

Università degli Studi di Siena

Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

4 novembre 2019

Il compito è diviso in 5 esercizi che presentano tutti valutazione pari a 6, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 30; gli studenti che ottengono in questa prova una votazione non inferiore a 18 hanno diritto a 2 punti di bonus per tutte le prove scritte di Matematica Generale nel corrente anno accademico, tempo a disposizione 80 minuti.

Compito A-1

- 1) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: 2 \leq x < 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \geq 7\}$.
Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ e i rispettivi insiemi frontiera $\delta(A \cup B)$ e $\delta(A \cap B)$.
- 2) Un codice di accesso ad una cassetta di sicurezza è formato da 8 caratteri alfanumerici (i primi 4 caratteri vanno scelti fra le 21 lettere dell'alfabeto italiano e i secondi 4 caratteri fra le 10 cifre arabe, inoltre la lettura non riconosce la differenza fra lettere minuscole e maiuscole). Quanti distinti codici si possono formare se i caratteri possono essere scelti liberamente? E quanti distinti codici si possono formare se le lettere possono essere scelte liberamente mentre le cifre devono essere ognuna diversa dalle altre?
- 3) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[-1, 0]$ e
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([-1/2, 1/2])$ e $f(f([-1/2, 1/2]))$.
- 4) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}(x + \operatorname{tg} x)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \operatorname{arctg} x}}{\operatorname{tg} x}$.
- 5) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 3}{4}$.

Compito A-2

- 1) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 8\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^x \leq 8\}$.
Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ e i rispettivi insiemi frontiera $\delta(A \cup B)$ e $\delta(A \cap B)$.
- 2) Un codice di accesso ad una cassetta di sicurezza è formato da 6 caratteri alfanumerici (i primi 3 caratteri vanno scelti fra le 21 lettere dell'alfabeto italiano e i secondi 3 caratteri fra le 10 cifre arabe, inoltre la lettura non riconosce la differenza fra lettere minuscole e maiuscole). Quanti distinti codici si possono formare se i caratteri possono essere scelti liberamente? E quanti distinti codici si possono formare se le lettere devono essere ognuna diversa dalle altre mentre le cifre possono essere scelte liberamente?
- 3) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[0, 1]$ e
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$
. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([-1/2, 1/2])$ e $f(f([-1/2, 1/2]))$.

- 4) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}{1 - \cos(3x)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{\operatorname{tg} x + 4}}{x + \operatorname{sen} x}$.
- 5) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - 4x}{5}$.

Compito A-3

- 1) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 4^x > 3\}$.
Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ e i rispettivi insiemi frontiera $\delta(A \cup B)$ e $\delta(A \cap B)$.
- 2) Un codice di accesso ad una cassetta di sicurezza è formato da 6 caratteri alfanumerici (i primi 3 caratteri vanno scelti fra le 21 lettere dell'alfabeto italiano e i secondi 3 caratteri fra le 10 cifre arabe, inoltre la lettura riconosce la differenza fra lettere minuscole e maiuscole). Quanti distinti codici si possono formare se i caratteri possono essere scelti liberamente? E quanti distinti codici si possono formare se sia le lettere che le cifre devono essere ognuna diversa dalle altre?
- 3) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[0, 1]$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$
. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([-1/3, 1/3])$ e $f(f([-1/3, 1/3]))$.
- 4) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)}{1 - \cos^2 x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{sen}(4x)}$.
- 5) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x + 5}{6}$.

Compito A-4

- 1) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x \leq 15\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: 5^x < 25\}$.
Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ e i rispettivi insiemi frontiera $\delta(A \cup B)$ e $\delta(A \cap B)$.
- 2) Un codice di accesso ad una cassetta di sicurezza è formato da 10 caratteri alfanumerici (i primi 5 caratteri vanno scelti fra le 21 lettere dell'alfabeto italiano e i secondi 5 caratteri fra le 10 cifre arabe, inoltre la lettura riconosce la differenza fra lettere minuscole e maiuscole). Quanti distinti codici si possono formare se i caratteri possono essere scelti liberamente? E quanti distinti codici si possono formare se le lettere possono essere scelte liberamente mentre le cifre devono essere ognuna diversa dalle altre?
- 3) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[-1, 1]$ e

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ -2^{x-1} & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$
. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([-1/4, 1/4])$ e $f(f([-1/4, 1/4]))$.
- 4) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{sen}^2 x)}{1 - \cos(3x)}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x} - 1}{\operatorname{sen} x}$.
- 5) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow -12} \frac{18 + 2x}{3}$.