Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

15 giugno 2020

Compito $\mathbb{A}$

1)

p	q	r	$p\ o\ q$	$\neg(p\ e\ r)$	$p \Rightarrow (p\ o\ q)$	$\neg(p\ e\ r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (p\ o\ q))$
V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

2) $B = \{x \in \mathbb{R}: log_3 x > 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 9\} =]9, +\infty[$, $A \cup B = [0, +\infty[$, $A \cap B =]9, 10]$, $\overline{(A \cup B)} = A \cup B$, $\overline{(A \cap B)} = [9, 10]$.

3) $f(g(x)) = f(2^{1-x^2}) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{2^{1-x^2}}} = \sqrt{1 + 2^{x^2-1}}$;

$g(f(x)) = g(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}) = 2^{1-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^2} = 2^{-\frac{1}{x}}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{senx + sen2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{senx}{x} + \dfrac{sen2x}{2x} \cdot 2 \right) = 1 + 1 \cdot 2 = 3.$

Per $x \to +\infty$, $4^{-x} = o(e^x)$ e $e^{-2x} = o(2^x)$; pertanto

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + 4^{-x}}{2^x + e^{-2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{2^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e}{2}\right)^x = +\infty.$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$; in quanto funzione esponenziale.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x(1-x)} = e^{(\to -\infty)(\to +\infty)} = e^{(\to -\infty)} = 0$;

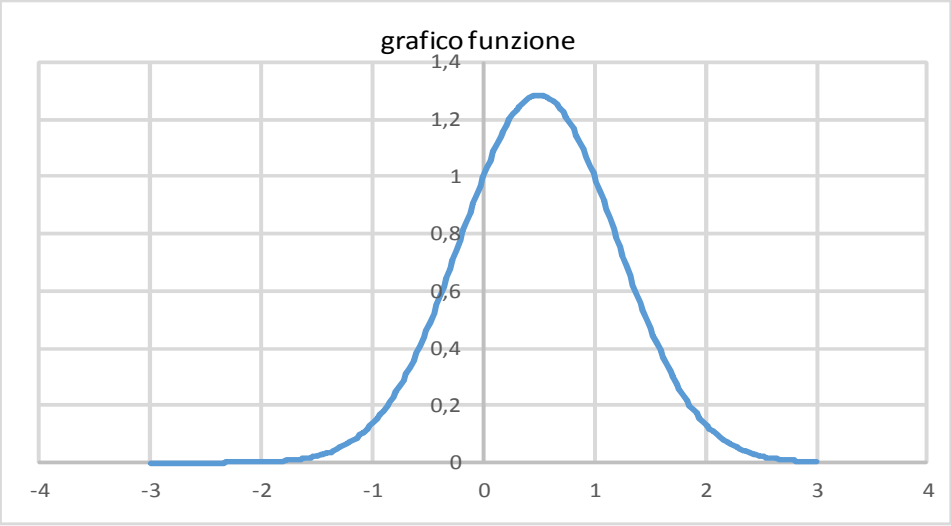
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x(1-x)} = e^{(\to +\infty)(\to -\infty)} = e^{(\to -\infty)} = 0$, $As\ Or$ di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x(1-x)} \cdot ((1-x) - x) = e^{x(1-x)} \cdot (1 - 2x)$.

$y' > 0$ se $1 - 2x > 0 \Rightarrow x < 1/2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 1/2]$, strettamente decrescente in $[1/2, +\infty[$. Massimo assoluto in $x = 1/2$ pari a $y(1/2) = \sqrt[4]{e}$.

Concavità e convessità: $y'' = e^{x(1-x)} \cdot (1-2x)^2 + e^{x(1-x)} \cdot (-2) = e^{x(1-x)} \cdot \left((1-2x)^2 - 2\right)$. $y'' > 0$, se $(1-2x)^2 - 2 > 0 \Rightarrow (2x-1)^2 > 2 \Rightarrow 2x - 1 < -\sqrt{2} \vee 2x - 1 > \sqrt{2} \Rightarrow x < \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \vee x > \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}]$ e in $[\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty[$, strettamente concava in $[\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}]$. Punti di flesso $\left(\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$.

Grafico:



.

6) $\int_1^e \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} log|x|\right)_1^e = \left(\frac{e^3}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e^3}{3} + \frac{1}{6}$.

7) $A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 + x_2 & x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}$;

$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Posto $\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ si ottiene $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

8) $f'_x = seny^2 - z \cdot w^3$ $\qquad f'_y = 2\,x \cdot y \cdot cosy^2$

$f'_w = -3\,x \cdot z \cdot w^2$ $\qquad f'_z = -x \cdot w^3$

Compito $\mathbb{B}$

1)

p	q	r	$p\ o\ q$	$p\ e\ r$	$(p\ e\ r) \Leftrightarrow \neg q$	$(p\ o\ q) \Rightarrow ((p\ e\ r) \Leftrightarrow \neg q)$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V

2) $B = \{x \in \mathbb{R}: 2^x < 1\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 0\} =]-\infty, 0[$, $A \cup B =]-\infty, 5[$,

$A \cap B = [-3, 0[$, $(A \overset{\circ}{\cup} B) = A \cup B$, $\overline{(A \overset{\circ}{\cap} B)} =]-3, 0[$.

3) In un numero di cinque cifre in cui non compare la cifra 0, si hanno per ogni cifra nove possibili modi di scelta, pertanto i possibili numeri sono $9^5 = 59.048$. Se richiediamo che la cifra 1 compaia esattamente tre volte, abbiamo $\binom{5}{3}$ modi distinti di scelta per posizionare la cifra 1 e 8^2 modi distinti per le rimanenti due cifre, i possibili numeri sono quindi $\binom{5}{3} \cdot 8^2 = 640$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{senx} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} \cdot \frac{x}{senx} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0.$

Per $x \to -\infty$, $e^x = o(4^{-x})$ e $4^x = o(e^{-x})$; pertanto

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 4^{-x}}{4^x + e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4^{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^{-x} = +\infty.$

5) $C.E.$: $x \neq 0$; $C.E. =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $x^2 - \frac{2}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x^3-2}{x} > 0$ ovvero $x < 0 \vee x > \sqrt[3]{2}$. Funzione positiva in $]-\infty, 0[$ e in $]\sqrt[3]{2}, +\infty[$ negativa in $]0, \sqrt[3]{2}[$. Unica intersezione con gli assi nel punto $(\sqrt[3]{2}, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 - \frac{2}{x} = +\infty;$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x - \frac{2}{x^2} = \pm\infty;$

$\lim_{x \to 0^{\pm}} x^2 - \frac{2}{x} = \mp\infty$; $As\ V$ di equazione $x = 0$.

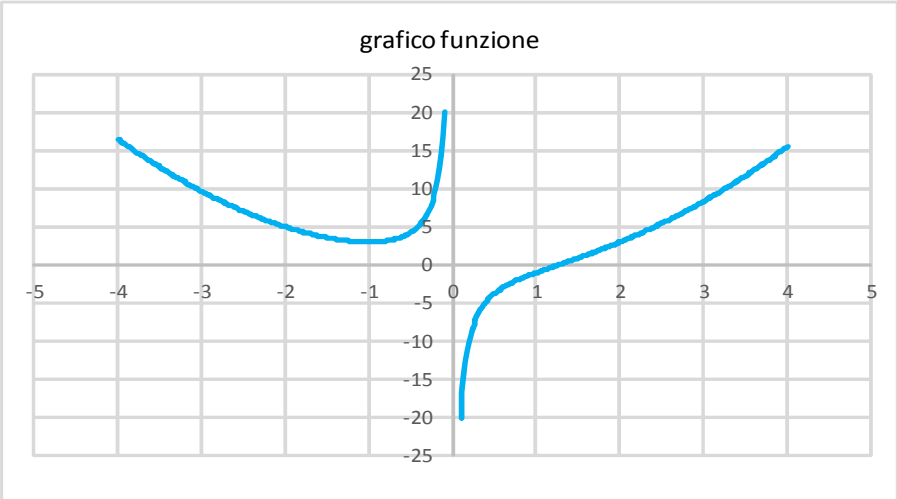
Crescenza e decrescenza: $y' = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3+1)}{x^2}$.

$y' > 0$ se $x^3 + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$. Funzione strettamente crescente in $]-1, 0]$ e in $]0, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-\infty, -1[$. Minimo relativo in $x = -1$ pari a $y(-1) = 3$.

Concavità e convessità: $y'' = 2 - \frac{4}{x^3} = \frac{2(x^3-2)}{x^3}$. $y'' > 0$, se $x < 0 \vee x > \sqrt[3]{2}$..

Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 0]$ e in $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$, strettamente concava in $[0, \sqrt[3]{2}]$. Punto di flesso $\left(\sqrt[3]{2}, 0\right)$.

Grafico:



6) $\int_2^e \left(x - \frac{3}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 3\,log|x|\right)_2^e = \left(\frac{e^2}{2} - 3\right) - (2 - 3\,log\,2) = \frac{e^2}{2} - 5 + log\,8\,.$

7) $y' = 2\,senx\,cosx \cdot e^{3x} + (1 + sen^2x) \cdot e^{3x} \cdot 3 = (sen2x + 3(1 + sen^2x)) \cdot e^{3x}.$

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \\ w - w_P \end{pmatrix}$.

$z(P) = 0$, $\nabla z = (3y^2, 6xy - 2, 2)$, $\nabla z(P) = (3, -2, 2)$. Equazione del piano tangente: $z = 3(x - 0) - 2(y + 2) + 2(w - 2)$, oppure $3x - 2y + 2w - z = 8$.

Compito $\mathbb{C}$

1)

p	q	r	$p \Leftrightarrow r$	$(p \Leftrightarrow r)\ e\ \neg q$	$p \Rightarrow r$	$((p \Leftrightarrow r)\ e\ \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 3^x \geq 27\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 3\} = [3, +\infty[$, $A \cup B =]0, +\infty[$, $A \cap B = [3, 5[$, $D(A \cup B) = [0, +\infty[$, $D(A \cap B) = [3, 5]$.

3) $f(g(x)) = f(1 + x^2) = \sqrt{1 + 2^{1-(1+x^2)}} = \sqrt{1 + 2^{-x^2}}$;

$g(f(x)) = g(\sqrt{1 + 2^{1-x}}) = 1 + \left(\sqrt{1 + 2^{1-x}}\right)^2 = 2 + 2^{1-x}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + senx} - 1}{3x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + senx} - 1}{senx} \cdot \dfrac{senx}{x} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Per $x \to -\infty$, $x = o(x^2)$ e $3x = o(x^4)$; pertanto

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^4 + 3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; in quanto funzione esponenziale.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{x(1+x)} = e^{(\to \pm\infty)(\to \pm\infty)} = e^{(\to +\infty)} = +\infty$;

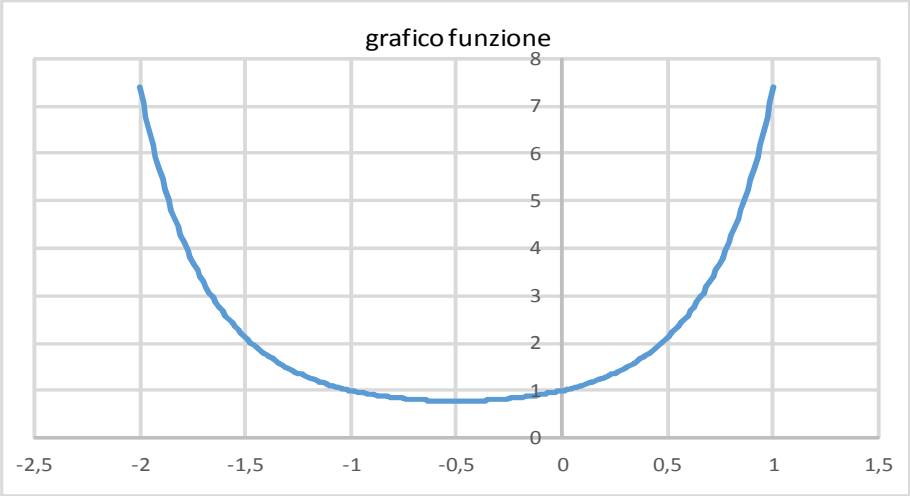
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{e^{x(1-x)}}{x} = +\infty$, in quanto per $x \to \pm\infty$, $x = o\left(e^{x(1+x)}\right)$.

Crescenza e decrescenza: $y' = e^{x(1+x)} \cdot ((1 + x) + x) = e^{x(1+x)} \cdot (1 + 2x)$.

$y' > 0$ se $1 + 2x > 0 \Rightarrow x > -1/2$. Funzione strettamente decrescente in $]-\infty, -1/2]$, strettamente crescente in $[-1/2, +\infty[$. Minimo assoluto in $x = -1/2$ pari a $y(-1/2) = 1/\sqrt[4]{e}$.

Concavità e convessità: $y'' = e^{x(1+x)} \cdot (1 + 2x)^2 + e^{x(1+x)} \cdot 2 = e^{x(1+x)} \cdot \left((1 + 2x)^2 + 2\right)$. $y'' > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Funzione strettamente convessa.

Grafico:



.

6) Integriamo per parti: $\int (1+x)e^x\,dx = (1+x)e^x - \int 1\cdot e^x\,dx =$
$(1+x)e^x - e^x + c = xe^x + c$.

7) $y' = \dfrac{e^{cosx}\,(-senx)\,(1-x^3) - e^{cosx}(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \dfrac{e^{cosx}\,(3x^2 - senx(1-x^3))}{(1-x^3)^2}$.

8) $\nabla f = (4x-y,\ -x+9y^2)$.

FOC: $\begin{cases} 4x - y = 0 \\ -x + 9y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x \\ 144x^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x(144x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$
$\begin{cases} y = 4x \\ x(144x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x \\ x = 0 \vee x = 1/144 \end{cases}$, due punti critici $P_1(0,0)$ e $P_2(1/144, 1/36)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 18y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 72y - 1$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = -1 < 0$. P_1 punto di sella.
$|\mathcal{H}f(P_2)| = 1 > 0,\ f''_{xx}(P_2) = 4 > 0$. P_2 punto di minimo.