Università degli Studi di Siena

Facoltà di Economia

Correzione Prova intermedia di Matematica Generale (A.A. 11-12)

19 novembre 2011

Compito $\mathbb{A}$

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$A \cap B$	$\mathcal{C}(A \cap B)$	$\mathcal{C}(C)$	$A \cup B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$		
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$		
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$		

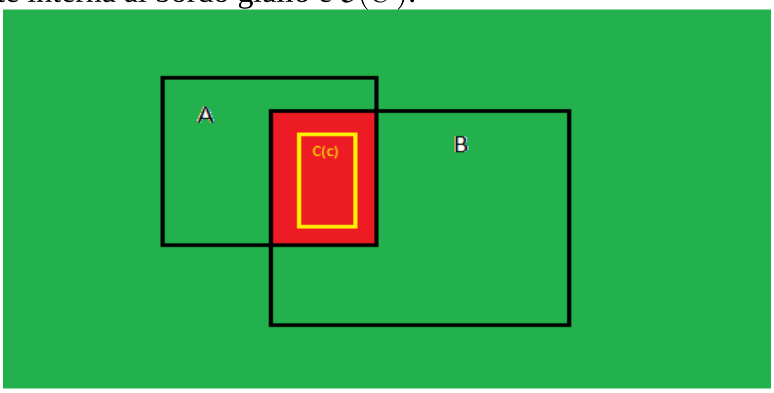
Per l'ipotesi posta $\mathcal{C}(A \cap B) \subseteq C$ dobbiamo escludere le righe ove per $\mathcal{C}(A \cap B)$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme C compare il simbolo $\notin$; nelle restanti cinque righe all'unico caso in cui abbiamo $\in$ per l'insieme $\mathcal{C}(C)$ è associato il simbolo $\in$ per $A \cup B$, pertanto l'inclusione $\mathcal{C}(C) \subseteq A \cup B$ è vera.

II METODO (con il ragionamento logico)

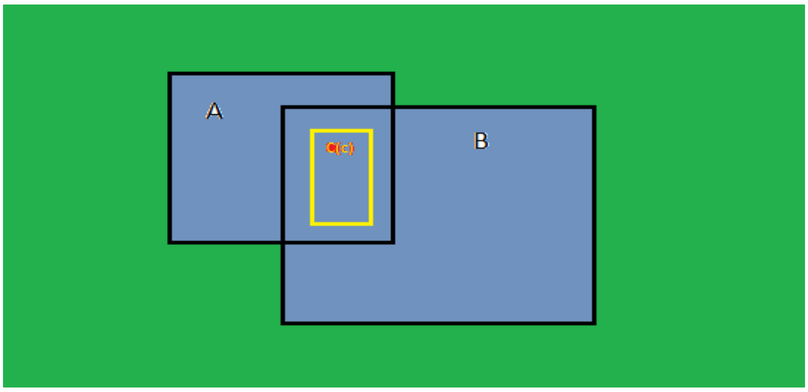
L'inclusione $\mathcal{C}(A \cap B) \subseteq C$ è equivalente alla $\mathcal{C}(C) \subseteq A \cap B$, ma $A \cap B \subseteq A \cup B$, pertanto si avrà $\mathcal{C}(C) \subseteq A \cup B$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $A \cap B$ e con il verde $\mathcal{C}(A \cap B)$, se $\mathcal{C}(A \cap B) \subseteq C$ tutto la parte in verde appartiene all'insieme C e quindi la parte interna al bordo giallo è $\mathcal{C}(C)$.



Nel diagramma seguente indichiamo con il blu $A \cup B$, come è chiaramente evidenziato risulta verificato che $\mathcal{C}(C) \subseteq A \cup B$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione è riflessiva in quanto $\forall(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si ha $x^2 - y^2 = x^2 - y^2$, quindi $\forall(x,y), (x,y)\mathcal{R}(x,y)$.

SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall((x,y),(u,v)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2 - v^2 = x^2 - y^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v)), (x,y)\mathcal{R}(u,v) \Rightarrow (u,v)\mathcal{R}(x,y)$.

ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1,0)$ e $(-1,0)$; per tali coppie vale $1^2 - 0^2 = (-1)^2 - 0^2$, ma $(1,0) \neq (-1,0)$.

TRANSITIVA: la relazione è transitiva in quanto $\forall((x,y),(u,v),(w,z)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 - y^2 = u^2 - v^2$ e $u^2 - v^2 = w^2 - z^2$ discende banalmente l'uguaglianza $x^2 - y^2 = w^2 - z^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v),(w,z)), (x,y)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(w,z)$.

COMPLETA: la relazione è completa in quanto scelta una arbitraria coppia (x,y) risulta: se almeno un elemento della coppia è diverso da 0, $(x,y) \neq (-x,-y)$ e $x^2 - y^2 = (-x)^2 - (-y)^2$, se entrambi gli elementi della coppia sono nulli, $(0,0) \neq (1,1)$ e $0^2 - 0^2 = 1^2 - 1^2$, quindi $\forall(x,y), \exists(u,v) \neq (x,y)\colon (x,y)\mathcal{R}(u,v)$.

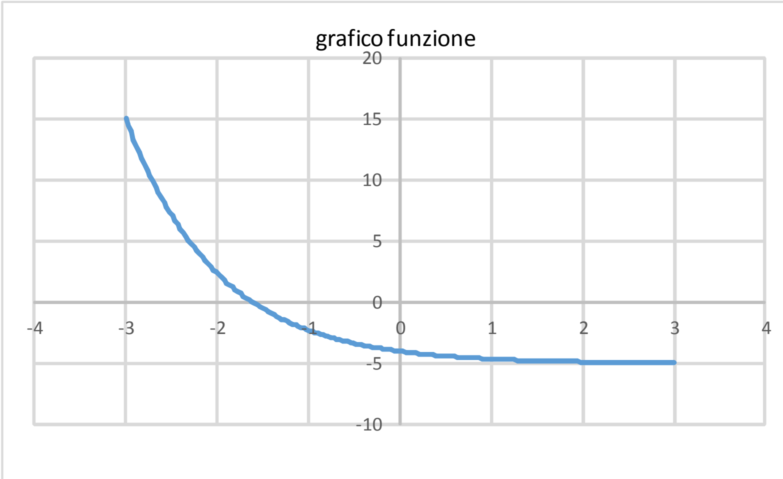
3) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon log_2(x-1) \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x - 1 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 5\} = [5, +\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{2x} \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{2x} \leq 2^3\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 3/2\} =]-\infty, 3/2]$. $A \cap B = \emptyset$; $B/A = B$; $\mathcal{D}(A \cap B) = \emptyset$ e $\delta(B/A) = \delta(B) = \{3/2\}$.

4) $f \circ g = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2^x}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2^x} + 1}$;

$$g \circ f \circ g = g(f(g(x))) = g\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2^x} + 1}\right) = \frac{1}{2^{\sqrt[3]{\frac{1}{2^x}+1}}}.$$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - 3^x}{2^{x+1} - 2} = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{\frac{3^x - 1}{x}}{2 \cdot \frac{2^x - 1}{x}} = -\frac{(\to log\, 3)}{2 \cdot (\to log\, 2)} = -\frac{1}{2} log_2 3 = log_2 \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-2}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x\right)^2 = (\to e^{-2})^2 = e^{-4}$.

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.



Compito $\mathbb{B}$

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$A\cap B$	$\mathcal{C}(C)$	$A\cup B$	$\mathcal{C}(A\cup B)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$		
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$

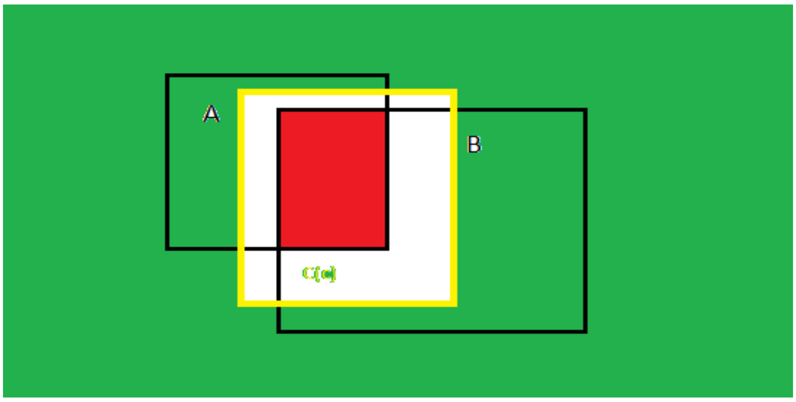
Per l'ipotesi posta $A\cap B\subseteq\mathcal{C}(C)$ dobbiamo escludere le righe ove per $A\cap B$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme $\mathcal{C}(C)$ compare il simbolo $\notin$; nelle restanti sette righe in due casi abbiamo $\in$ per l'insieme C a cui è associato il simbolo $\notin$ per $\mathcal{C}(A\cup B)$, pertanto non possiamo concludere con certezza che l'inclusione $C\subseteq\mathcal{C}(A\cup B)$ è vera.

II METODO (con il ragionamento logico)

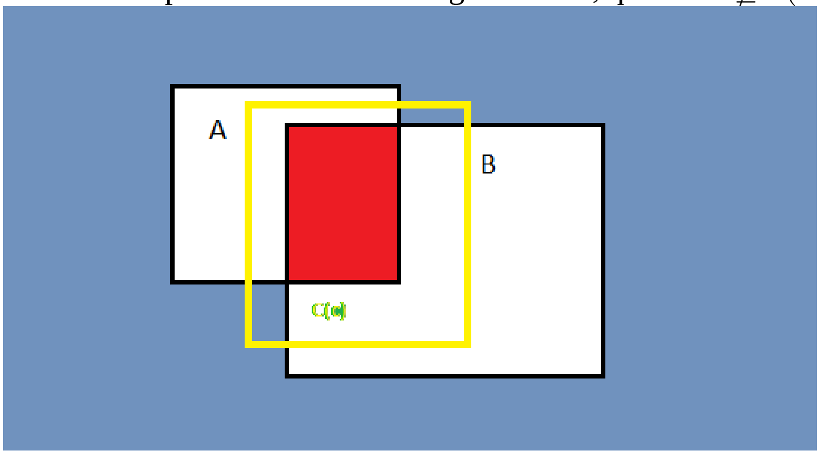
L'inclusione $A\cap B\subseteq\mathcal{C}(C)$ è equivalente alla $C\subseteq\mathcal{C}(A\cap B)$, ma in generale $\mathcal{C}(A\cap B)\nsubseteq\mathcal{C}(A\cup B)$, pertanto non è certo che si abbia $C\subseteq\mathcal{C}(A\cup B)$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $A\cap B$, se $A\cap B\subseteq\mathcal{C}(C)$ la parte interna al bordo giallo è $\mathcal{C}(C)$ e la parte esterna in verde è l'insieme C.



Nel diagramma seguente indichiamo con il blu $\mathcal{C}(A \cup B)$, come è chiaramente evidenziato non tutta la parte esterna al bordo giallo è blu, quindi $C \nsubseteq \mathcal{C}(A \cup B)$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione è riflessiva in quanto $\forall(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si ha $x^2 + y^2 = x^2 + y^2$, quindi $\forall(x,y), (x,y)\mathcal{R}(x,y)$.

SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall((x,y),(u,v)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2 + v^2 = x^2 + y^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v)), (x,y)\mathcal{R}(u,v) \Rightarrow (u,v)\mathcal{R}(x,y)$.

ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1,0)$ e $(-1,0)$; per tali coppie vale $1^2 + 0^2 = (-1)^2 + 0^2$, ma $(1,0) \neq (-1,0)$.

TRANSITIVA: la relazione è transitiva in quanto $\forall((x,y),(u,v),(w,z)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$ e $u^2 + v^2 = w^2 + z^2$ discende banalmente l'uguaglianza $x^2 + y^2 = w^2 + z^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v),(w,z)), (x,y)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(w,z)$.

COMPLETA: la relazione non è completa in quanto scelta la coppia $(0,0)$ non esiste coppia $(u,v) \neq (0,0)$ tale per cui $0^2 + 0^2 = u^2 + v^2$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon log_2(x-1) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x - 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 3\} = [3, +\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^x \leq 8\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^x \leq 2^3\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 3\} =]-\infty, 3]$. $A \cap B = \{3\}$; $B/A =]-\infty, 3[$; $\mathcal{D}(A \cap B) = \emptyset$ e $\delta(B/A) = \{3\}$.

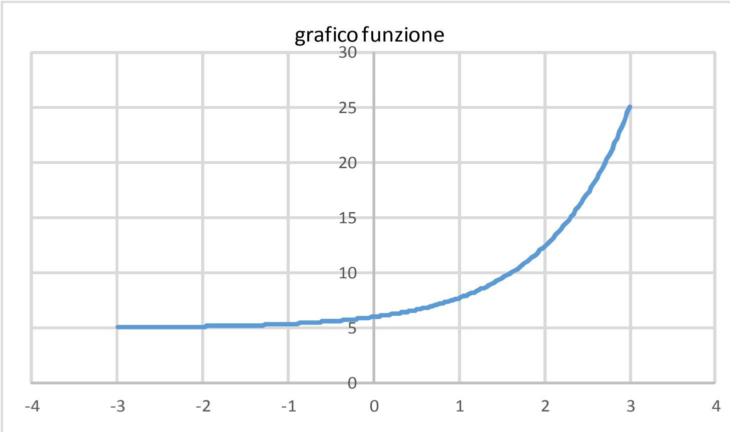
4) $f \circ g = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{2^x}\right) = \sqrt[3]{2^x + 1}$;

$$f \circ g \circ f = (f \circ g)(f(x)) = (f \circ g)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{x} + 1}\right) = \sqrt[3]{2^{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+1}} + 1}.$$

5) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - 3^x}{2^{-x+1} - 2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3^x - 1}{x}}{2 \cdot \frac{2^{-x} - 1}{-x}} = \frac{(\to log\, 3)}{2 \cdot (\to log\, 2)} = \frac{1}{2} log_2 3 = log_2 \sqrt{3}.$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim_{x \to \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{3}} = (\to e^2)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2}{3}}.$$

6) La definizione di limite proposta è quella di $\displaystyle \lim_{x \to -\infty} f(x) = 5$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.



Compito $\mathbb{C}$

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$A \cup B$	$\mathcal{C}(A \cup B)$	$\mathcal{C}(C)$	$A \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$		

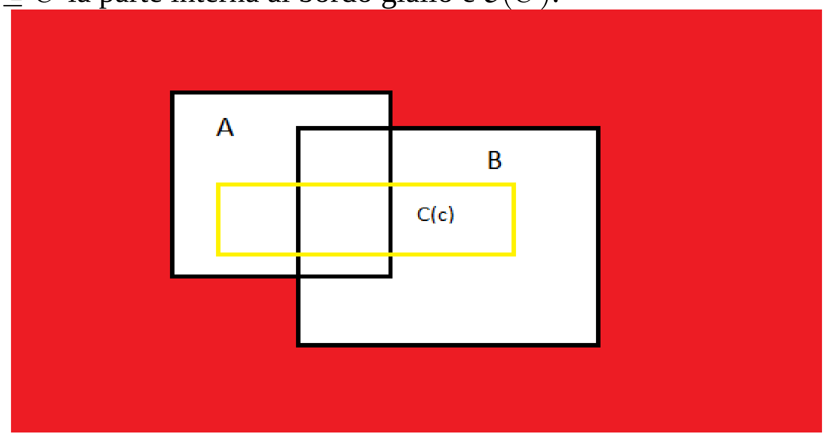
Per l'ipotesi posta $\mathcal{C}(A \cup B) \subseteq C$ dobbiamo escludere le righe ove per $\mathcal{C}(A \cup B)$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme C compare il simbolo $\notin$; nelle restanti sette righe in due casi abbiamo $\in$ per l'insieme $\mathcal{C}(C)$ a cui è associato il simbolo $\notin$ per $A \cap B$, pertanto non possiamo concludere con certezza che l'inclusione $\mathcal{C}(C) \subseteq A \cap B$ è vera.

II METODO (con il ragionamento logico)

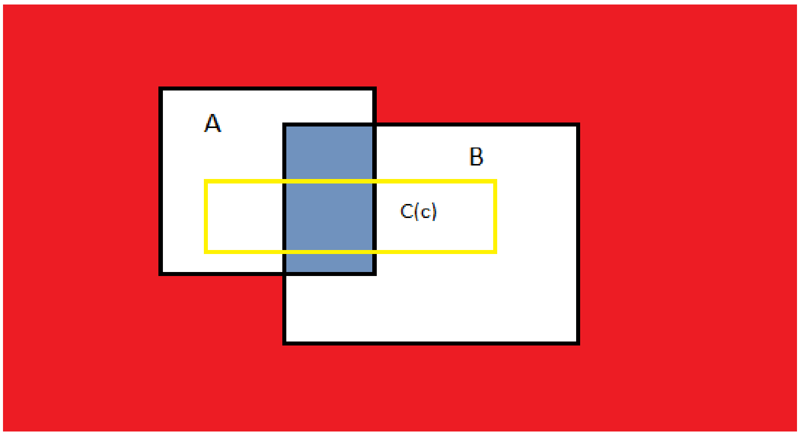
L'inclusione $\mathcal{C}(A \cup B) \subseteq C$ è equivalente alla $\mathcal{C}(C) \subseteq A \cup B$, ma in generale $A \cup B \nsubseteq A \cap B$, pertanto non è certo che si abbia $\mathcal{C}(C) \subseteq A \cap B$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $\mathcal{C}(A \cup B)$, se $\mathcal{C}(A \cup B) \subseteq C$ la parte interna al bordo giallo è $\mathcal{C}(C)$.



Nel diagramma seguente indichiamo con il blu $A \cap B$, come è chiaramente evidenziato non tutta la parte interna al bordo giallo è blu, quindi $\mathcal{C}(C) \nsubseteq A \cap B$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione è riflessiva in quanto $\forall(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si ha $x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^2$, quindi $\forall(x,y), (x,y)\mathcal{R}(x,y)$.

SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall((x,y),(u,v)) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, si ha che da $x^2 \cdot y^2 = u^2 \cdot v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2 \cdot v^2 = x^2 \cdot y^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v)), (x,y)\mathcal{R}(u,v) \Rightarrow (u,v)\mathcal{R}(x,y)$.

ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1,0)$ e $(2,0)$; per tali coppie vale $1^2 \cdot 0^2 = 2^2 \cdot 0^2$, ma $(1,0) \neq (2,0)$.

TRANSITIVA: la relazione è transitiva in quanto $\forall((x,y),(u,v),(w,z)) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, si ha che da $x^2 \cdot y^2 = u^2 \cdot v^2$ e $u^2 \cdot v^2 = w^2 \cdot z^2$ discende banalmente l'uguaglianza $x^2 \cdot y^2 = w^2 \cdot z^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v),(w,z)), (x,y)\mathcal{R}(u,v) \wedge (u,v)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(w,z)$.

COMPLETA: la relazione è completa in quanto scelta una arbitraria coppia (x,y) risulta: se almeno un elemento della coppia è diverso da 0, $(x,y) \neq (-x,-y)$ e $x^2 \cdot y^2 = (-x)^2 \cdot (-y)^2$, se entrambi gli elementi della coppia sono nulli, $(0,0) \neq (0,1)$ e $0^2 \cdot 0^2 = 0^2 \cdot 1^2$, quindi $\forall(x,y), \exists(u,v) \neq (x,y) \colon (x,y)\mathcal{R}(u,v)$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon log_2(x+1) \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x+1 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 3\} = [3,+\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{3x} \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{3x} \leq 2^2\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq 2/3\} =]-\infty, 2/3]$. $A \cap B = \emptyset$; $B/A = B$; $\mathcal{D}(A \cap B) = \emptyset$ e $\delta(B/A) = \delta(B) = \{2/3\}$.

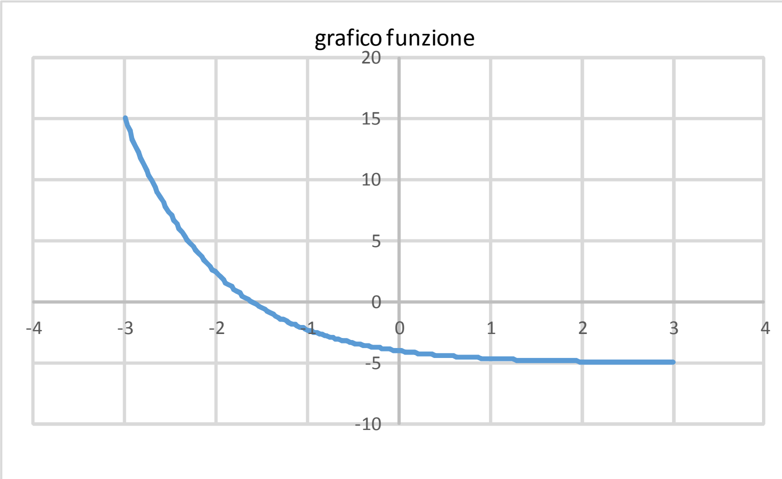
4) $f \circ g = f(g(x)) = f\left(sen\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = \sqrt[5]{\frac{1}{sen\left(\frac{x-1}{x}\right)}+1}$;

$$f \circ f \circ f = f(f(f(x))) = f\left(f\left(\sqrt[5]{\frac{1}{x}+1}\right)\right) = f\left(\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x}+1}}+1}\right) = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[5]{\frac{1}{x}+1}}+1}}+1}.$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-4^x}{2^{3x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{\frac{4^x-1}{x}}{6\cdot\frac{2^{3x}-1}{3x}} = -\frac{(\rightarrow log\,4)}{6\cdot(\rightarrow log\,2)} = -\frac{1}{6}log_2 4 = -\frac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\right)^3 = (\rightarrow e^{-1})^3 = e^{-3}$.

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.



Compito $\mathbb{D}$

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$A\cup B$	$\mathcal{C}(C)$	$A\cap B$	$\mathcal{C}(A\cap B)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$		
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$		
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$		
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$

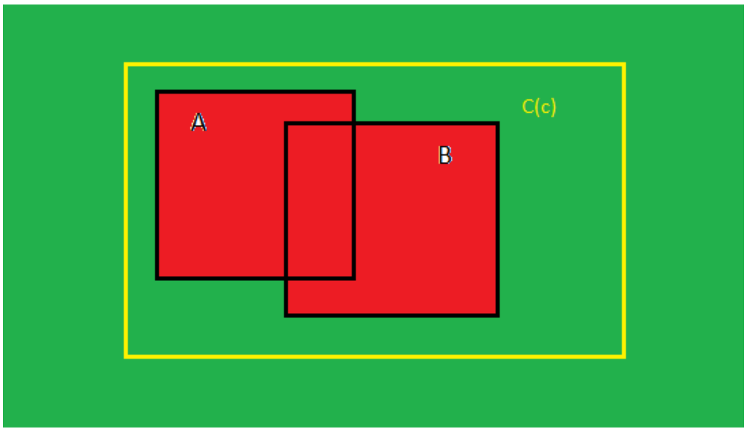
Per l'ipotesi posta $A\cup B\subseteq\mathcal{C}(C)$ dobbiamo escludere le righe ove per $A\cup B$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme $\mathcal{C}(C)$ compare il simbolo $\notin$; nelle restanti cinque righe all'unico caso in cui abbiamo $\in$ per l'insieme C è associato il simbolo $\in$ per $\mathcal{C}(A\cap B)$, pertanto l'inclusione $C\subseteq\mathcal{C}(A\cap B)$ è vera.

II METODO (con il ragionamento logico)

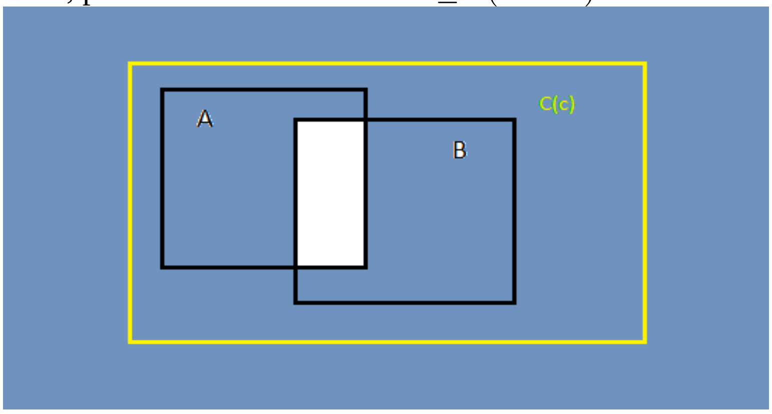
L'inclusione $A\cup B\subseteq\mathcal{C}(C)$ è equivalente alla $C\subseteq\mathcal{C}(A\cup B)$, ma da $A\cap B\subseteq A\cup B$ deriva $\mathcal{C}(A\cup B)\subseteq\mathcal{C}(A\cap B)$, pertanto si avrà $C\subseteq\mathcal{C}(A\cap B)$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $A\cup B$ e con il verde $\mathcal{C}(A\cup B)$, se $A\cup B\subseteq\mathcal{C}(C)$ tutto la parte in rosso appartiene all'insieme $\mathcal{C}(C)$ che è la parte interna al bordo giallo.



Nel diagramma seguente indichiamo con il blu $\mathcal{C}(A \cap B)$, come è chiaramente evidenziato l'insieme C (parte esterna al bordo giallo) risulta tutta contenuta nella parte di colore blu, pertanto è verificato che $C \subseteq \mathcal{C}(A \cap B)$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione è riflessiva in quanto $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si ha $x^2 - x^2 = y^2 - y^2$, quindi $\forall (x, y), (x, y)\mathcal{R}(x, y)$.

SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall ((x, y), (u, v)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 - u^2 = y^2 - v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2 - x^2 = v^2 - y^2$, quindi $\forall ((x, y), (u, v)), (x, y)\mathcal{R}(u, v) \Rightarrow (u, v)\mathcal{R}(x, y)$.

ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1, 1)$ e $(-1, -1)$; per tali coppie vale sia $1^2 - (-1)^2 = 1^2 - (-1)^2$ che $(-1)^2 - 1^2 = (-1)^2 - 1^2$, ma $(1, 1) \neq (-1, -1)$.

TRANSITIVA: la relazione è transitiva in quanto $\forall ((x, y), (u, v), (w, z)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 - u^2 = y^2 - v^2$ e $u^2 - w^2 = v^2 - z^2$ discende banalmente l'uguaglianza $x^2 - w^2 = y^2 - z^2$, quindi $\forall ((x, y), (u, v), (w, z)), (x, y)\mathcal{R}(u, v) \wedge (u, v)\mathcal{R}(w, z) \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(w, z)$.

COMPLETA: la relazione è completa in quanto scelta una arbitraria coppia (x, y) risulta: se almeno un elemento della coppia è diverso da 0, $(x, y) \neq (-x, -y)$ e $x^2 - (-x)^2 = y^2 - (-y)^2$, se entrambi gli elementi della coppia sono nulli, $(0, 0) \neq (1, 1)$ e $0^2 - 1^2 = 0^2 - 1^2$, quindi $\forall (x, y), \exists (u, v) \neq (x, y): (x, y)\mathcal{R}(u, v)$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}: log_2(x - 1) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 3\} = [3, +\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^{2x} > 4\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^{2x} > 2^2\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\} =]1, +\infty[$. $A \cup B = B$; $A/B = \emptyset$; $\delta(A \cup B) = \delta(B) = \{1\}$ e $\mathcal{D}(A/B) = \emptyset$.

4) $g \circ f = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) = sen\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}\right) = sen\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)$;

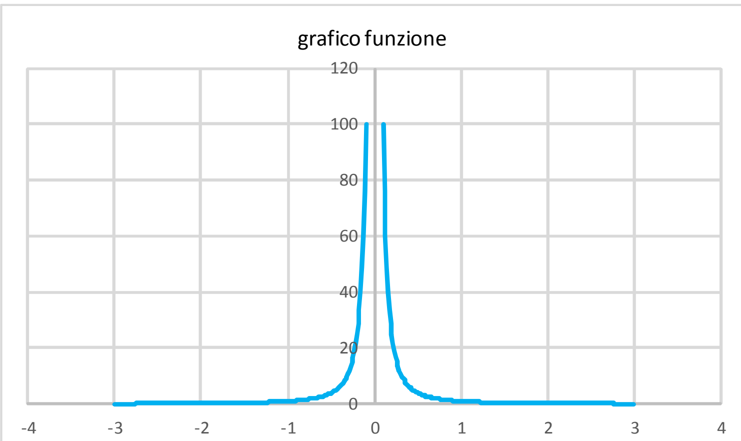
$$f \circ f \circ g = f(f(g(x))) = f\left(f\left(sen\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{sen\left(\frac{x-1}{x}\right)}} + 1\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{sen\left(\frac{x-1}{x}\right)}} + 1}} + 1\,.$$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4^{x+2} - 16}{2^{2x} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} 8 \cdot \frac{\frac{4^x - 1}{x}}{\frac{2^{2x}-1}{2x}} = 8 \cdot \frac{(\to \log 4)}{(\to \log 2)} = 8 \log_2 4 = 16.$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x\right)^3 = (\to e^2)^3 = e^6.$

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.



Compito $\mathbb{E}$

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$\mathcal{C}(B)$	$A \cup \mathcal{C}(B)$	$\mathcal{C}(A)$	$\mathcal{C}(A) \cap B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$		
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$		
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$		

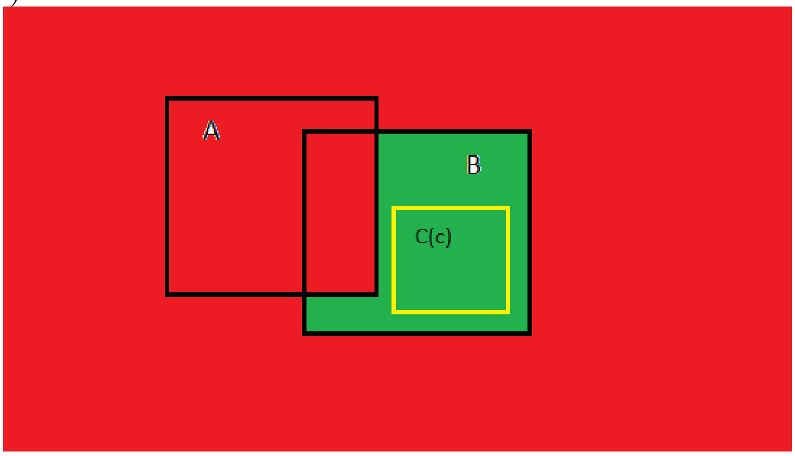
Per l'ipotesi posta $A \cup \mathcal{C}(B) \subseteq C$ dobbiamo escludere le righe ove per $A \cup \mathcal{C}(B)$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme C compare il simbolo $\notin$; nelle restanti cinque righe in tre caso in cui abbiamo $\in$ per l'insieme C è associato il simbolo $\notin$ per $\mathcal{C}(A) \cap B$, pertanto non possiamo concludere con certezza che l'inclusione $C \subseteq \mathcal{C}(A) \cap B$ è vera.

II METODO (con il ragionamento logico)

L'inclusione $A \cup \mathcal{C}(B) \subseteq C$ è equivalente alla $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{C}(A \cup \mathcal{C}(B)) = \mathcal{C}(A) \cap B$, pertanto si può concludere che $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{C}(A) \cap B$ ma non che $C \subseteq \mathcal{C}(A) \cap B$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $A \cup \mathcal{C}(B)$ e con il verde $\mathcal{C}(A) \cap B$, se $A \cup \mathcal{C}(B) \subseteq C$ tutto la parte in rosso appartiene all'insieme C e quindi la parte interna al bordo giallo è $\mathcal{C}(C)$, come è chiaramente evidenziato non risulta verificato che $C \subseteq \mathcal{C}(A) \cap B$, ma è invece verificata l'inclusione $\mathcal{C}(C) \subseteq \mathcal{C}(A) \cap B$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione non è riflessiva, per dimostrarlo basta considerare la coppia $(1,0)$; per tale coppia non vale $1^2 + 1^2 = 0^2 + 0^2$.

SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall((x,y),(u,v)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 + u^2 = y^2 + v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2 + x^2 = v^2 + y^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v)), (x,y)\mathcal{R}(u,v) \Rightarrow (u,v)\mathcal{R}(x,y)$.

ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1,1)$ e $(0,0)$; per tali coppie vale sia $1^2 + 0^2 = 1^2 + 0^2$ che $0^2 + 1^2 = 0^2 + 1^2$, ma $(1,1) \neq (0,0)$.

TRANSITIVA: la relazione non è transitiva, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$; per tali coppie vale sia $1^2 + 0^2 = 0^2 + 1^2$ che $0^2 + 1^2 = 1^2 + 0^2$, ma $1^2 + 1^2 \neq 0^2 + 0^2$.

COMPLETA: la relazione è completa in quanto scelta una arbitraria coppia (x,y) risulta: se $x + y \neq 0$, $(x,y) \neq (-y,-x)$ e $x^2 + (-y)^2 = y^2 + (-x)^2$, se $x + y = 0$, $(x,y) \neq (1,1)$ e $x^2 + 1^2 = y^2 + 1^2$, quindi $\forall(x,y), \exists(u,v) \neq (x,y)$: $(x,y)\mathcal{R}(u,v)$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon log_2(x+2) \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x + 2 \geq 8\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 6\} = [6, +\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{x-1} > 4\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{x-1} > 2^2\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x > 3\} =]3, +\infty[$. $A \cup B = B$; $A/B = \emptyset$; $\delta(A \cup B) = \delta(B) = \{3\}$ e $\mathcal{D}(A/B) = \emptyset$.

4) $$g \circ f = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)^2 + 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1};$$

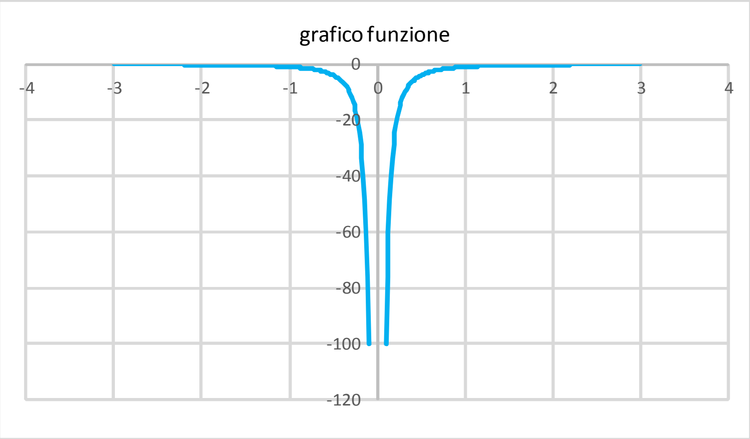
$$f \circ g \circ f = f(g(f(x))) = f\left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)^2 + 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)^2 + 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1}}} + 1 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{sen\left(\frac{x-1}{x}\right)}}+1}}+1\,.$$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{4^{x+1}-4}{1-2^{3x}} = \lim_{x\to 0} -\frac{4}{3}\cdot\frac{\frac{4^x-1}{x}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{(\to log\,4)}{(\to log\,2)} = -\frac{4}{3}log_2 4 = -\frac{8}{3}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x}\right)^{-2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}\right)^{-2} = (\to e^{-3})^{-2} = e^{6}.$$

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.



Compito $\mathbb{F}$

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$\mathcal{C}(A)$	$\mathcal{C}(A)\cup B$	$\mathcal{C}(B)$	$A\cap\mathcal{C}(B)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$		
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$		
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$		

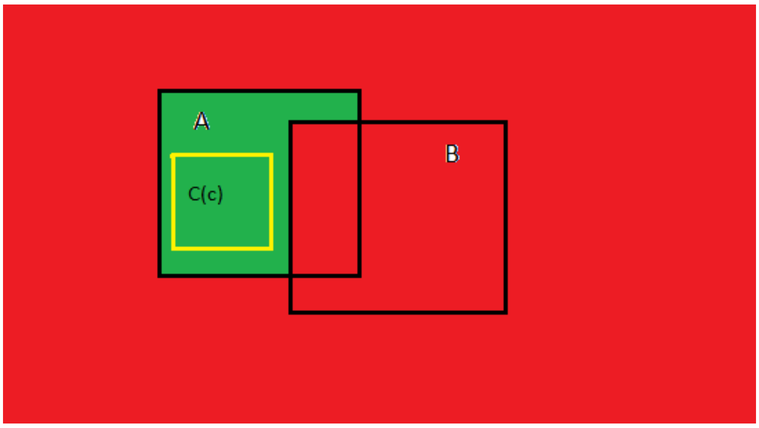
Per l'ipotesi posta $\mathcal{C}(A)\cup B\subseteq C$ dobbiamo escludere le righe ove per $\mathcal{C}(A)\cup B$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme C compare il simbolo $\notin$; nelle restanti cinque righe troviamo un caso in cui abbiamo i simboli $\notin$ per l'insieme C e $\in$ per $A\cap\mathcal{C}(B)$, pertanto non possiamo concludere che in generale vale l'inclusione $C\subseteq A\cap\mathcal{C}(B)$.

II METODO (con il ragionamento logico)

L'inclusione $\mathcal{C}(A)\cup B\subseteq C$ è equivalente alla $\mathcal{C}(C)\subseteq\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)\cup B) = A\cap\mathcal{C}(B)$, pertanto si può concludere che $\mathcal{C}(C)\subseteq A\cap\mathcal{C}(B)$ ma non che $C\subseteq A\cap\mathcal{C}(B)$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $\mathcal{C}(A)\cup B$ e con il verde $A\cap\mathcal{C}(B)$, se $\mathcal{C}(A)\cup B\subseteq C$ tutto la parte in rosso appartiene all'insieme C e quindi la parte interna al bordo giallo è $\mathcal{C}(C)$, come è chiaramente evidenziato non risulta verificato che $C\subseteq A\cap\mathcal{C}(B)$, ma è invece verificata l'inclusione $\mathcal{C}(C)\subseteq A\cap\mathcal{C}(B)$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione non è riflessiva, per dimostrarlo basta considerare la coppia $(1, 0)$; per tale coppia non vale $1^2 \cdot 1^2 = 0^2 \cdot 0^2$.
SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall((x, y), (u, v)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 \cdot u^2 = y^2 \cdot v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2 \cdot x^2 = v^2 \cdot y^2$, quindi $\forall((x, y), (u, v)), (x, y)\mathcal{R}(u, v) \Rightarrow (u, v)\mathcal{R}(x, y)$.
ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1, 1)$ e $(0, 0)$; per tali coppie vale sia $1^2 \cdot 0^2 = 1^2 \cdot 0^2$ che $0^2 \cdot 1^2 = 0^2 \cdot 1^2$, ma $(1, 1) \neq (0, 0)$.
TRANSITIVA: la relazione non è transitiva, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1, 0)$, $(0, 0)$ e $(1, 0)$; per tali coppie vale sia $1^2 \cdot 0^2 = 0^2 \cdot 0^2$ che $0^2 \cdot 1^2 = 0^2 \cdot 0^2$, ma $1^2 \cdot 1^2 \neq 0^2 \cdot 0^2$.
COMPLETA: la relazione è completa in quanto scelta una arbitraria coppia (x, y) risulta: se almeno un elemento della coppia è diverso da 0, $(x, y) \neq (0, 0)$ e $x^2 \cdot 0^2 = y^2 \cdot 0^2$, se entrambi gli elementi della coppia sono nulli, $(0, 0) \neq (1, 1)$ e $0^2 \cdot 1^2 = 0^2 \cdot 1^2$, quindi $\forall(x, y), \exists(u, v) \neq (x, y) \colon (x, y)\mathcal{R}(u, v)$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon log_2(x - 3) \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x - 3 \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 7\} = [7, +\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R} \colon 2^{x+1} > 4^{-1}\} = \{x \in \mathbb{R} \colon 2^{x+1} > 2^{-2}\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x > -3\} =]-3, +\infty[$. $A \cup B = B$; $A/B = \emptyset$; $\delta(A \cup B) = \delta(B) = \{-3\}$ e $\mathcal{D}(A/B) = \emptyset$.

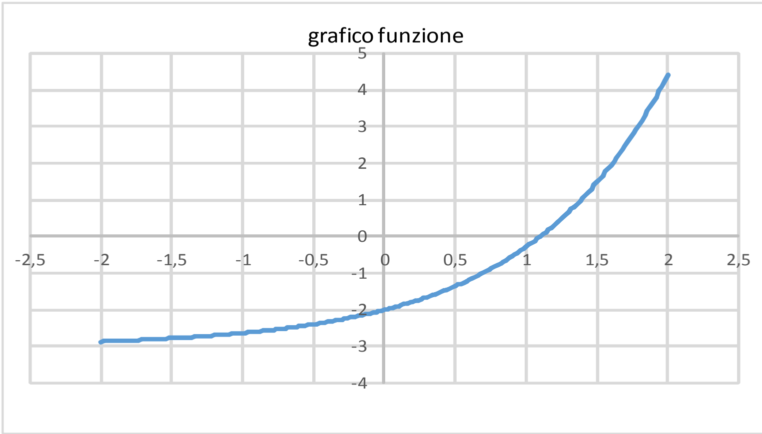
4) $$g \circ f = g(f(x)) = g\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = 2^{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 1} = 2^{\frac{1}{x}+1};$$

$$g \circ g \circ f = g(g(f(x))) = g\left(2^{\frac{1}{x}+1}\right) = 2^{\left(2^{\frac{1}{x}+1}\right)^2 + 1} = 2^{4^{\frac{1}{x}+1}+1}.$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{4^{x+1} - 4}{1 - 2^{-x}} = \lim_{x \to 0} 4 \cdot \frac{\frac{4^x - 1}{x}}{\frac{2^{-x} - 1}{-x}} = 4 \cdot \frac{(\to log\, 4)}{(\to log\, 2)} = 4\, log_2\, 4 = 8.$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^{-\frac{x}{2}} = \lim_{x \to \infty} \left(\left(1 - \frac{3}{x}\right)^x\right)^{-\frac{1}{2}} = (\to e^{-3})^{-\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim_{x \to 0} f(x) = -2$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.



Compito $\mathbb{G}$

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$\mathcal{C}(A)$	$\mathcal{C}(A)\cap B$	$\mathcal{C}(B)$	$A\cup\mathcal{C}(B)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$		
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

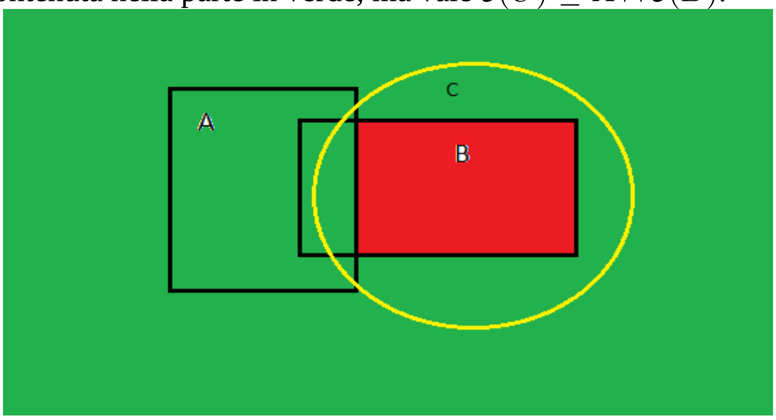
Per l'ipotesi posta $\mathcal{C}(A)\cap B\subseteq C$ dobbiamo escludere le righe ove per $\mathcal{C}(A)\cap B$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme C compare il simbolo $\notin$; nelle restanti sette righe abbiamo due casi in cui gli insiemi C e $A\cup\mathcal{C}(B)$ presentano contemporaneamente e rispetivamente i simboli $\in$ e $\notin$, pertanto non possiamo concludere che in generale vale l'inclusione $C\subseteq A\cup\mathcal{C}(B)$.

II METODO (con il ragionamento logico)

L'inclusione $\mathcal{C}(A)\cap B\subseteq C$ è equivalente alla $\mathcal{C}(C)\subseteq\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)\cap B)=A\cap\mathcal{C}(B)$, pertanto si può concludere che $\mathcal{C}(C)\subseteq A\cap\mathcal{C}(B)$ ma non che $C\subseteq A\cup\mathcal{C}(B)$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $\mathcal{C}(A)\cap B$ e con il verde $A\cup\mathcal{C}(B)$, se $\mathcal{C}(A)\cap B\subseteq C$ tutto la parte in rosso appartiene all'insieme C che è la parte interna al bordo giallo, come è facilmente verificabile non possiamo concludere che $C\subseteq A\cup\mathcal{C}(B)$ perché la parte interna al bordo giallo non è totalmente contenuta nella parte in verde, ma vale $\mathcal{C}(C)\subseteq A\cap\mathcal{C}(B)$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione è riflessiva in quanto $\forall(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si ha $x^2-y^2=x^2-y^2$, quindi $\forall(x,y),(x,y)\mathcal{R}(x,y)$.
SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall((x,y),(u,v)) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, si ha che da $x^2-v^2=u^2-y^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2-y^2=x^2-v^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v)),(x,y)\mathcal{R}(u,v) \Rightarrow (u,v)\mathcal{R}(x,y)$.
ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1,0)$ e $(-1,0)$; per tali coppie vale sia $1^2-0^2=(-1)^2-0^2$ che $(-1)^2-0^2=1^2-0^2$, ma $(1,0)\neq(-1,0)$.
TRANSITIVA: la relazione è transitiva in quanto $\forall((x,y),(u,v),(w,z)) \in (\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, si ha che da $x^2-v^2=u^2-y^2$ e $u^2-z^2=w^2-v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $x^2-z^2=w^2-y^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v),(w,z)),(x,y)\mathcal{R}(u,v)\wedge(u,v)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(w,z)$.
COMPLETA: la relazione non è completa in quanto scelta la coppia $(0,0)$ non esiste coppia $(u,v)\neq(0,0)$ tale per cui $0^2-v^2=u^2-0^2$.

3) $A=\{x\in\mathbb{R}: log_4(x+3)\geq -2\}=\{x\in\mathbb{R}: x+3\geq 1/16\}=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -47/16\}=[-47/16,+\infty[$. $B=\{x\in\mathbb{R}: 2^{-2x}\leq 8\}=\{x\in\mathbb{R}: 2^{-2x}\leq 2^3\}=\{x\in\mathbb{R}: x\geq -3/2\}=[-3/2,+\infty[$. $A\cap B=B$; $A/B=[-47/16,-3/2[$; $\delta(A\cap B)=\delta(B)=\{-3/2\}$ e $\mathcal{D}(A/B)=[-47/16,-3/2]$.

4) $g\circ f=g(f(x))=g\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=2^{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2+1}$;

$g\circ f\circ g=(g\circ f)(g(x))=(g\circ f)\left(2^{x^2+1}\right)=2^{\left(\frac{1}{2^{x^2+1}+1}\right)^2+1}$.

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{4-2^{-x+2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\frac{3^x-1}{x}}{\frac{2^{-x}-1}{-x}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(\to log\,3)}{(\to log\,2)}=\dfrac{1}{4}log_2 3=log_2\sqrt[4]{3}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{1}{4}}=(\to e)^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}}$.

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim\limits_{x\to 5}f(x)=0$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.

Compito III

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$\mathcal{C}(B)$	$A\cap\mathcal{C}(B)$	$\mathcal{C}(A)$	$\mathcal{C}(A)\cup B$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$		
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

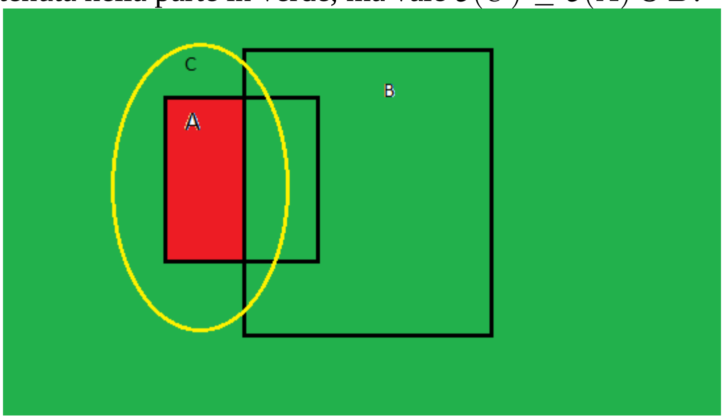
Per l'ipotesi posta $A\cap\mathcal{C}(B)\subseteq C$ dobbiamo escludere le righe ove per $A\cap\mathcal{C}(B)$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme C compare il simbolo $\notin$; nelle restanti sette righe abbiamo un caso in cui gli insiemi C e $A\cup\mathcal{C}(B)$ presentano contemporaneamente e rispetivamente i simboli $\in$ e $\notin$, pertanto non possiamo concludere che in generale vale l'inclusione $C\subseteq\mathcal{C}(A)\cup B$.

II METODO (con il ragionamento logico)

L'inclusione $A\cap\mathcal{C}(B)\subseteq C$ è equivalente alla $\mathcal{C}(C)\subseteq\mathcal{C}(A\cap\mathcal{C}(B))=\mathcal{C}(A)\cup B$, pertanto si può concludere che $\mathcal{C}(C)\subseteq\mathcal{C}(A)\cup B$ ma non che $C\subseteq\mathcal{C}(A)\cup B$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $A\cap\mathcal{C}(B)$ e con il verde $\mathcal{C}(A)\cup B$, se $A\cap\mathcal{C}(B)\subseteq C$ tutto la parte in rosso appartiene all'insieme C che è la parte interna al bordo giallo, come è facilmente verificabile non possiamo concludere che $C\subseteq\mathcal{C}(A)\cup B$ perché la parte interna al bordo giallo non è totalmente contenuta nella parte in verde, ma vale $\mathcal{C}(C)\subseteq\mathcal{C}(A)\cup B$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione è riflessiva in quanto $\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si ha $x^2+y^2=x^2+y^2$, quindi $\forall(x,y),(x,y)\mathcal{R}(x,y)$.

SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall((x,y),(u,v))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, si ha che da $x^2+v^2=u^2+y^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2+y^2=x^2+v^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v)),(x,y)\mathcal{R}(u,v)\Rightarrow(u,v)\mathcal{R}(x,y)$.

ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1,0)$ e $(-1,0)$; per tali coppie vale sia $1^2+0^2=(-1)^2+0^2$ che $(-1)^2+0^2=1^2+0^2$, ma $(1,0)\neq(-1,0)$.

TRANSITIVA: la relazione è transitiva in quanto $\forall((x,y),(u,v),(w,z))\in(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, si ha che da $x^2+v^2=u^2+y^2$ e $u^2+z^2=w^2+v^2$ discende banalmente l'uguaglianza $x^2+z^2=w^2+y^2$, quindi $\forall((x,y),(u,v),(w,z)),(x,y)\mathcal{R}(u,v)\wedge(u,v)\mathcal{R}(w,z)\Rightarrow(x,y)\mathcal{R}(w,z)$.

COMPLETA: la relazione è completa in quanto scelta una arbitraria coppia (x, y) risulta: se almeno un elemento della coppia è diverso da 0, $(x, y) \neq (-x, -y)$ e $x^2 + (-y)^2 = (-x)^2 + y^2$, se entrambi gli elementi della coppia sono nulli, $(0,0) \neq (1,1)$ e $0^2 + 1^2 = 1^2 + 0^2$, quindi $\forall (x, y), \exists (u, v) \neq (x, y) : (x, y)\mathcal{R}(u, v)$.

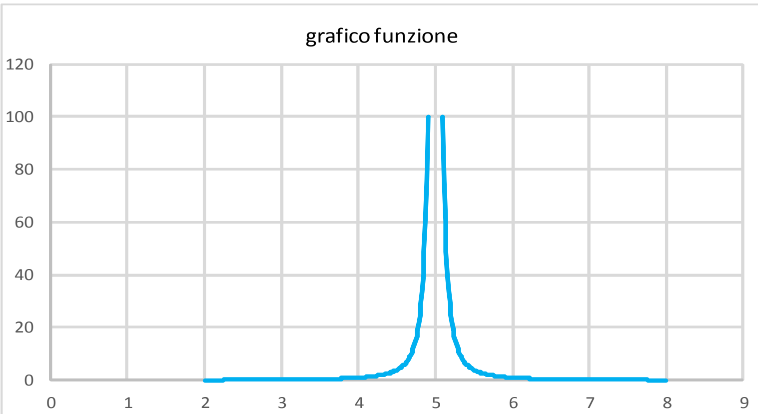
3) $A = \{x \in \mathbb{R}: log_4(x+3) \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}:\ x+3 \geq 16\} = \{x \in \mathbb{R}:\ x \geq 13\} = [13, +\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^{2x} \leq 32\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^{2x} \leq 2^5\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 5/2\} =]-\infty, 5/2]$. $A \cap B = \emptyset$; $A/B = A$; $\delta(A \cap B) = \emptyset$ e $\mathcal{D}(A/B) = \mathcal{D}(A) = A$.

4) $g \circ f = g(f(x)) = g\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = 2^{\frac{1}{x^2+1}+1}$;

$g \circ g \circ f = g(g(f(x))) = g\left(2^{\frac{1}{x^2+1}+1}\right) = 2^{2^{\frac{1}{x^2+1}+1}+1}$.

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{4 - 2^{2x+2}} = \lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{\frac{3^x-1}{x}}{\frac{2^{2x}-1}{2x}} = -\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{(\to log\,3)}{(\to log\,2)} = -\dfrac{1}{8} log_2 3 = log_2 \dfrac{1}{\sqrt[8]{3}}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+5}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x = e^5$.

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = +\infty$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.



Compito II

1) *I METODO* (con la tavola di appartenenza)

A	B	C	$A \cap B$	$\mathcal{C}(A \cap B)$	$A \cup B$	$\mathcal{C}(A \cup B)$
$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$		
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$		
$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$		

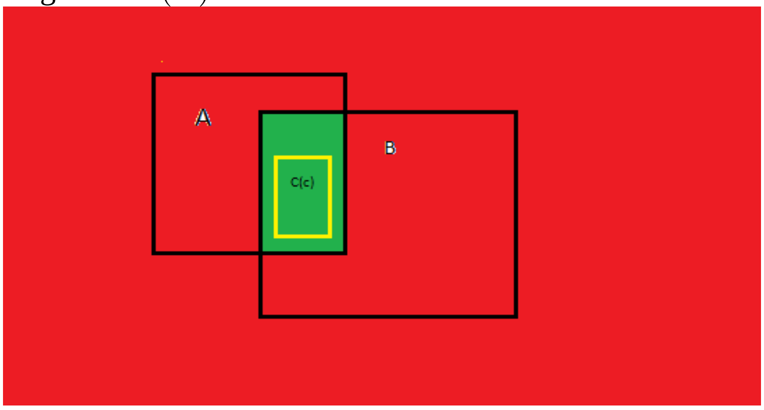
Per l'ipotesi posta $\mathcal{C}(A \cap B) \subseteq C$ dobbiamo escludere le righe ove per $\mathcal{C}(A \cap B)$ compare il simbolo $\in$ e per l'insieme C compare il simbolo $\notin$; nelle restanti cinque righe abbiamo tre casi in cui gli insiemi C e $\mathcal{C}(A \cup B)$ presentano contemporaneamente e rispetivamente i simboli $\in$ e $\notin$, pertanto non possiamo concludere che in generale vale l'inclusione $C \subseteq \mathcal{C}(A \cup B)$.

II METODO (con il ragionamento logico)

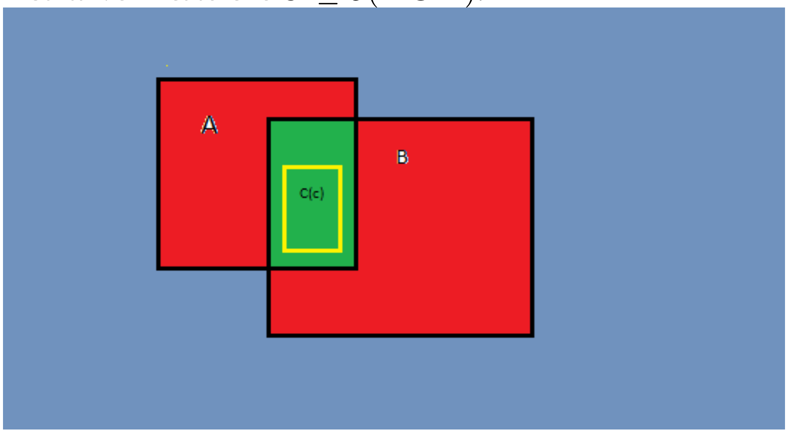
$\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A \cap B)$ e per l'ipotesi posta $\mathcal{C}(A \cap B) \subseteq C$, pertanto si può concludere che $\mathcal{C}(A \cup B) \subseteq C$ ma non che $C \subseteq \mathcal{C}(A \cup B)$.

III METODO (con i diagrammi di Eulero-Venn):

Considera il seguente diagramma dove con il rosso abbiamo indicato $\mathcal{C}(A \cap B)$, se $\mathcal{C}(A \cap B) \subseteq C$ tutto la parte in rosso appartiene all'insieme C e quindi la parte interna al bordo giallo è $\mathcal{C}(C)$.



Nel diagramma seguente indichiamo con il blu $\mathcal{C}(A \cup B)$, come è chiaramente evidenziato non tutta la parte esterna al bordo giallo è contenuta nella parte in blu, pertanto non risulta verificato che $C \subseteq \mathcal{C}(A \cup B)$.



2) *RIFLESSIVA*: la relazione è riflessiva in quanto $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si ha $x^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^2$, quindi $\forall (x, y), (x, y)\mathcal{R}(x, y)$.

SIMMETRICA: la relazione è simmetrica in quanto $\forall ((x, y), (u, v)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, si ha che da $x^2 \cdot v^2 = u^2 \cdot y^2$ discende banalmente l'uguaglianza $u^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot v^2$, quindi $\forall ((x, y), (u, v)), (x, y)\mathcal{R}(u, v) \Rightarrow (u, v)\mathcal{R}(x, y)$.

ANTISIMMETRICA: la relazione non è antisimmetrica, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1, 0)$ e $(-1, 0)$; per tali coppie vale sia $1^2 \cdot 0^2 = (-1)^2 \cdot 0^2$ che $(-1)^2 \cdot 0^2 = 1^2 \cdot 0^2$, ma $(1, 0) \neq (-1, 0)$.

TRANSITIVA: la relazione non è transitiva, per dimostrarlo basta considerare le coppie $(1, 0)$, $(0, 0)$ e $(0, 1)$; per tali coppie vale sia $1^2 \cdot 0^2 = 0^2 \cdot 0^2$ che $0^2 \cdot 1^2 = 0^2 \cdot 0^2$, ma $1^2 \cdot 1^2 \neq 0^2 \cdot 0^2$.

COMPLETA: la relazione è completa in quanto scelta una arbitraria coppia (x, y) risulta: se almeno un elemento della coppia è diverso da 0, $(x, y) \neq (-x, -y)$ e $x^2 \cdot (-y)^2 = (-x)^2 \cdot y^2$, se entrambi gli elementi della coppia sono nulli, $(0, 0) \neq (1, 1)$ e $0^2 \cdot 1^2 = 1^2 \cdot 0^2$, quindi $\forall (x, y), \exists (u, v) \neq (x, y)$: $(x, y)\mathcal{R}(u, v)$.

3) $A = \{x \in \mathbb{R}\colon log_4(x - 3) \geq 3\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x - 3 \geq 48\} = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 51\} = [51, +\infty[$. $B = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{2x} > 32\} = \{x \in \mathbb{R}\colon 2^{2x} > 2^5\} =$

$\{x \in \mathbb{R}: x > 5/2\} =]5/2, +\infty[$. $A \cap B = A$; $A/B = \emptyset$;
$\delta(A \cap B) = \delta(A) = \{51\}$ e $\mathcal{D}(A/B) = \emptyset$.

4) $g \circ f = g(f(x)) = g\left(x^2 - 1\right) = 2^{-(x^2-1)+1} = 2^{2-x^2}$;
$g \circ g \circ f = g(g(f(x))) = g\left(2^{2-x^2}\right) = 2^{-2^{2-x^2}+1}$.

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{2 - 2^{2x+1}} = \lim\limits_{x \to 0} -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\frac{3^x-1}{x}}{\frac{2^{2x}-1}{2x}} = -\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{(\to log\, 3)}{(\to log\, 2)} = -\dfrac{1}{4} log_2 3 = log_2 \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-5}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{5}{x}\right)^x = e^{-5}$.

6) La definizione di limite proposta è quella di $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$. Di seguito il grafico di una funzione che ammette tale limite.