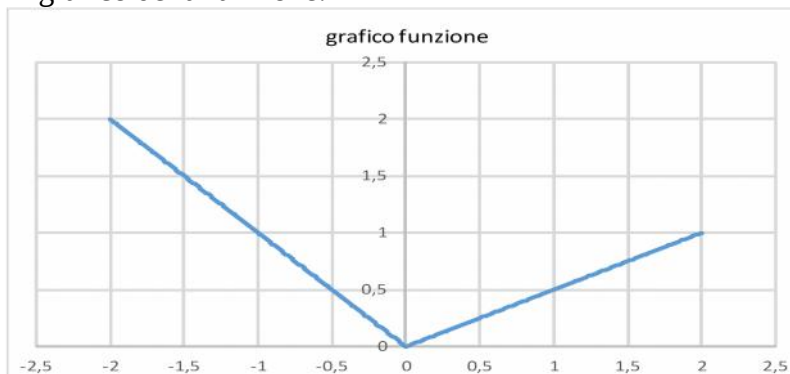


Università degli Studi di Siena
 Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)
 4 febbraio 2020

Compito J1

- 1) $I_1 \cap I_2 =]3, 5]$, da $(I_1 \cap I_2) \cup I_3 =]3, 9[$ si ottiene $3 < \inf(I_3) \leq 5$ e $\sup(I_3) = 9 \notin I_3$; $I_1 \cup I_2 = [2, 8[$ e da $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = [4, 8[$ si ha $\inf(I_3) = 4 \in I_3$; $I_3 = [4, 9[$. $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [2, 9[$ e $\delta(I_1 \cup I_2 \cup I_3) = \delta([2, 9[) = \{2, 9\}$.
- 2) Nel primo caso (scelta libera), le prime tre cifre si possono scegliere in $D_{5,3}^r$ modi distinti, mentre le restanti cinque in $D_{10,5}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{5,3}^r \cdot D_{10,5}^r = 5^3 \cdot 10^5 = 12.500.000$. Nel secondo caso (assenza della cifra 1), le prime tre cifre si possono scegliere in $D_{4,3}^r$ modi distinti, mentre le restanti cinque in $D_{9,5}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{4,3}^r \cdot D_{9,5}^r = 4^3 \cdot 9^5 = 3.779.136$.
- 3) Di seguito il grafico della funzione.



- $f([-1, 1]) = [0, 1]$; $f(f([-1, 1])) = f([0, 1]) = [0, 1/2]$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{1 - \cos(4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^2}{x^2} \cdot \frac{16x^2}{1 - \cos(4x)} \cdot \frac{1}{16} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^3}{2x^3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(1 + x + x^2)}{2x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{1 + x + x^2}{2x(x + 1)} = -\frac{3}{4}$.
- 5) C.E.: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; C.E. = $] - \infty, 1[\cup]1, + \infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{e^{2x}}{x - 1} > 0 \Rightarrow x - 1 > 0$ ovvero $x > 1$

($e^{2x} > 0, \forall x \in C.E.$). Funzione positiva in $]1, + \infty[$, negativa in $] - \infty, 1[$.

$y \neq 0, \forall x \in C.E.$. $y(0) = -1$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x - 1} = 0$; As Or Sx di equazione $y = 0$;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{2x}}{x - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{2x}}{x - 1} = +\infty$; As V di equazione $x = 1$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x - 1} = +\infty$; perché $x - 1 = o(e^{2x})$ per $x \rightarrow +\infty$, no As Or Dx;

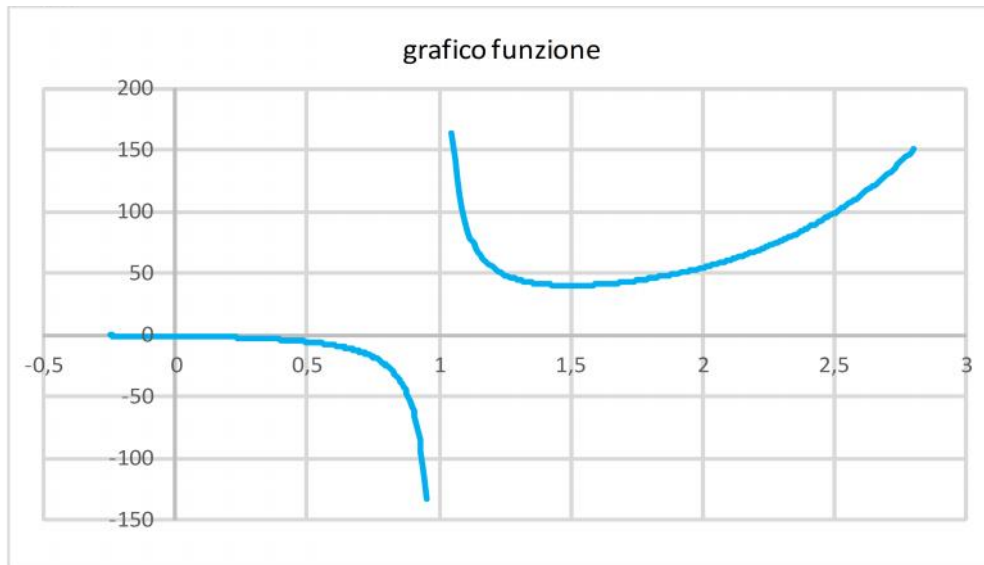
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x(x - 1)} = +\infty$; perché $x(x - 1) = o(e^{2x})$ per $x \rightarrow +\infty$, no As Obl Dx.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{e^{2x} \cdot 2(x-1) - e^{2x} \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^{2x}(2x-3)}{(x-1)^2}$.

$y' > 0$ se $2x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3/2$. Funzione strettamente crescente in $[3/2, +\infty[$, strettamente decrescente in $] -\infty, 1[$ e in $]1, 3/2]$. Minimo relativo in $x = 3/2$ pari a $y(3/2) = 2e^3$.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale e dell'asintoto orizzontale sinistro insieme al punto di minimo di coordinate $(3/2, 2e^3)$ e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è strettamente concava in $] -\infty, 1[$, strettamente convessa in $]1, +\infty[$.

Grafico:



$$6) \int \left(\frac{1}{x^6} + 6x^5 - 12 \sin x \right) dx = \int (x^{-6} + 6x^5 - 12 \sin x) dx = -\frac{1}{5x^5} + x^6 + 12 \cos x + c.$$

7) La funzione proposta è un polinomio di secondo grado, continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile anche nell'intervallo proposto.

$$y(-1) = 4, y(5) = -50, \frac{y(5) - y(-1)}{5 - (-1)} = -9 \text{ e } y' = -2x - 5; \text{ per}$$

determinare x_0 è necessario risolvere l'equazione $-2x - 5 = -9 \Rightarrow x_0 = 2$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}$.

$$z(P) = -7, \nabla z = ((1+y)x^y - y^2, x^{1+y} \cdot \log x - 2y(1+x)),$$

$$\nabla z(P) = (-1, -8). \text{ Equazione del piano tangente:}$$

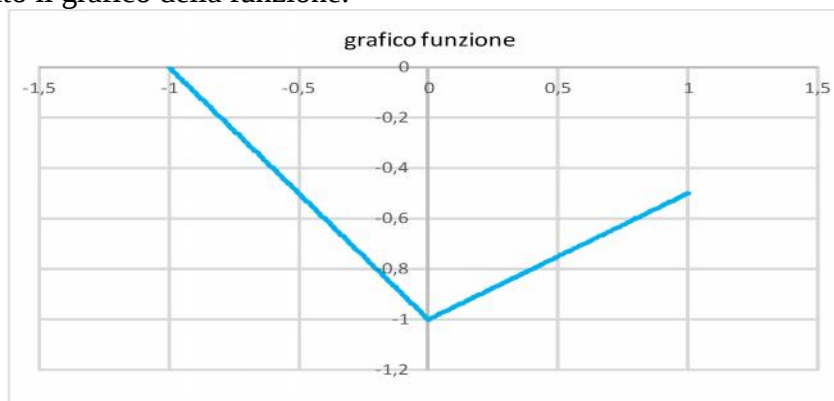
$$z + 7 = -(x - 1) - 8(y - 2), \text{ oppure } x + 8y + z = 10.$$

Compito J2

- 1) $I_1 \cap I_2 =]3, 5]$, da $(I_1 \cap I_2) \cup I_3 =]1, 5]$ si ottiene $\inf(I_3) = 1 \notin I_3$ e $3 \leq \sup(I_3) \leq 5$; $I_1 \cup I_2 = [0, 8[$ e da $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 =]1, 4]$ si ha $\sup(I_3) = 4 \in I_3$; $I_3 =]1, 4]$. $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [0, 8[$ e $\delta(I_1 \cup I_2 \cup I_3) = \delta([0, 8]) = \{0, 8\}$.

- 2) Nel primo caso (scelta libera), le prime quattro cifre si possono scegliere in $D_{5,4}^r$ modi distinti, mentre le restanti quattro in $D_{10,4}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{5,4}^r \cdot D_{10,4}^r = 5^4 \cdot 10^4 = 6.250.000$. Nel secondo caso (assenza della cifra 2), le prime quattro cifre si possono scegliere ancora in $D_{5,4}^r$ modi distinti, mentre le restanti quattro in $D_{9,4}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{5,4}^r \cdot D_{9,4}^r = 5^4 \cdot 9^4 = 4.100.625$.

- 3) Di seguito il grafico della funzione.



$$f([-1/4, 0]) = [-1, -3/4];$$

$$f(f([-1/4, 0])) = f([-1, -3/4]) = [-1/4, 0].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{9x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 = \frac{9}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x+2)}{x^2+2x+4} = \frac{2}{3}.$$

$$5) C.E.: x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2; C.E. =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[.$$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{e^{-x}}{x+2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0$ ovvero

$x > -2$ ($e^{-x} > 0, \forall x \in C.E.$). Funzione positiva in $] -2, +\infty[$, negativa in $] -\infty, -2[$. $y \neq 0, \forall x \in C.E.. y(0) = 1/2$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$x \rightarrow -\infty \frac{e^{-x}}{x+2} = -\infty; \text{perché } x+2 = o(e^{-x}) \text{ per } x \rightarrow -\infty, \text{ no As Or Sx};$$

$$x \rightarrow -\infty \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x(x+2)} = +\infty; \text{perché } x(x+2) = o(e^{-x}) \text{ per}$$

$x \rightarrow -\infty$, no As Obl Sx;

$$x \rightarrow -2^- \frac{e^{-x}}{x+2} = -\infty; \quad x \rightarrow -2^+ \frac{e^{-x}}{x+2} = +\infty; \text{As V di equazione } x = -2;$$

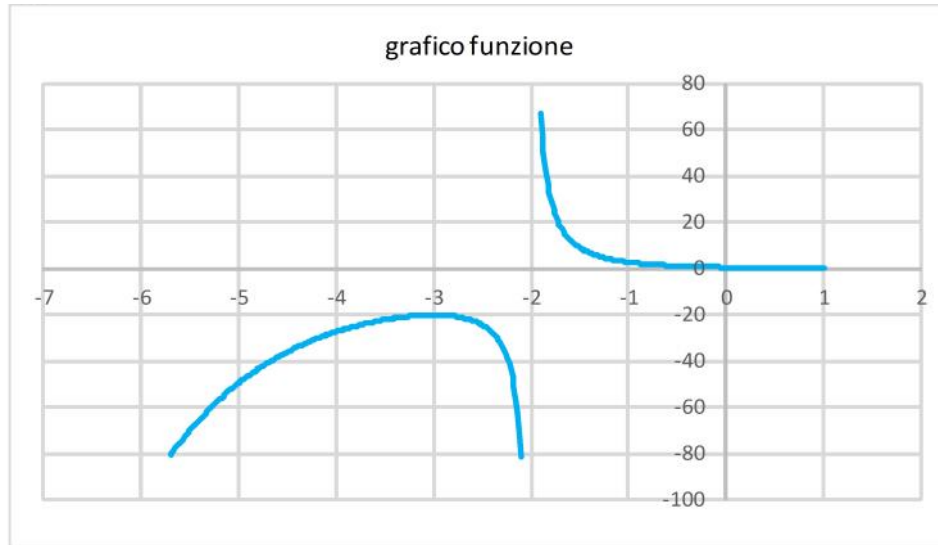
$$x \rightarrow +\infty \frac{e^{-x}}{x+2} = 0; \text{As Or Dx di equazione } y = 0.$$

$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{e^{-x} \cdot (-1)(x+2) - e^{-x} \cdot 1}{(x+2)^2} = -\frac{e^{-x}(x+3)}{(x+2)^2}.$$

$y' > 0$ se $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$. Funzione strettamente crescente in $] -\infty, -3[$, strettamente decrescente in $[-3, -2[$ e in $] -2, +\infty[$. Massimo relativo in $x = -3$ pari a $y(-3) = -e^3$.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale e dell'asintoto orizzontale destro insieme al punto di massimo di coordinate $(-3, -e^3)$ e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è strettamente concava in $] -\infty, -2[$, strettamente convessa in $] -2, +\infty[$.

Grafico:



$$6) \int \left(\frac{5}{x^7} + x^2 + 4 \sin x \right) dx = \int (5x^{-7} + x^2 + 4 \sin x) dx = -\frac{5}{6x^6} + \frac{x^3}{3} - 4 \cos x + c.$$

7) La funzione proposta è un polinomio di secondo grado, continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile anche nell'intervallo proposto.

$$y(-3) = -30, y(2) = -10, \frac{y(2) - y(-3)}{2 - (-3)} = 4 \text{ e } y' = -6x + 1; \text{ per}$$

determinare x_0 è necessario risolvere l'equazione $-6x + 1 = 4 \Rightarrow x_0 = -1/2$.

$$8) \text{ Il piano tangente alla superficie ha equazione } z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}.$$

$$z(P) = 0, \nabla z = (-y^{2-x} \cdot \log y - 3x^2(2 - y^2), (2 - x)y^{1-x} + 2x^3y),$$

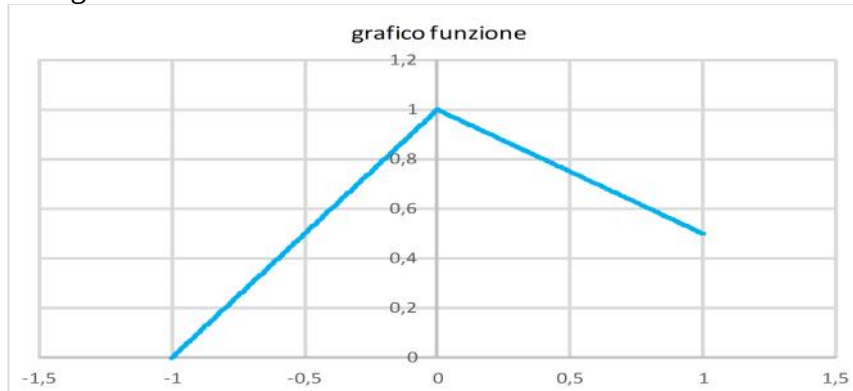
$\nabla z(P) = (-3, 3)$. Equazione del piano tangente: $z = -3(x - 1) + 3(y - 1)$, oppure $3x - 3y + z = 0$.

Compito 3

1) $I_1 \cap I_2 =]2, 4[$, da $(I_1 \cap I_2) \cup I_3 =]-1, 4[$ si ottiene $\inf(I_3) = -1 \notin I_3$ e $2 \leq \sup(I_3) < 4$; $I_1 \cup I_2 = [0, 5[$ e da $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = [0, 3]$ si ha $\sup(I_3) = 3 \in I_3$; $I_3 =]-1, 3]$. $I_1 \cap I_2 \cap I_3 =]2, 3]$ e $\delta(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \delta([2, 3]) = \{2, 3\}$.

2) Nel primo caso (scelta libera), le prime due cifre si possono scegliere in $D_{5,2}^r$ modi distinti, mentre le restanti quattro in $D_{10,4}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{5,2}^r \cdot D_{10,4}^r = 5^2 \cdot 10^4 = 250.000$. Nel secondo caso (assenza della cifra 3), le prime due cifre si possono scegliere ancora in $D_{5,2}^r$ modi distinti, mentre le restanti quattro in $D_{9,4}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{5,2}^r \cdot D_{9,4}^r = 5^2 \cdot 9^4 = 164.025$.

3) Di seguito il grafico della funzione.



$$f([-1/2, 0]) = [1/2, 1]; f(f([-1/2, 0])) = f([1/2, 1]) = [1/2, 3/4].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{25x^2}{1 - \cos(5x)} \cdot \frac{1}{25} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{2}{25}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{9x - x^3}{27 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(3 - x)(3 + x)}{(3 - x)(9 + 3x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(3 + x)}{9 + 3x + x^2} = \frac{2}{3}.$$

$$5) C.E.: x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2; C.E. =] - \infty, 2[\cup]2, + \infty[.$$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{e^x}{x - 2} > 0 \Rightarrow x - 2 > 0$ ovvero $x > 2$

($e^x > 0, \forall x \in C.E.$). Funzione positiva in $]2, + \infty[$, negativa in $] - \infty, 2[$.

$y \neq 0, \forall x \in C.E.. y(0) = -1/2$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$x \rightarrow -\infty \frac{e^x}{x - 2} = 0; \text{ As Or } Sx \text{ di equazione } y = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^x}{x - 2} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^x}{x - 2} = +\infty; \text{ As V di equazione } x = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x - 2} = +\infty; \text{ perché } x - 2 = o(e^x) \text{ per } x \rightarrow +\infty, \text{ no As Or } Dx;$$

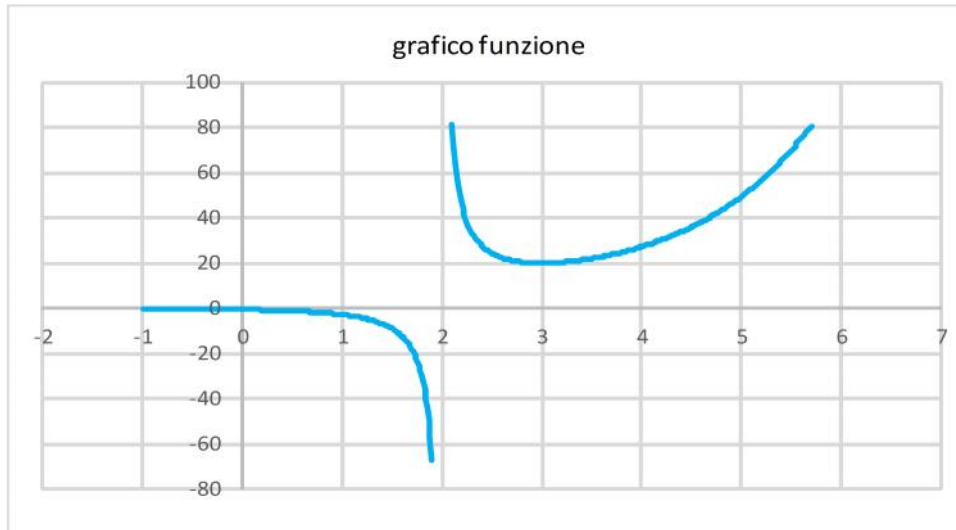
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(x - 2)} = +\infty; \text{ perché } x(x - 2) = o(e^x) \text{ per } x \rightarrow +\infty, \text{ no As Obl } Dx.$$

$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{e^x(x - 2) - e^x \cdot 1}{(x - 2)^2} = \frac{e^x(x - 3)}{(x - 2)^2}.$$

$y' > 0$ se $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$. Funzione strettamente crescente in $[3, + \infty[$, strettamente decrescente in $] - \infty, 1[$ e in $]1, 3]$. Minimo relativo in $x = 3$ pari a $y(3) = e^3$.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale e dell'asintoto orizzontale sinistro insieme al punto di minimo di coordinate $(3, e^3)$ e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è strettamente concava in $] - \infty, 2[$, strettamente convessa in $]2, + \infty[$.

Grafico:



$$6) \int \left(\frac{2}{x^4} - 7x^8 + \cos x \right) dx = \int (2x^{-4} - 7x^8 + \cos x) dx = -\frac{2}{3x^3} - \frac{7}{9}x^9 + \sin x + c.$$

7) La funzione proposta è un polinomio di secondo grado, continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile anche nell'intervallo proposto.

$$y(-2) = 13, y(2) = 25, \frac{y(2) - y(-2)}{2 - (-2)} = 3 \text{ e } y' = 10x + 3; \text{ per determinare } x_0 \text{ è necessario risolvere l'equazione } 10x + 3 = 3 \Rightarrow x_0 = 0.$$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}$.

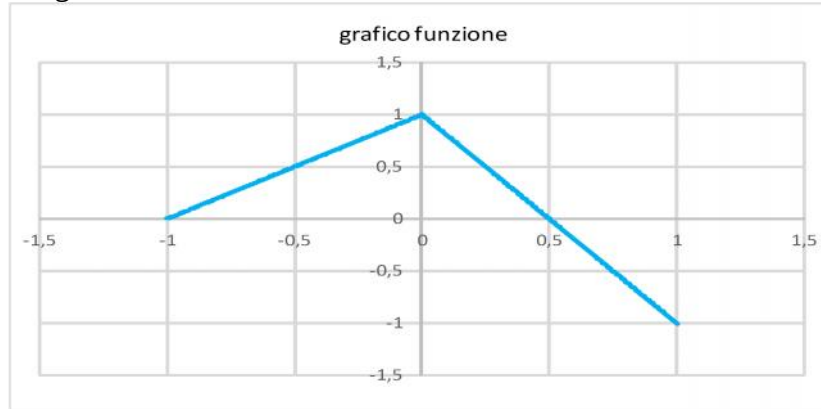
$$z(P) = 0, \nabla z = (y(1+x)^{y-1} + 2xy^3, (1+x)^y \cdot \log(1+x) - 3y^2(1-x^2)), \\ \nabla z(P) = (1, -3). \text{ Equazione del piano tangente: } z = (x-0) - 3(y-1), \text{ oppure } x - 3y - z = -3.$$

Compito J4

1) $I_1 \cap I_2 = [5, 8]$, da $(I_1 \cap I_2) \cup I_3 = [2, 8]$ si ottiene $\inf(I_3) = 2 \notin I_3$ e $5 \leq \sup(I_3) \leq 8$; $I_1 \cup I_2 = [3, 10[$ e da $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = [3, 7[$ si ha $\sup(I_3) = 7 \notin I_3$; $I_3 =]2, 7[$. $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = [5, 7[$ e $\delta(I_1 \cup I_2 \cup I_3) = \delta([5, 7]) = \{5, 7\}$.

2) Nel primo caso (scelta libera), le prime tre cifre si possono scegliere in $D_{10,3}^r$ modi distinti, mentre le restanti tre in $D_{5,3}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{10,3}^r \cdot D_{5,3}^r = 10^3 \cdot 5^3 = 125.000$. Nel secondo caso (assenza della cifra 4), le prime tre cifre si possono scegliere in $D_{9,3}^r$ modi distinti, mentre le restanti tre ancora in $D_{5,3}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{9,3}^r \cdot D_{5,3}^r = 9^3 \cdot 5^3 = 91.125$.

3) Di seguito il grafico della funzione.



$$f([0, 1/2]) = [0, 1]; f(f([0, 1/2])) = f([0, 1]) = [-1, 1].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(9x^2)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(9x^2)}{9x^2} \cdot \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot 9 = 1 \cdot 2 \cdot 9 = 18.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 + 3}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x^2 - x + 1)}{x(x-1)} = \frac{9}{2}.$$

$$5) y = \frac{e^{-2x}}{x+1} \text{ C.E.: } x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1; \text{ C.E.} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{e^{-2x}}{x+1} > 0 \Rightarrow x+1 > 0$ ovvero

$x > -1$ ($e^{-2x} > 0, \forall x \in \text{C.E.}$). Funzione positiva in $] -1, +\infty[$, negativa in $] -\infty, -1[$. $y \neq 0, \forall x \in \text{C.E.}$. $y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$x \rightarrow -\infty \frac{e^{-2x}}{x+1} = -\infty; \text{ perché } x+1 = o(e^{-2x}) \text{ per } x \rightarrow -\infty, \text{ no As Or Sx};$$

$$x \rightarrow +\infty \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}}{x(x+1)} = +\infty; \text{ perché } x(x+1) = o(e^{-2x}) \text{ per } x \rightarrow +\infty, \text{ no As Obl Sx};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{-2x}}{x+1} = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{-2x}}{x+1} = +\infty; \text{ As V di equazione } x = -1;$$

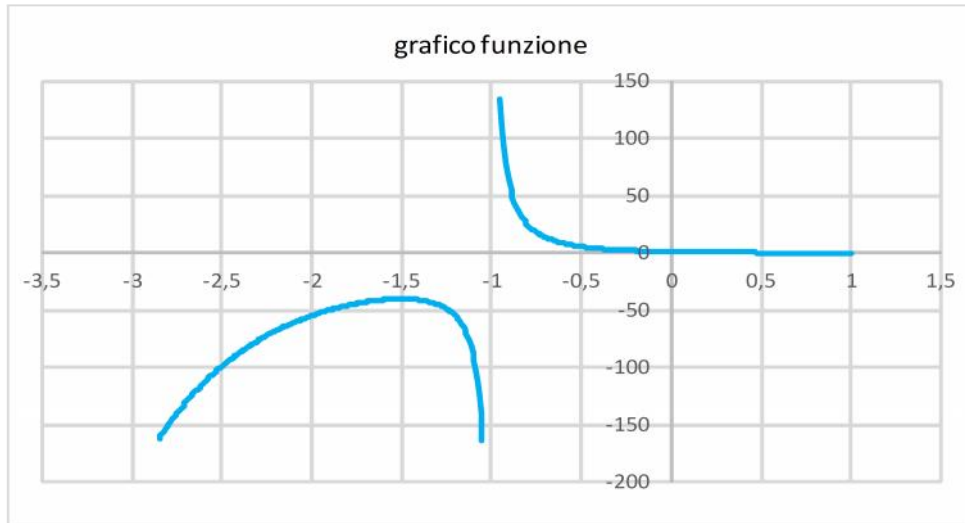
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}}{x+1} = 0; \text{ As Or Dx di equazione } y = 0.$$

$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{e^{-2x} \cdot (-2)(x+1) - e^{-2x} \cdot 1}{(x+1)^2} = -\frac{e^{-2x}(2x+3)}{(x+1)^2}.$$

$y' > 0$ se $2x+3 < 0 \Rightarrow x < -3/2$. Funzione strettamente crescente in $] -\infty, -3/2[$, strettamente decrescente in $[-3/2, -1[$ e in $] -1, +\infty[$. Massimo relativo in $x = -3/2$ pari a $y(-3/2) = -2e^3$.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale e dell'asintoto orizzontale destro insieme al punto di massimo di coordinate $(-3/2, -2e^3)$ e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è strettamente concava in $] -\infty, -1[$, strettamente convessa in $] -1, +\infty[$.

Grafico:



$$6) \int \left(\frac{2}{x^5} - x^3 - 3 \cos x \right) dx = \int (2x^{-5} - x^3 - 3 \cos x) dx =$$

$$-\frac{1}{2x^4} - \frac{x^4}{4} - 3 \sin x + c.$$

7) La funzione proposta è un polinomio di secondo grado, continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile anche nell'intervallo proposto.

$$y(-1) = 7, y(3) = 27, \frac{y(3) - y(-1)}{3 - (-1)} = 5 \text{ e } y' = 8x - 3; \text{ per determinare } x_0 \text{ è}$$

necessario risolvere l'equazione $8x - 3 = 5 \Rightarrow x_0 = 1$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}$.

$$z(P) = -11, \nabla z = (2yx^{2y-1} - 3y^2, 2x^{2y} \cdot \log x - 6xy), \nabla z(P) = (-8, -12).$$

Equazione del piano tangente: $z + 11 = -8(x - 1) - 12(y - 2)$, oppure

$$8x + 12y + z = 21.$$

Compito 5

1) $I_1 \cap I_2 = [2, 6]$, da $(I_1 \cap I_2) \cup I_3 = [2, 12]$ si ottiene $2 \leq \inf(I_3) \leq 6$ e

$\sup(I_3) = 12 \in I_3$; $I_1 \cup I_2 = [1, 8]$ e da $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = [5, 8]$ si ha

$\inf(I_3) = 5 \in I_3$; $I_3 = [5, 12]$. $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [1, 12]$ e

$$\delta(I_1 \cup I_2 \cup I_3) = \delta([1, 12]) = \{1, 12\}.$$

2) Nel primo caso (scelta libera), le prime tre cifre si possono scegliere in $D_{5,3}^r$ modi

distinti, mentre le restanti sette in $D_{10,7}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono

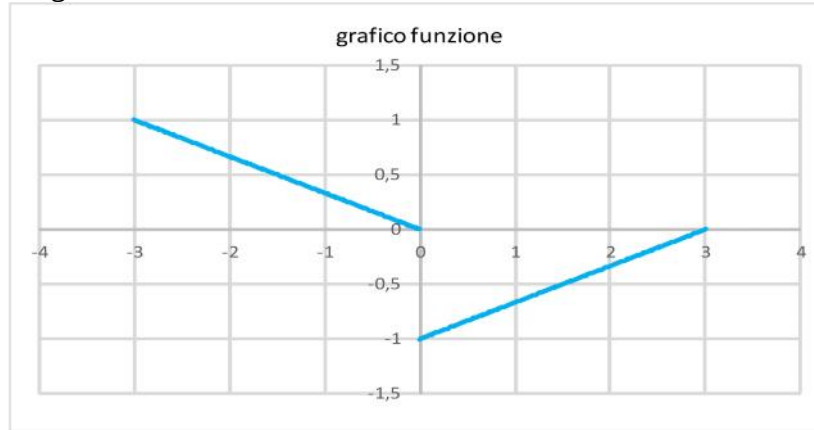
pertanto $D_{5,3}^r \cdot D_{10,7}^r = 5^3 \cdot 10^7 = 1.250.000.000$. Nel secondo caso (assenza della

cifra 5), le prime tre cifre si possono scegliere ancora in $D_{5,3}^r$ modi distinti, mentre le

restanti sette in $D_{9,7}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto

$$D_{5,3}^r \cdot D_{9,7}^r = 5^3 \cdot 9^7 = 597.871.125.$$

3) Di seguito il grafico della funzione.



$$f([-3, -1]) = [1/3, 1]; f(f([-3, -1])) = f([1/3, 1]) = [-8/9, -2/3].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} \cdot \frac{4x^2}{1 - \cos(2x)} \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(4 + 2x + x^2)}{x(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{4 + 2x + x^2}{x(x + 2)} = -\frac{3}{2}.$$

$$5) C.E.: 1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1; C.E. =] - \infty, 1[\cup]1, + \infty[.$$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{e^x}{1 - x} > 0 \Rightarrow 1 - x > 0$ ovvero $x < 1$

($e^x > 0, \forall x \in C.E.$). Funzione positiva in $] - \infty, 1[$, negativa in $]1, + \infty[$.

$y \neq 0, \forall x \in C.E.. y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$x \xrightarrow{-\infty} \frac{e^x}{1 - x} = 0; \text{ As Or } Sx \text{ di equazione } y = 0;$$

$$x \xrightarrow{1^-} \frac{e^x}{1 - x} = +\infty; \quad x \xrightarrow{1^+} \frac{e^x}{1 - x} = -\infty; \text{ As } V \text{ di equazione } x = 1;$$

$$x \xrightarrow{+\infty} \frac{e^x}{1 - x} = -\infty; \text{ perché } 1 - x = o(e^x) \text{ per } x \rightarrow +\infty, \text{ no As Or } Dx;$$

$$x \xrightarrow{+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1 - x)} = -\infty; \text{ perché } x(1 - x) = o(e^x) \text{ per}$$

$x \rightarrow +\infty$, no As Obl Dx.

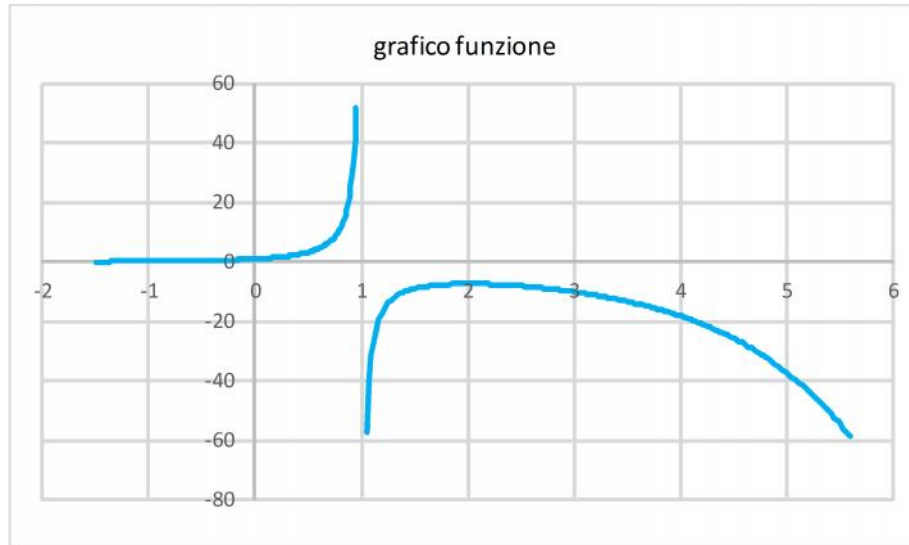
$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{e^x(1 - x) - e^x \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{e^x(2 - x)}{(1 - x)^2}.$$

$y' < 0$ se $2 - x < 0 \Rightarrow x > 2$. Funzione strettamente crescente in $] - \infty, 1[$ e in $]1, 2[$, strettamente decrescente in $[2, +\infty[$. Massimo relativo in $x = 2$ pari a

$$y(2) = -e^2.$$

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale e dell'asintoto orizzontale sinistro insieme al punto di massimo di coordinate $(2, -e^2)$ e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è strettamente convessa in $] - \infty, 1[$, strettamente concava in $]1, +\infty[$.

Grafico:



$$6) \int \left(\frac{2}{x^3} - x^2 - 2 \sin x \right) dx = \int (2x^{-3} - x^2 - 2 \sin x) dx = -\frac{1}{x^2} - \frac{x^3}{3} + 2 \cos x + c.$$

7) La funzione proposta è un polinomio di secondo grado, continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile anche nell'intervallo proposto.

$$y(-2) = 24, y(2) = 16, \frac{y(2) - y(-2)}{2 - (-2)} = -2 \text{ e } y' = 10x - 2; \text{ per determinare } x_0 \text{ è necessario risolvere l'equazione } 10x - 2 = -2 \Rightarrow x_0 = 0.$$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}$.

$$z(P) = -2, \nabla z = (-2yx^{-2y-1} - 3y^2, -2x^{-2y} \cdot \log x - 6xy),$$

$\nabla z(P) = (-5, -6)$. Equazione del piano tangente:

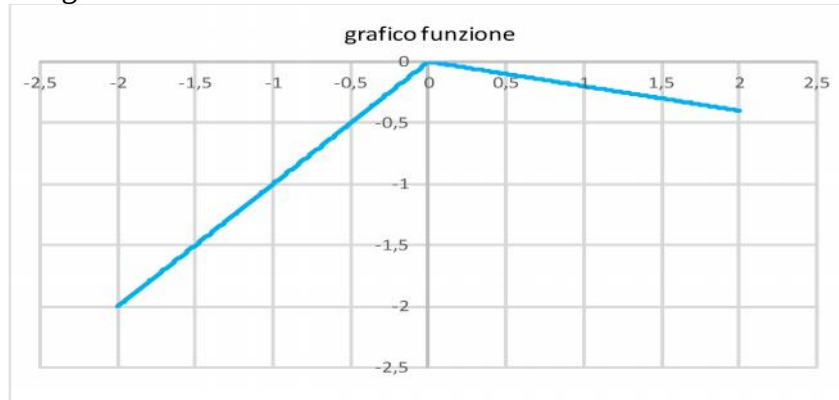
$$z + 2 = -5(x - 1) - 6(y - 1), \text{ oppure } 5x + 6y + z = 9.$$

Compito J6

1) $I_1 \cap I_2 = [1, 5[$, da $(I_1 \cap I_2) \cup I_3 =] - 3, 5[$ si ottiene $\inf(I_3) = -3 \notin I_3$ e $1 \leq \sup(I_3) < 5$; $I_1 \cup I_2 =]0, 10]$ e da $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 =]0, 1[$ si ha $\sup(I_3) = 1 \notin I_3$; $I_3 =] - 3, 1[$. $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$ e $\delta(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \delta(\emptyset) = \emptyset$.

2) Nel primo caso (scelta libera), le prime quattro cifre si possono scegliere in $D_{10,4}^r$ modi distinti, mentre le restanti tre in $D_{5,3}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{10,4}^r \cdot D_{5,3}^r = 10^4 \cdot 5^3 = 1.250.000$. Nel secondo caso (assenza della cifra 6), le prime quattro cifre si possono scegliere in $D_{9,4}^r$ modi distinti, mentre le restanti tre in $D_{4,3}^r$ modi distinti; le possibili targhe sono pertanto $D_{9,4}^r \cdot D_{4,3}^r = 9^4 \cdot 4^3 = 419.904$.

3) Di seguito il grafico della funzione.



$$f([0, 1/2]) = [-1/10, 0]; f(f([0, 1/2])) = f([-1/10, 0]) = [-1/10, 0].$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin(4x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{4x^2}{\sin(4x^2)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{1 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1 - x)(1 + x)}{(1 - x)(1 + x + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(1 + x)}{1 + x + x^2} = \frac{2}{3}.$$

$$5) C.E.: 2 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2; C.E. =] - \infty, 2[\cup]2, + \infty[.$$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{e^{-x}}{2 - x} > 0 \Rightarrow 2 - x > 0$ ovvero $x < 2$

($e^{-x} > 0, \forall x \in C.E.$). Funzione positiva in $] - \infty, 2[$, negativa in $]2, + \infty[$.

$y \neq 0, \forall x \in C.E.. y(0) = 1/2$.

Limiti agli estremi del C.E.:

$$x \rightarrow -\infty \frac{e^{-x}}{2 - x} = +\infty; \text{perché } 2 - x = o(e^{-x}) \text{ per } x \rightarrow -\infty, \text{ no As Or } Sx;$$

$$x \rightarrow -\infty \frac{y}{x} = x \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x(2 - x)} = -\infty; \text{perché } x(2 - x) = o(e^{-x}) \text{ per } x \rightarrow -\infty, \text{ no As Obl } Sx;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{e^{-x}}{2 - x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{e^{-x}}{2 - x} = -\infty; \text{As } V \text{ di equazione } x = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{2 - x} = 0; \text{As Or } Dx \text{ di equazione } y = 0.$$

$$\text{Crescenza e decrescenza: } y' = \frac{e^{-x} \cdot (-1)(2 - x) - e^{-x} \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{e^{-x}(x - 1)}{(2 - x)^2}.$$

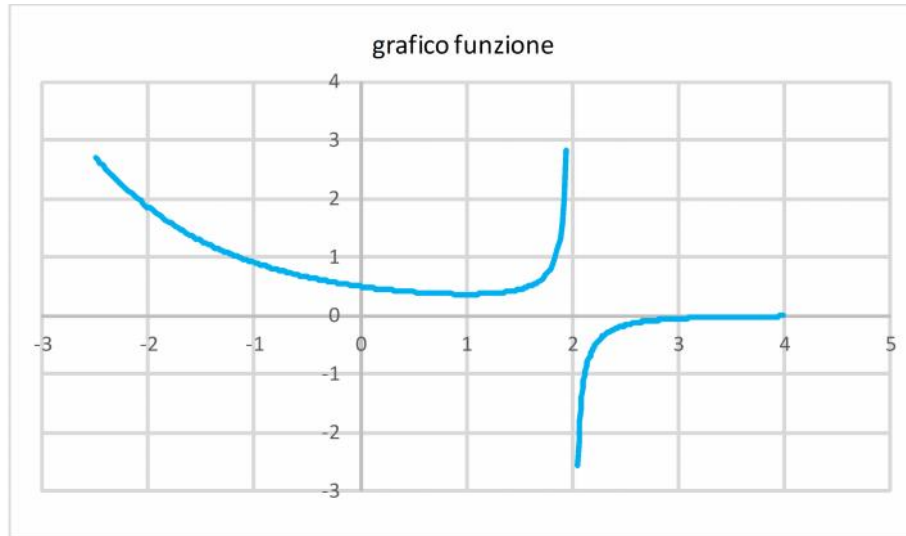
$y' < 0$ se $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$. Funzione strettamente decrescente in $] - \infty, 1[$,

strettamente crescente in $[1, 2[$ e in $[2, + \infty[$. Minimo relativo in $x = 1$ pari a

$$y(1) = e^{-1}.$$

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale e dell'asintoto orizzontale destro insieme al punto di minimo di coordinate $(1, e^{-1})$ e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è strettamente convessa in $] - \infty, 2[$, strettamente concava in $]2, + \infty[$.

Grafico:



$$6) \int \left(\frac{5}{x^3} + x^{15} + 3 \cos x \right) dx = \int (5x^{-3} + x^{15} + 3 \cos x) dx =$$

$$-\frac{5}{2x^2} + \frac{x^{16}}{16} + 3 \sin x + c.$$

7) La funzione proposta è un polinomio di secondo grado, continua e derivabile su tutto l'insieme $\mathbb{R}$, quindi è continua e derivabile anche nell'intervallo proposto.

$$y(-1) = 0, y(0) = -5, \frac{y(0) - y(-1)}{0 - (-1)} = -5 \text{ e } y' = 12x + 1; \text{ per determinare } x_0 \text{ è necessario risolvere l'equazione } 12x + 1 = -5 \Rightarrow x_0 = -1/2.$$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix}$.

$$z(P) = -3, \nabla z = (y^{1+x} \cdot \log y - 2xy, (1+x)y^x - (3+x^2)), \nabla z(P) = (2, -4).$$

Equazione del piano tangente: $z + 3 = 2(x + 1) - 4(y - 1)$, oppure

$$2x - 4y - z = -3.$$