Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

4 novembre 2019

Compito $\mathbb{A}_1$

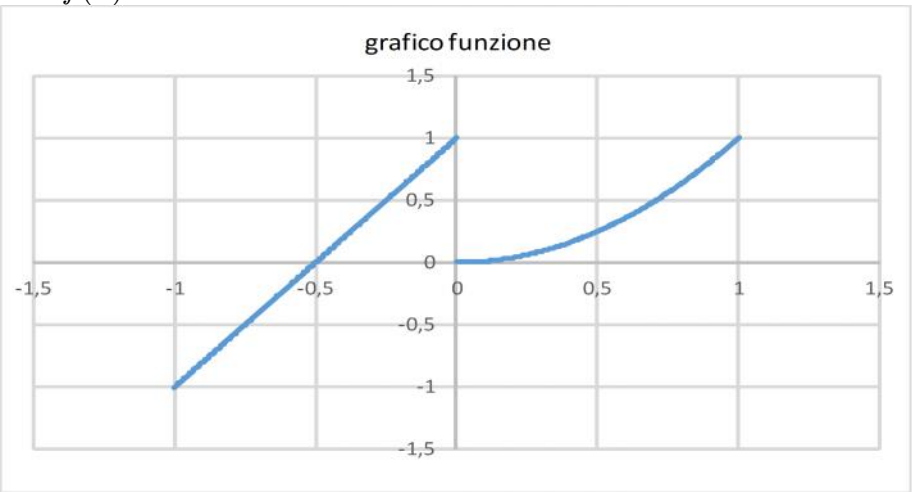
1)

p	q	$p \Rightarrow p$	$q\ o\ (p \Rightarrow p)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	V	V

. La proposizione proposta è una tautologia.

2) Nel primo caso ogni carattere può essere scelto in 62 modi distinti; i possibili codici sono pertanto 62^8. Nel secondo caso i caratteri in posizione dispari possono essere scelti in 10 modi distinti, mentre quelli in posizione pari possono essere scelti in 52 modi distinti; i possibili codici sono pertanto $10^4 \cdot 52^4 = 520^4$.

3) Grafico di $f(x)$.



$f([-1,0]) = [-1,1]$; per l'insieme $f^{-1}(]-1/2,0[)$ nota che $f(x) = 0$ per $x = -1/2$ e $f(x) = -1/2$ per $x = -3/4$, pertanto $f^{-1}(]-1/2,0[) =]-3/4, -1/2[$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(tg\,x + sen\,x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(tg\,x + sen\,x)}{tg\,x + sen\,x} \cdot \left(\dfrac{tg\,x}{x} + \dfrac{sen\,x}{x}\right) =$ $1 \cdot 2 = 2$; $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(3+x)^2 - 4}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{((3+x)-2)((3+x)+2)}{x+1} =$ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x+1)(x+5)}{x+1} = 4$.

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 8 = +\infty$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, posto $x^2 - 8 > \epsilon$ si ha $x^2 > 8 + \epsilon \Rightarrow x < -\sqrt{8+\epsilon}$, da cui $\delta_\epsilon = \sqrt{8+\epsilon}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{A}_2$

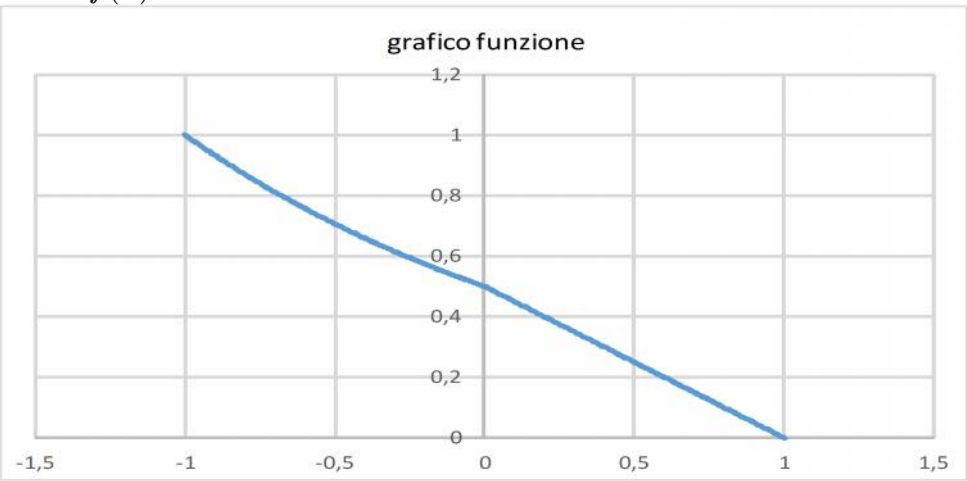
1)

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q)\ o\ (\neg q \Rightarrow p)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V

. La proposizione proposta è una tautologia.

2) Nel primo caso ogni carattere può essere scelto in 62 modi distinti; i possibili codici sono pertanto 62^6. Nel secondo caso i caratteri in posizione dispari possono essere scelti in 10 modi distinti, mentre quelli in posizione pari possono essere scelti in 52 modi distinti; i possibili codici sono pertanto $10^3 \cdot 52^3 = 520^3$.

3) Grafico di $f(x)$.



$f([-1,0]) = [1/2, 1]$; per l'insieme $f^{-1}([1/4,1])$ nota che $f(x) = 1/4$ per $x = 1/2$ e $f(x) = 1$ per $x = -1$, pertanto $f^{-1}([1/4,1]) = [-1, 1/2]$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(x + tg(5x))}{sen\, x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{tg(x+tg(5x))}{x+tg(5x)} \cdot \left(1 + \frac{tg(5x)}{5x} \cdot 5\right)}{\frac{sen\, x}{x}} = \dfrac{1 \cdot 6}{1} = 6;$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-2)^2 - 1}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{((x-2)-1)((x-2)+1)}{x-3} =$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x \not- 3)(x-1)}{x \not- 3} = 2.$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - 6 = +\infty$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, posto $x^4 - 6 > \epsilon$ si ha $x^4 > 6 + \epsilon \Rightarrow x < -\sqrt[4]{6+\epsilon}$, da cui $\delta_\epsilon = \sqrt[4]{6+\epsilon}$, limite verificato.

Compito $\mathbb{A}_3$

1)

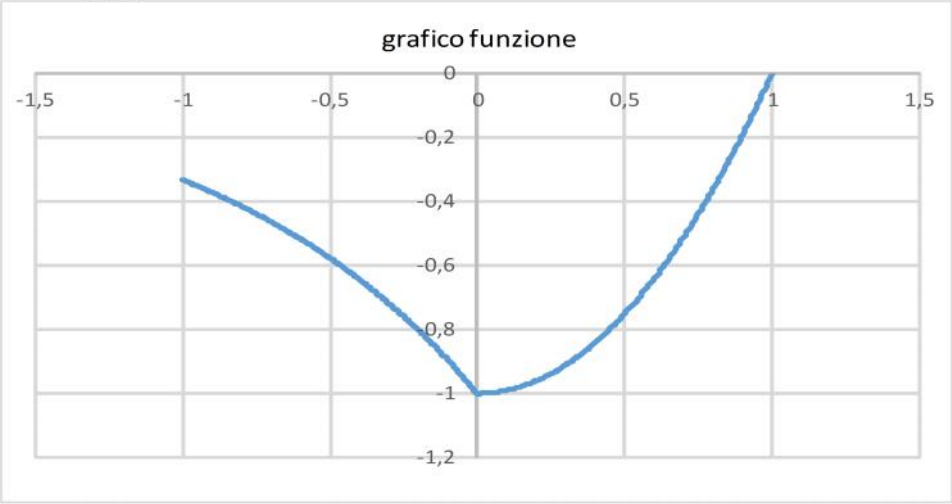
p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$\neg(\neg p \Rightarrow q)$	$p\ e\ \neg(\neg p \Rightarrow q)$
V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F

. La proposizione proposta è una contraddizione.

2) Nel primo caso ogni carattere può essere scelto in 36 modi distinti; i possibili codici sono pertanto 36^6. Nel secondo caso i caratteri in posizione dispari possono essere

scelti in 10 modi distinti, mentre quelli in posizione pari possono essere scelti in 26 modi distinti; i possibili codici sono pertanto $10^3 \cdot 26^3 = 260^3$.

3) Grafico di $f(x)$.



$f([-1,0]) = [-1, -1/3]$; per l'insieme $f^{-1}([-1/5,0])$ nota che $f(x) = -1/5$ per $x = 2\sqrt{5}/5$ e $f(x) = 0$ per $x = 1$, pertanto $f^{-1}([-1/5,0]) = [2\sqrt{5}/5, 1]$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x + sen\, x)}{tg(3x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{sen(x+sen\,x)}{x+sen\,x} \cdot \left(1 + \frac{sen\,x}{x}\right)}{\frac{tg(3x)}{3x} \cdot 3} = \dfrac{1 \cdot 2}{3} = \dfrac{2}{3}$;

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1+x)^2 - 4}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{((1+x)-2)((1+x)+2)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}} = 4.$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^6 - 1 = +\infty$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, posto $x^6 - 1 > \epsilon$ si ha $x^6 > 1 + \epsilon \Rightarrow x > \sqrt[6]{1+\epsilon}$, da cui $\delta_\epsilon = \sqrt[6]{1+\epsilon}$, limite verificato.

Compito A4

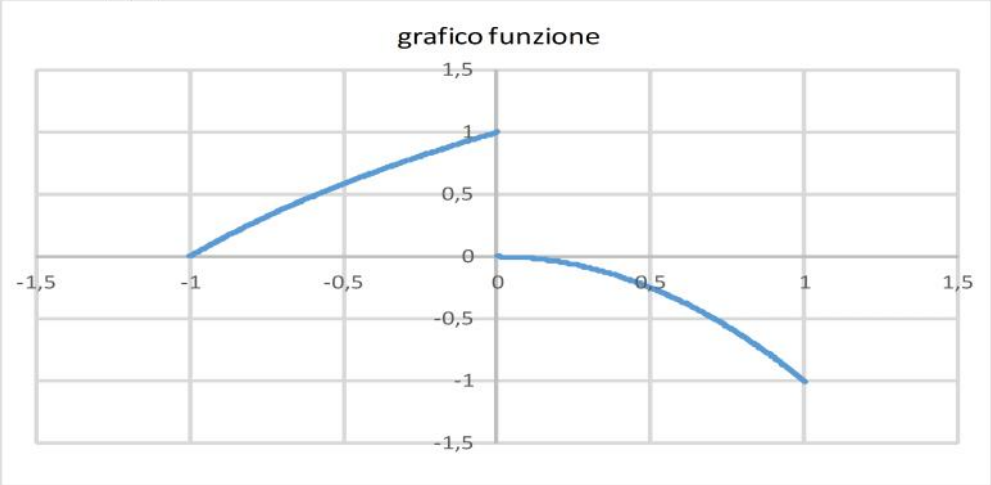
1)

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow p$	$\neg(p \Rightarrow p)$	$\neg q$ e $\neg(p \Rightarrow p)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

. La proposizione proposta è una contraddizione.

2) Nel primo caso ogni carattere può essere scelto in 36 modi distinti; i possibili codici sono pertanto 36^{10}. Nel secondo caso i caratteri in posizione dispari possono essere scelti in 10 modi distinti, mentre quelli in posizione pari possono essere scelti in 26 modi distinti; i possibili codici sono pertanto $10^5 \cdot 26^5 = 260^5$.

3) Grafico di $f(x)$.



$f([-1,0]) = [0,1]$; per l'insieme $f^{-1}(]-1/4,0[)$ nota che $f(x) = -1/4$ per $x = 1/2$, pertanto $f^{-1}(]-1/4,0[) =]0,1/2[$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(2\,x + sen\,x)}{sen\,x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{tg(2\,x+sen\,x)}{2\,x+sen\,x} \cdot \left(2 + \frac{sen\,x}{x}\right)}{\frac{sen\,x}{x}} = \dfrac{1 \cdot 3}{1} = 3;$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(5+x)^2 - 9}{x+2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{((5+x)-3)((5+x)+3)}{x+2} =$

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\cancel{(x+2)}(x+8)}{\cancel{x+2}} = 6.$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2 = +\infty$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$, posto $x^2 - 2 > \epsilon$ si ha $x^2 > 2 + \epsilon \Rightarrow x > \sqrt{2+\epsilon}$, da cui $\delta_\epsilon = \sqrt{2+\epsilon}$, limite verificato.