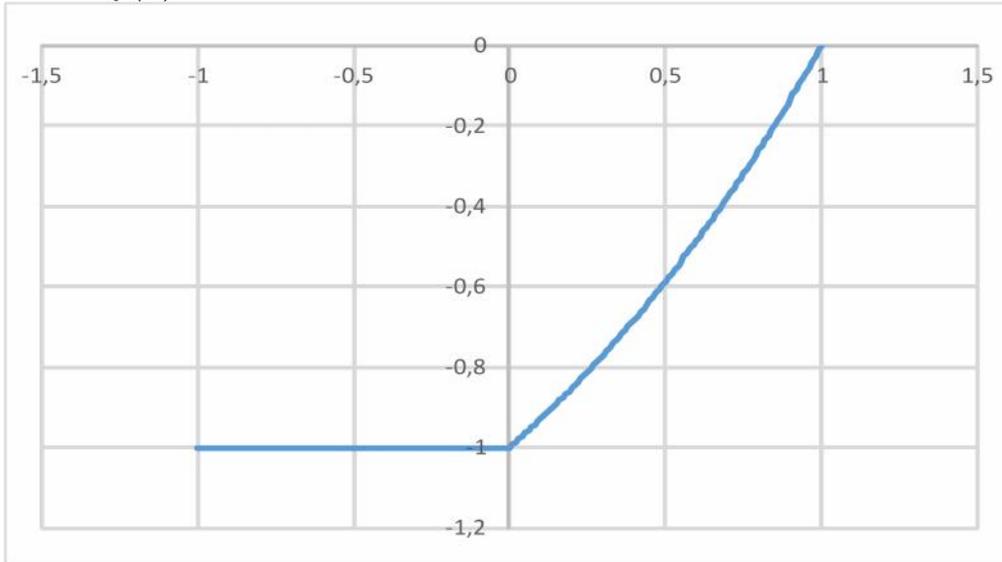
- 1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe dove almeno due fra le proposizioni semplici p, q e r sono vere

p	q	r	$\neg r$	$q \Leftrightarrow p$	$\neg r \Rightarrow (q \Leftrightarrow p)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V

- 2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n-1$ vale: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$;

$$\text{pertanto risulta: } \binom{44}{12} + 2 \cdot \binom{44}{11} + \binom{44}{10} = \binom{44}{12} + \binom{44}{11} + \binom{44}{11} + \binom{44}{10} = \binom{45}{12} + \binom{45}{11} = \binom{46}{12}.$$

3) Grafico di $f(x)$.



$$f([-1, 0]) = \{-1\}; f^{-1}([-1, -1/2]) = [-1, \log_2(3/2)].$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctg x)}{x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arctg x)}{\arctg^2 x} \cdot \left(\frac{\arctg x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 1)^{\frac{1}{5x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + 3x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right)^{\frac{1}{5}} = (\rightarrow e^3)^{\frac{1}{5}} = e^{\frac{3}{5}}$.
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-3} = +\infty$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $2^{x-3} > \epsilon \Rightarrow x - 3 > \log_2 \epsilon \Rightarrow x > 3 + \log_2 \epsilon$, da cui $\delta_\epsilon = 3 + \log_2 \epsilon$, limite verificato.

Compito **Z2**

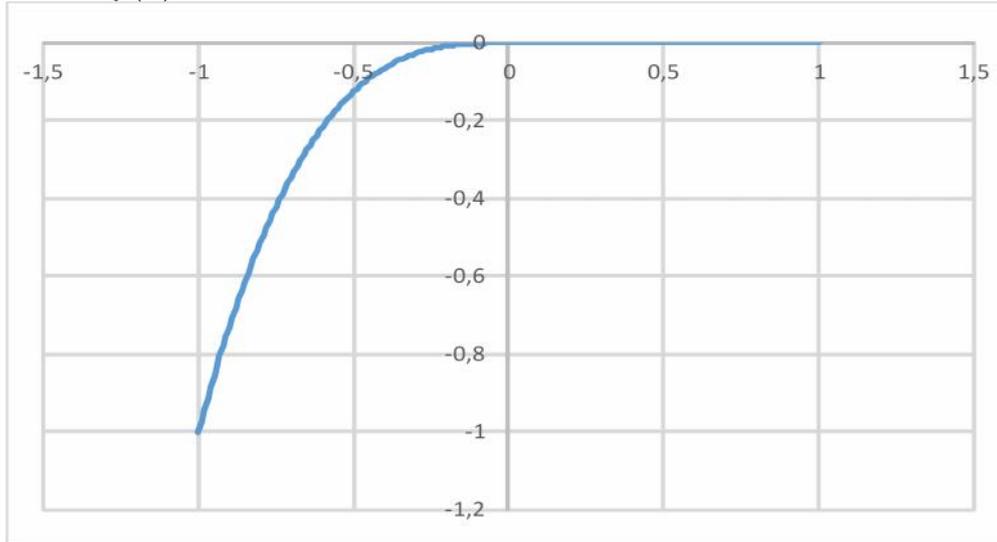
- 1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe dove almeno due fra le proposizioni semplici p, q e r sono false

p	q	r	$p \circ r$	$\neg q$	$(p \circ r) \Leftrightarrow \neg q$
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F

- 2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n - 1$ vale: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$;

pertanto risulta: $\binom{54}{19} + 2 \cdot \binom{54}{18} + \binom{54}{17} = \binom{54}{19} + \binom{54}{18} + \binom{54}{18} + \binom{54}{17} = \binom{55}{19} + \binom{55}{18} = \binom{56}{19}$.

3) Grafico di $f(x)$.



$$f([0, 1]) = \{0\}; f^{-1}([-1/2, 0]) = [-\sqrt[3]{1/2}, 1].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x^4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin^2 x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2 - \frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) = -\frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 + 1)^{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + 5x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right)^2 =$$

$$\left(\rightarrow e^5 \right)^2 = e^{10}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{x-2} = +\infty. \text{ Verifica: } \forall \epsilon > 0 \text{ si ha } 3^{x-2} > \epsilon \Rightarrow x - 2 > \log_3 \epsilon \Rightarrow$$

$$x > 2 + \log_3 \epsilon, \text{ da cui } \delta_\epsilon = 2 + \log_3 \epsilon, \text{ limite verificato.}$$

Compito Z3

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe dove almeno due fra le proposizioni semplici p, q e r sono false

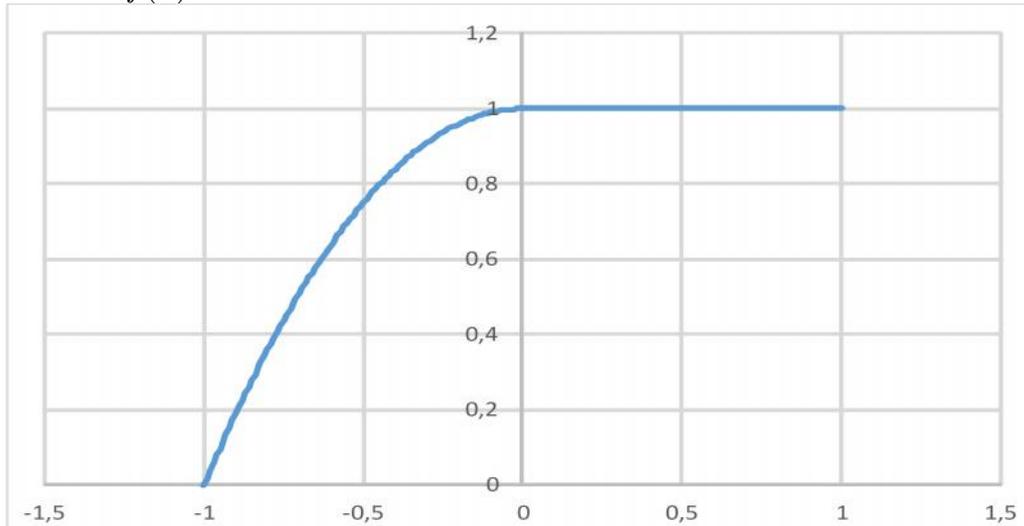
p	q	r	$p \wedge r$	$\neg(p \wedge r)$	$\neg(p \wedge r) \Rightarrow q$
V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	V	F

2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n - 1$ vale: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$;

$$\text{pertanto risulta: } \binom{154}{30} + 2 \cdot \binom{154}{29} + \binom{154}{28} =$$

$$\binom{154}{30} + \binom{154}{29} + \binom{154}{29} + \binom{154}{28} = \binom{155}{30} + \binom{155}{29} = \binom{156}{30}.$$

3) Grafico di $f(x)$.



$$f([0, 1]) = \{1\}; f^{-1}([1/2, 1]) = [\sqrt{1/2}, 1].$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{x^2 - 6x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{(e^x - 1)^2} \cdot \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 - 6x} =$
 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}; \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x^2)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 - 5x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right)^3 = (\rightarrow e^{-5})^3 = e^{-15}.$
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{-x} = +\infty$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $5^{-x} > \epsilon \Rightarrow -x > \log_5 \epsilon \Rightarrow$
 $x < -\log_5 \epsilon$, da cui $\delta_\epsilon = \log_5 \epsilon$, limite verificato.

Compito Z4

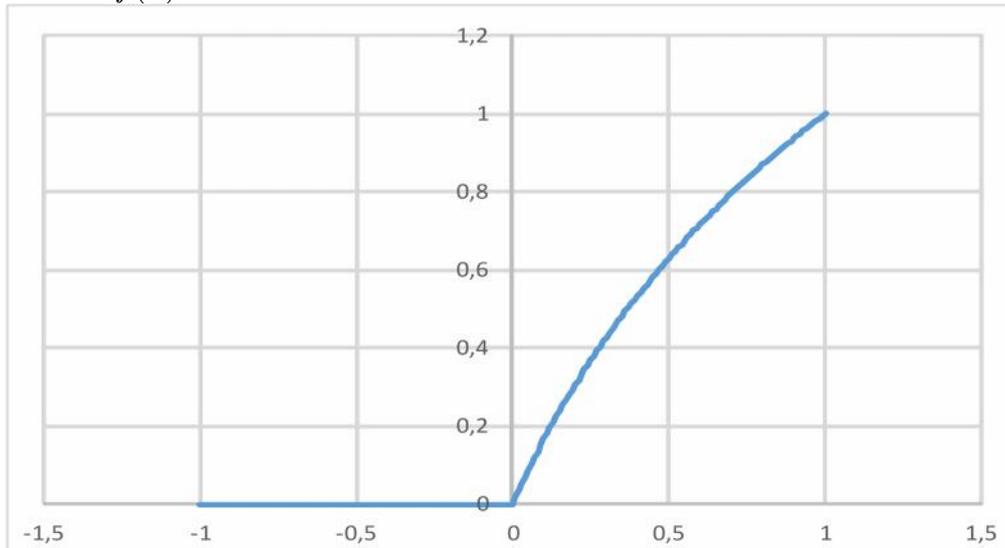
- 1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le quattro righe dove almeno due fra le proposizioni semplici p, q e r sono vere

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow r) \circ q$	$\neg((p \Rightarrow r) \circ q)$
V	V	V	V	V	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	F

- 2) Per ogni coppia (n, k) con $0 \leq k \leq n - 1$ vale: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$;

pertanto risulta: $\binom{77}{53} + 2 \cdot \binom{77}{52} + \binom{77}{51} =$
 $\binom{77}{53} + \binom{77}{52} + \binom{77}{52} + \binom{77}{51} = \binom{78}{53} + \binom{78}{52} = \binom{79}{53}.$

3) Grafico di $f(x)$.



$$f([-1, 0]) = \{0\}; f^{-1}([1/2, 1]) = [(\sqrt{3} - 1)/2, 1].$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{1-\cos x} - 1}{x^2 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{1-\cos x} - 1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + x} = \log 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\log 2}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{5}{3}x^4\right)^{\frac{1}{x^4}} = e^{-\frac{5}{3}}$.
- 5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $e^{1-x} > \epsilon \Rightarrow 1 - x > \log \epsilon \Rightarrow x < 1 - \log \epsilon$, da cui $\delta_\epsilon = \log \epsilon - 1$, limite verificato.