Università degli Studi di Siena

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

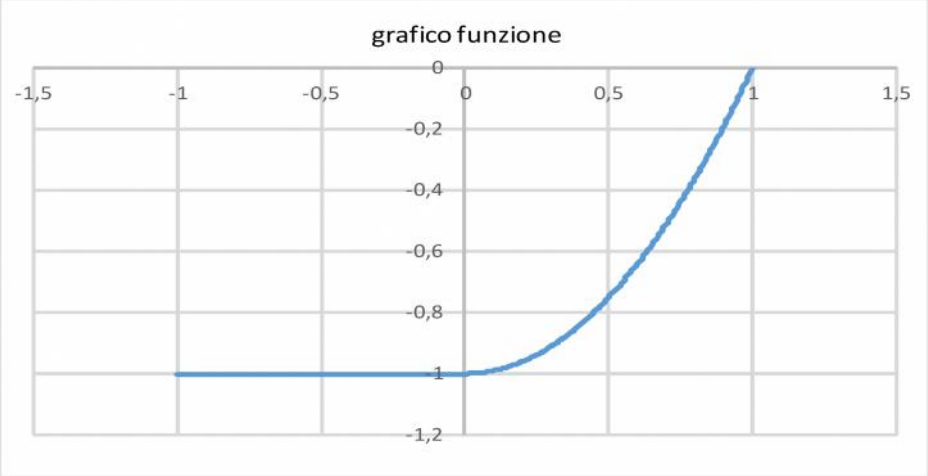
4 novembre 2019

Compito 𝔸

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: 2 \le x < 4\} = [2, 4[$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \ge 7\} = \{x \in \mathbb{R}: x \ge log_2 7\} = [log_2 7, +\infty[$. Dato che $2 < log_2 7 < 4$ si ha $A \cup B = [2, +\infty[$, $A \cap B = [log_2 7, 4[$, $\delta(A \cup B) = \{2\}$ e $\delta(A \cap B) = \{log_2 7, 4\}$.

2) Nel primo caso ognuno dei primi 4 caratteri può essere scelto in 21 modi distinti e ognuno dei secondi 4 caratteri può essere scelto in 10 modi distinti; i possibili codici sono pertanto $21^4 \cdot 10^4 = 210^4$. Nel secondo caso per la scelta delle lettere abbiamo ancora 21^4 modi distinti, mentre per le cifre i possibili modi di scelta sono $\frac{10!}{(10-4)!}$; i possibili codici sono pertanto $21^4 \cdot \frac{10!}{6!}$.

3) Grafico di $f(x)$.



La funzione è monotona crescente, $f(-1/2) = -1$, $f(1/2) = -3/4$, segue che $f([-1/2, 1/2]) = [-1, -3/4]$; $f(f([-1/2, 1/2])) = f([-1, -3/4]) = \{-1\}$ dato che $f(-1) = f(-3/4) = -1$ e la funzione è monotona crescente.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos\, x}{tg(x + tg\, x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1-cos\, x}{x^2} \cdot x}{\frac{tg(x+tg\, x)}{x+tg\, x} \cdot \left(1 + \frac{tg\, x}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0}{1 \cdot 2} = 0$;

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - arctg\, x}}{tg\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - arctg\, x}}{tg\, x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - arctg\, x}}{1 + \sqrt{1 - arctg\, x}} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 - arctg\, x)}{tg\, x\left(1 + \sqrt{1 - arctg\, x}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{arctg\, x}{x}}{\frac{tg\, x}{x}\left(1 + \sqrt{1 - arctg\, x}\right)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$.

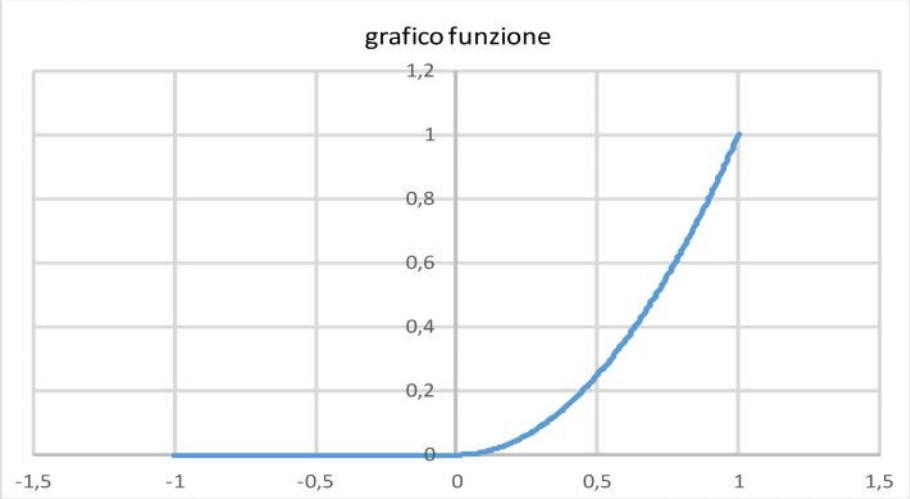
5) $\lim_{x \to 3} \frac{2x - 3}{4} = \frac{3}{4}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{2x-3}{4} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{2x-6}{4}\right| = \frac{1}{2}|x - 3|$, posto $\frac{1}{2}|x - 3| < \epsilon$ risulta $|x - 3| < 2\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = 2\epsilon$, limite verificato.

Compito $\mathbb{A}_2$

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 8\} =]0, 8[$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq log_3 8\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 3\,log_3 2\} =]-\infty, 3\,log_3 2]$. Dato che $0 < 3\,log_3 2 < 8$ si ha $A \cup B =]-\infty, 8[$, $A \cap B =]0, 3\,log_3 2]$, $\delta(A \cup B) = \{8\}$ e $\delta(A \cap B) = \{0, 3\,log_3 2\}$.

2) Nel primo caso ognuno dei primi 3 caratteri può essere scelto in 21 modi distinti e ognuno dei secondi 3 caratteri può essere scelto in 10 modi distinti; i possibili codici sono pertanto $21^3 \cdot 10^3 = 210^3$. Nel secondo caso per la scelta delle cifre abbiamo ancora 10^3 modi distinti, mentre per le lettere i possibili modi di scelta sono $\frac{21!}{(21-3)!}$; i possibili codici sono pertanto $10^3 \cdot \frac{21!}{18!}$.

3) Grafico di $f(x)$.



La funzione è monotona crescente, $f(-1/2) = 0$, $f(1/2) = 1/4$, segue che $f([-1/2, 1/2]) = [0, 1/4]$; $f(f([-1/2, 1/2])) = f([0, 1/4]) = [0, 1/16]$ dato che $f(0) = 0$, $f(1/4) = 1/16$ e la funzione è monotona crescente.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{tg^2(tg\,x)}{1 - cos(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{tg(tg\,x)}{tg\,x}\right)^2 \cdot \left(\frac{tg\,x}{x}\right)^2}{\frac{1-cos(3x)}{9x^2} \cdot 9} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 9} = \frac{2}{9}$;

$\lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{tg\,x + 4}}{x + sen\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - \sqrt{tg\,x + 4}}{x + sen\,x} \cdot \frac{2 + \sqrt{tg\,x + 4}}{2 + \sqrt{tg\,x + 4}} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{4 - (tg\,x + 4)}{(x + sen\,x)\left(2 + \sqrt{tg\,x + 4}\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{tg\,x}{x}}{\left(1 + \frac{sen\,x}{x}\right)\left(2 + \sqrt{tg\,x + 4}\right)} =$

$\frac{-1}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{8}$.

5) $\lim_{x \to 2} \frac{2 - 4x}{5} = -\frac{6}{5}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{2 - 4x}{5} + \frac{6}{5}\right| = \left|\frac{4x - 8}{5}\right| = \frac{4}{5}|x - 2|$, posto $\frac{4}{5}|x - 2| < \epsilon$ risulta $|x - 2| < \frac{5\epsilon}{4}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{5\epsilon}{4}$, limite verificato.

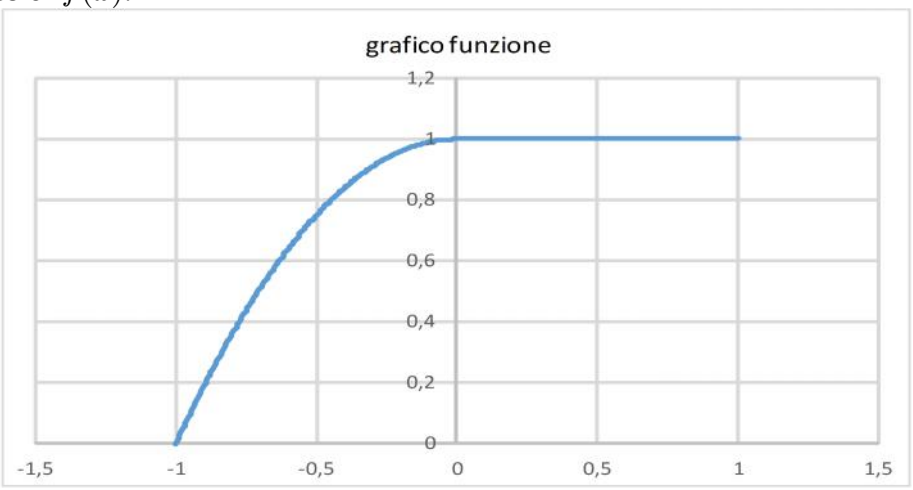
Compito $\mathbb{A}_3$

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: -4 \leq x \leq 4\} = [-4, 4]$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 4^x > 3\} =$

$\{x \in \mathbb{R}: x > log_4 3\} =]log_4 3, +\infty[$. Dato che $-4 < log_4 3 < 4$ si ha $A \cup B = [-4, +\infty[$, $A \cap B =]log_4 3, 4]$, $\delta(A \cup B) = \{-4\}$ e $\delta(A \cap B) = \{log_4 3, 4\}$.

2) Nel primo caso ognuno dei primi 3 caratteri può essere scelto in 42 modi distinti e ognuno dei secondi 3 caratteri può essere scelto in 10 modi distinti; i possibili codici sono pertanto $42^3 \cdot 10^3 = 420^3$. Nel secondo caso per la scelta delle lettere abbiamo $\frac{42!}{(42-3)!}$ modi distinti, mentre per le cifre i possibili modi di scelta sono $\frac{10!}{(10-3)!}$; i possibili codici sono pertanto $\frac{42!}{39!} \cdot \frac{10!}{7!}$.

3) Grafico di $f(x)$.



La funzione è monotona crescente, $f(-1/3) = 8/9$, $f(1/3) = 1$, segue che $f([-1/3, 1/3]) = [8/9, 1]$; $f(f([-1/3, 1/3])) = f([8/9, 1]) = \{1\}$ dato che $f(8/9) = f(1) = 1$ e la funzione è monotona crescente.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(sen\,x)}{1 - cos^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen^2(sen\,x)}{sen^2 x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{sen(sen\,x)}{sen\,x}\right)^2 = 1$;

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - tg\,x} - 1}{sen(4x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - tg\,x} - 1}{sen(4x)} \cdot \frac{\sqrt{1 - tg\,x} + 1}{\sqrt{1 - tg\,x} + 1} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - tg\,x - 1}{(sen(4x))\left(\sqrt{1 - tg\,x} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{tg\,x}{x}}{\frac{sen(4x)}{4x} \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{1 - tg\,x} + 1\right)} =$

$\frac{-1}{1 \cdot 4 \cdot 2} = -\frac{1}{8}$.

5) $\lim_{x \to -9} \frac{x+5}{6} = -\frac{2}{3}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{x+5}{6} + \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{x+9}{6}\right| = \frac{1}{6}|x+9|$, posto $\frac{1}{6}|x+9| < \epsilon$ risulta $|x+9| < 6\epsilon$ da cui $\delta_\epsilon = 6\epsilon$, limite verificato.

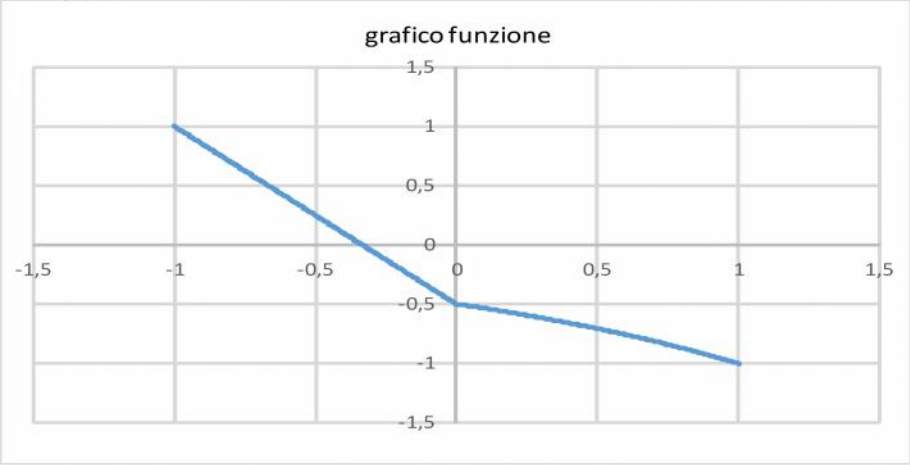
Compito A_4

1) $A = \{x \in \mathbb{R}: -2 < x \leq 15\} =]-2, 15]$, $B = \{x \in \mathbb{R}: 5^x < 25\} = \{x \in \mathbb{R}: x < log_5 25\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 2\} =]-\infty, 2]$. $A \cup B =]-\infty, 15]$, $A \cap B =]-2, 2]$, $\delta(A \cup B) = \{15\}$ e $\delta(A \cap B) = \{-2, 2\}$.

2) Nel primo caso ognuno dei primi 5 caratteri può essere scelto in 42 modi distinti e ognuno dei secondi 5 caratteri può essere scelto in 10 modi distinti; i possibili codici

sono pertanto $42^5 \cdot 10^5 = 420^5$. Nel secondo caso per la scelta delle lettere abbiamo ancora 42^5 modi distinti, mentre per le cifre i possibili modi di scelta sono $\frac{10!}{(10-5)!}$; i possibili codici sono pertanto $42^5 \cdot \frac{10!}{5!}$.

3) Grafico di $f(x)$.



La funzione è monotona decrescente, $f(-1/4) = -1/8$, $f(1/4) = -\sqrt[4]{2}/2$, segue che $f([-1/4, 1/4]) = [-\sqrt[4]{2}/2, -1/8]$; $f(f([-1/4, 1/4])) = f([-\sqrt[4]{2}/2, -1/8]) = \left[-5/16, \left(3\sqrt[4]{2} - 2\right)/4\right]$ dato che $f(-\sqrt[4]{2}/2) = \left(3\sqrt[4]{2} - 2\right)/4$, $f(-1/8) = -5/16$ e la funzione è monotona decrescente.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{tg(sen^2 x)}{1 - cos(3x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{tg(sen^2 x)}{sen^2 x} \cdot \left(\frac{sen\, x}{x}\right)^2}{\frac{1-cos(3x)}{9x^2} \cdot 9} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 9} = \frac{2}{9}$;

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-2x} - 1}{sen\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-2x} - 1}{sen\, x} \cdot \frac{\sqrt{1-2x} + 1}{\sqrt{1-2x} + 1} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x - 1}{sen\, x\left(\sqrt{1-2x} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-2}{\frac{sen\, x}{x}\left(\sqrt{1-2x} + 1\right)} =$

$\frac{-2}{1 \cdot 2} = -1$.

5) $\lim_{x \to -12} \frac{18 + 2x}{3} = -2$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\frac{18 + 2x}{3} + 2\right| = \left|\frac{2x + 24}{3}\right| = \frac{2}{3}|x + 12|$, posto $\frac{2}{3}|x + 12| < \epsilon$ risulta $|x + 12| < \frac{3\epsilon}{2}$ da cui $\delta_\epsilon = \frac{3\epsilon}{2}$, limite verificato.