Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)
8 gennaio 2020

Compito $\mathbb{K}1$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le righe nelle quali almeno una fra p e q è falsa:

p	q	$\neg p$	$\neg(p\ e\ q)$	$q\ o\ \neg p$	$\neg(p\ e\ q) \Rightarrow (q\ o\ \neg p)$
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

2) Sia per i numeri palindromi a 7 cifre, sia per quelli ad 8 cifre, una volta che sono state determinate le prime 4 cifre, le restanti seguono di conseguenza; pertanto in entrambi i casi si hanno 9 modi distinti per la scelta della prima cifra e 10 modi distinti per la scelta di ognuna delle 3 cifre che seguono la prima. I numeri palindromi richiesti sono quindi $2 \cdot 9 \cdot 10^3 = 18.000$.

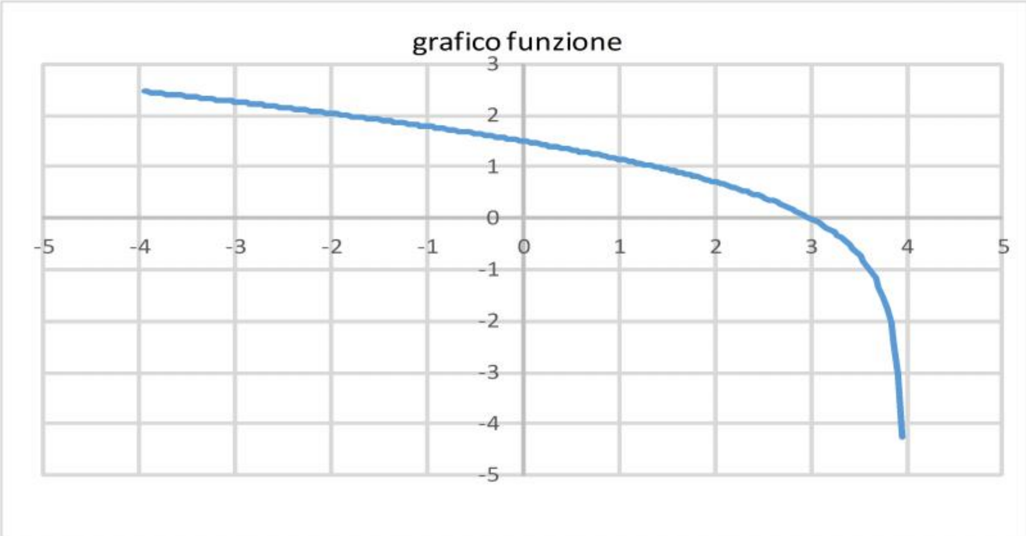
3) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x^2 - 5 = -4$;
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} ax + b = -a + b$;
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ax + b = a + b$;
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 4 = 4$.
La funzione è continua su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $-a + b = -4$ e $a + b = 4$, da cui $a = 4$ e $b = 0$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{log\sqrt[4]{1 - sen\,x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1 - sen\,x)^{\frac{1}{4}}}{x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{log(1 - sen\,x)}{sen\,x} \cdot \frac{sen\,x}{x} = \frac{1}{4} \cdot (-1) \cdot 1 = -\frac{1}{4}.$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^3\,log\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x^2\,log\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$$
$$(\to +\infty) \cdot \left(\to log\,e^2 = 2\right) = +\infty.$$

5) $C.E.$: $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$; $C.E. =]-\infty, 4[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\dfrac{3 - x}{\sqrt{4 - x}} > 0 \Rightarrow 3 - x > 0$ ovvero $x < 3$. Funzione positiva in $]-\infty, 3[$, negativa in $]3, 4[$. $y = 0$ se $\dfrac{3 - x}{\sqrt{4 - x}} = 0 \Rightarrow x = 3$; intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(3, 0)$. $y(0) = \dfrac{3}{2}$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - x}{\sqrt{4 - x}} = +\infty$; perché $\sqrt{4 - x} = o(3 - x)$ per $x \to -\infty$;
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{3-x}{\sqrt{4-x}}}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{3}{x} - 1}{\sqrt{4 - x}} = \dfrac{(\to -1)}{(\to +\infty)} = 0$; no $AObl$;
$\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3 - x}{\sqrt{4 - x}} = \dfrac{(\to -1)}{(\to 0^+)} = -\infty$; AV di equazione $x = 4$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{-1\cdot\sqrt{4-x}-(3-x)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{\left(\sqrt{4-x}\right)^2} = \dfrac{x-5}{2\left(\sqrt{4-x}\right)^3}$.

$y' < 0,\ \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente decrescente.
Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale insieme alla stretta decrescenza e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è concava.
Grafico:



6) $\int \left(x^2 - 8\sqrt[5]{x} - 3^x\right)\,dx = \int \left(x^2 - 8x^{\frac{1}{5}} - 3^x\right)\,dx =$
$\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{20}{3}x^{\frac{6}{5}} - \dfrac{3^x}{log\,3} + k = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{20}{3}x\sqrt[5]{x} - 3^x log_3\, e + k.$

7) Il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nel punto x_0, di conseguenza per determinare x_0 è necessario risolvere l'equazione $y'(x_0) = 7$ con $y'(x) = -4x - 1$; posto $-4x_0 - 1 = 7$ si ha $x_0 = -2$. Per l'ordinata y_0 è sufficiente sostituire x_0 in una delle due equazioni: $y_0 = 7x_0 + 8 = -6$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_w, f'_z)$:

$$f'_x = -\frac{w}{2\sqrt{x\cdot w}}; \qquad f'_y = z(sen\,y)^{z-1}\cdot cos\,y;$$

$$f'_w = -\frac{x}{2\sqrt{x\cdot w}}; \qquad f'_z = (sen\,y)^z\cdot log(sen\,y).$$

Compito $\mathbb{K}2$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le righe nelle quali almeno una fra p e q è falsa:

p	q	$\neg p$	$p\ o\ q$	$\neg(q\ e\ \neg p)$	$(p\ o\ q) \Rightarrow \neg(q\ e\ \neg p)$
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	V

2) Sia per i numeri palindromi a 5 cifre, sia per quelli a 6 cifre, una volta che sono state determinate le prime 3 cifre, le restanti seguono di conseguenza; pertanto in entrambi i casi si hanno 9 modi distinti per la scelta della prima cifra e 10 modi distinti per la

scelta di ognuna delle 2 cifre che seguono la prima. I numeri palindromi richiesti sono quindi $2 \cdot 9 \cdot 10^2 = 1.800$.

3) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} -6 = -6$;

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} ax+b = -a+b$;

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax+b = a+b$;

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2+1 = 2$.

La funzione è continua su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $-a+b = -6$ e $a+b=2$, da cui $a=4$ e $b=-2$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{log\sqrt{1+tg(3x)}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1+tg(3x))^{\frac{1}{2}}}{x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{log(1+tg(3x))}{tg(3x)} \cdot \frac{tg(3x)}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x\, log\left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(1 + \frac{(-2)}{x}\right)^x = log\, e^{-2} = -2.$$

5) $C.E.$: $x+4>0 \Rightarrow x > -4$; $C.E. =]-4, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $\frac{x+2}{\sqrt{x+4}} > 0 \Rightarrow x+2>0$ ovvero $x > -2$. Funzione positiva in $]-2, +\infty[$, negativa in $]-4, -2[$. $y=0$ se $\frac{x+2}{\sqrt{x+4}} = 0 \Rightarrow x = -2$; intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(-2, 0)$.

$y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to -4^-} \frac{x+2}{\sqrt{x+4}} = \frac{(\to -2)}{(\to 0^+)} = -\infty;$$ AV di equazione $x = -4$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x+4}} = +\infty;$$ perché $\sqrt{x+4} = o(x+2)$ per $x \to +\infty$;

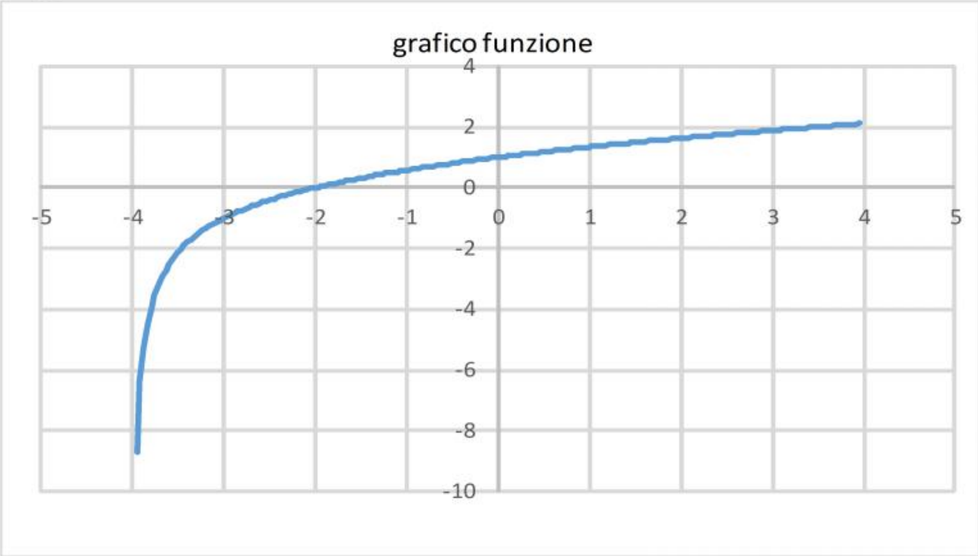
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x+2}{\sqrt{x+4}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{x+4}} = \frac{(\to 1)}{(\to +\infty)} = 0;$$ no $AObl$.

Crescenza e decrescenza: $$y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x+4} - (x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{\left(\sqrt{x+4}\right)^2} = \frac{x+6}{2\left(\sqrt{x+4}\right)^3}.$$

$y' > 0, \forall x \in C.E.$. Funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale insieme alla stretta crescenza e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è concava.

Grafico:



6) $\int \left(x^7 - 3\sqrt[4]{x} + 5^x\right) dx \; = \; \int \left(x^7 - 3x^{\frac{1}{4}} + 5^x\right) dx \; =$

$\frac{x^8}{8} - \frac{12}{5}x^{\frac{5}{4}} + \frac{5^x}{log\,5} \; + k = \frac{x^8}{8} - \frac{12}{5}x\sqrt[4]{x} + 5^x log_5\, e \; + k.$

7) Il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nel punto x_0, di conseguenza per determinare x_0 è necessario risolvere l'equazione $y'(x_0) = 5$ con $y'(x) = 6x - 1$; posto $6x_0 - 1 = 5$ si ha $x_0 = 1$. Per l'ordinata y_0 è sufficiente sostituire x_0 in una delle due equazioni: $y_0 = 5x_0 - 3 = 2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_w, f'_z)$:

$$f'_x = \; z \cdot x^{z-1} \cdot \sqrt{w \cdot cos\, y}\,; \qquad f'_y = \; x^z \cdot \frac{w \cdot (\,-\,sen\, y)}{2\sqrt{w \cdot cos\, y}}\;;$$

$$f'_w = \; x^z \cdot \frac{cos\, y}{2\sqrt{w \cdot cos\, y}}\;; \qquad f'_z = x^z \cdot log\, x \cdot \sqrt{w \cdot cos\, y}.$$

Compito $\mathbb{K}3$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le righe nelle quali almeno una fra p e q è vera:

p	q	$\neg q$	$p\; o\; q$	$(p\; o\; q)\; e\; \neg q$	$((p\; o\; q)\; e\; \neg q) \Rightarrow p$
V	V	F	V	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V

2) Sia per i numeri palindromi a 9 cifre, sia per quelli a 10 cifre, una volta che sono state determinate le prime 5 cifre, le restanti seguono di conseguenza; pertanto in entrambi i casi si hanno 9 modi distinti per la scelta della prima cifra e 10 modi distinti per la scelta di ognuna delle 4 cifre che seguono la prima. I numeri palindromi richiesti sono quindi $2 \cdot 9 \cdot 10^4 = 180.000$.

3) $\lim_{x \to \, -1^-} f(x) \; = \; \lim_{x \to \, -1^-} x^2 - 7 \; = \; -6;$

$\lim_{x \to \, -1^+} f(x) \; = \; \lim_{x \to \, -1^+} ax + b \; = \; -a + b;$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) \; = \; \lim_{x \to 1^-} ax + b \; = a + b;$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2.$

La funzione è continua su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $-a+b=-6$ e $a+b=2$, da cui $a=4$ e $b=-2$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{log\sqrt[5]{1-3x}}{arctg\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1-3x)^{\frac{1}{5}}}{arctg\, x} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{5} \cdot \frac{log(1-3x)}{-3x} \cdot \frac{x}{arctg\, x} \cdot (-3) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-3) = -\frac{3}{5}.$

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \, log\left(1+\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{x^2} = log\, e^4 = 4.$

5) $C.E.$: $x+2>0 \Rightarrow x>-2$; $C.E.=\,]-2,+\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $\frac{2-x}{\sqrt{x+2}}>0 \Rightarrow 2-x>0$ ovvero $x<2$. Funzione positiva in $]-2,2[$, negativa in $]2,+\infty[$. $y=0$ se $\frac{2-x}{\sqrt{x+2}}=0 \Rightarrow x=2$; intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(2,0)$.

$y(0)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -2^+} \frac{2-x}{\sqrt{x+2}} = \frac{(\to 4)}{(\to 0^+)} = +\infty$; AV di equazione $x=-2$.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2-x}{\sqrt{x+2}} = -\infty$; perché $\sqrt{x+2}=o(2-x)$ per $x \to +\infty$;

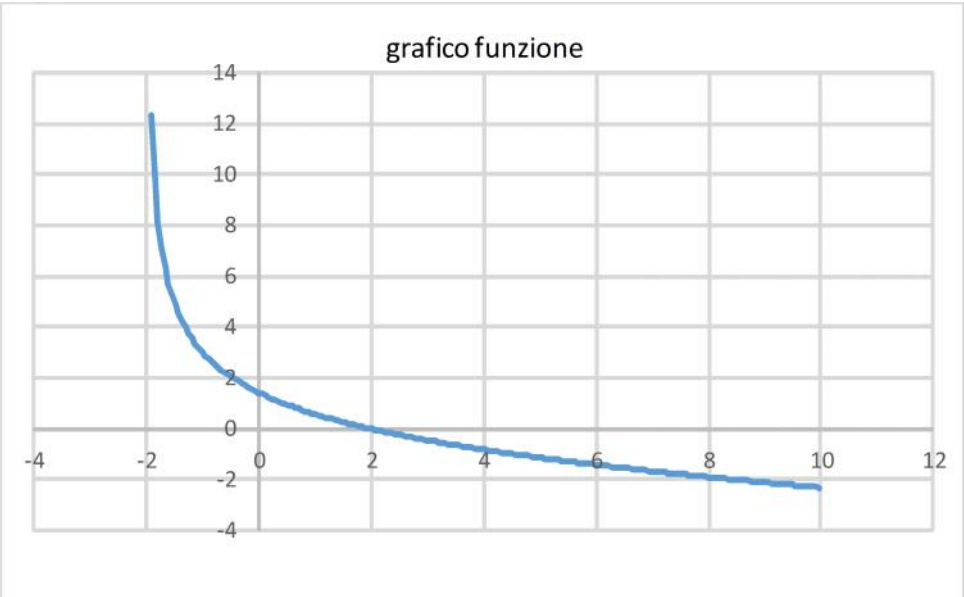
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2-x}{\sqrt{x+2}}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{x+4}} = \frac{(\to -1)}{(\to +\infty)} = 0$; no $AObl$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-1 \cdot \sqrt{x+2}-(2-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\left(\sqrt{x+2}\right)^2} = \frac{-x-6}{2\left(\sqrt{x+2}\right)^3}.$

$y'<0$, $\forall x \in C.E.$. Funzione strettamente decrescente.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale insieme alla stretta decrescenza e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è convessa.

Grafico:



6) $\int \left(x^3 + 5\sqrt[7]{x} + 8^x\right)\, dx \;=\; \int \left(x^3 + 5x^{\frac{1}{7}} + 8^x\right)\, dx \;=$
$\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{35}{8}x^{\frac{8}{7}} + \dfrac{8^x}{log\,8} \;+ k = \;\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{35}{8}x\sqrt[7]{x} + 8^x log_8\, e \;+ k.$

7) Il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nel punto x_0, di conseguenza per determinare x_0 è necessario risolvere l'equazione $y'(x_0) = 9$ con $y'(x) = 4x + 1$; posto $4x_0 + 1 = 9$ si ha $x_0 = 2$. Per l'ordinata y_0 è sufficiente sostituire x_0 in una delle due equazioni: $y_0 = 9x_0 - 8 = 10$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_w, f'_z)$:

$$f'_x = \, y \cdot x^{y-1} \cdot \sqrt{w + sen\, z}\,; \qquad f'_y = \, x^y \cdot log\, x \cdot \sqrt{w + sen\, z}\,;$$

$$f'_w = \, x^y \cdot \frac{1}{2\sqrt{w + sen\, z}}\,; \qquad f'_z = \, x^y \cdot \frac{cos\, z}{2\sqrt{w + sen\, z}}\,.$$

Compito $\mathbb{K}4$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo le righe nelle quali almeno una fra p e q è vera:

p	q	$\neg p$	$\neg(p\ o\ q)$	$q\ e\ \neg(p\ o\ q)$	$\neg p \Rightarrow (q\ e\ \neg(p\ o\ q))$
V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F

2) Sia per i numeri palindromi a 11 cifre, sia per quelli a 12 cifre, una volta che sono state determinate le prime 6 cifre, le restanti seguono di conseguenza; pertanto in entrambi i casi si hanno 9 modi distinti per la scelta della prima cifra e 10 modi distinti per la scelta di ognuna delle 5 cifre che seguono la prima. I numeri palindromi richiesti sono quindi $2 \cdot 9 \cdot 10^5 = 1.800.000$.

3) $\lim\limits_{x \to \,-1^-} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \to \,-1^-} -4 \;=\; -4;$
$\lim\limits_{x \to \,-1^+} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \to \,-1^+} ax + b \;=\; -a + b;$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \to 1^-} ax + b \;= a + b;$
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \;=\; \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 + 3 \;= 4.$
La funzione è continua su tutto l'insieme dei numeri reali se e solo se $-a + b = \,-4$ e $a + b = 4$, da cui $a = 4$ e $b = 0$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log\sqrt{1+x}}{sen\, x} \;=\; \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(1+x)^{\frac{1}{2}}}{sen\, x} \;=\; \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{log(1+x)}{x} \cdot \dfrac{x}{sen\, x} \;=$
$\dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \;=\; \dfrac{1}{2}\,.$

$\lim\limits_{x \to \,+\infty} x^5\, log\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) \;=\; \lim\limits_{x \to \,+\infty} x^3 log\left(1 + \dfrac{(\,-1)}{x^2}\right)^{x^2} \;=$
$(\to \,+\infty) \cdot \,\left(\to log\, e^{-1} \,=\, -1\right) \;=\; -\infty.$

5) $C.E.$: $5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$; $C.E. = \,]-\infty, 5[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\dfrac{x-2}{\sqrt{5-x}} \; > 0 \Rightarrow x - 2 > 0$ ovvero $x > 2$. Funzione positiva in $]2, 5[$, negativa in $]-\infty, 2[$. $y = 0$ se $\dfrac{x-2}{\sqrt{5-x}} \; = 0 \Rightarrow$

$x = 2$; intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(2, 0)$.

$y(0) = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{2}{5}\sqrt{5}.$

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x-2}{\sqrt{5-x}} = -\infty$; perché $\sqrt{5-x} = o(x-2)$ per $x \to -\infty$;

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{x-2}{\sqrt{5-x}}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{5-x}} = \dfrac{(\to 1)}{(\to +\infty)} = 0$; no $AObl$;

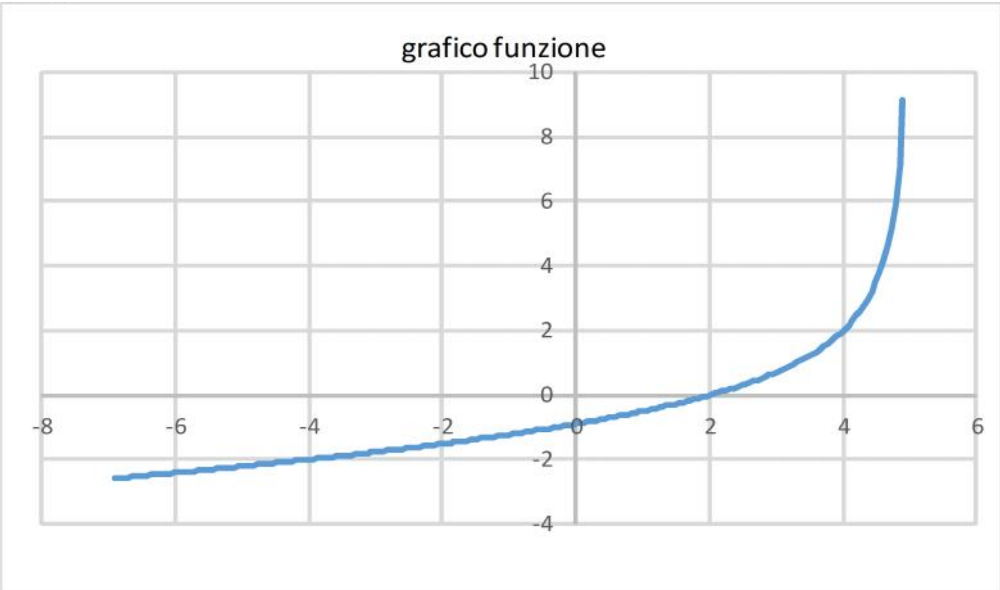
$\lim_{x \to 5^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{5-x}} = \dfrac{(\to 3)}{(\to 0^+)} = +\infty$; AV di equazione $x = 5$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1 \cdot \sqrt{5-x} - (x-2) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}{\left(\sqrt{5-x}\right)^2} = \dfrac{8-x}{2\left(\sqrt{5-x}\right)^3}$.

$y' > 0$, $\forall x \in C.E.$. Funzione strettamente crescente.

Concavità e convessità: l'esistenza dell'asintoto verticale insieme alla stretta crescenza e all'assenza di punti di flesso implica che la funzione è convessa.

Grafico:



6) $\int \left(x^5 - 6\sqrt[3]{x} - 4^x\right) dx = \int \left(x^5 - 6x^{\frac{1}{3}} - 4^x\right) dx =$
$\dfrac{x^6}{6} - \dfrac{9}{2}x^{\frac{4}{3}} - \dfrac{4^x}{\log 4} + k = \dfrac{x^6}{6} - \dfrac{9}{2}x\sqrt[3]{x} - 4^x \log_4 e + k.$

7) Il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nel punto x_0, di conseguenza per determinare x_0 è necessario risolvere l'equazione $y'(x_0) = 10$ con $y'(x) = -8x + 2$; posto $-8x_0 + 2 = 10$ si ha $x_0 = -1$. Per l'ordinata y_0 è sufficiente sostituire x_0 in una delle due equazioni: $y_0 = 10x_0 + 4 = -6$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_w, f'_z)$:

$$f'_x = w \cdot z \cdot x^{w \cdot z - 1}; \qquad f'_y = -\frac{-\,sen\, y}{2\sqrt{\cos y}};$$

$$f'_w = x^{w \cdot z} \cdot \log x \cdot z; \qquad f'_z = x^{w \cdot z} \cdot \log x \cdot w.$$