Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)
3 settembre 2020

Compito $\mathbb{A}$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo i casi in cui le proposizioni q e r non possono essere entrambe vere oppure entrambe false:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p\ e\ \neg q$	$r \Rightarrow \neg p$	$(p\ e\ \neg q) \Rightarrow (r \Rightarrow \neg p)$
V	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V

.

2) $g(f(x) - 2g(x)) = g\big(3 - 2x + x^2 - 2(1 - 3x)\big) = g\big(1 + 4x + x^2\big) =$ $1 - 3(1 + 4x + x^2) = -2 - 12x - 3x^2$. Passiamo ora a risolvere la disequazione $g(f(x) - 2g(x)) \leq -2$ ovvero $-2 - 12x - 3x^2 \leq -2 \Leftrightarrow x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow$ $x(x + 4) \geq 0$, studiamo separatamente i due fattori: $x \geq 0$ e $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$; la disequazione è soddisfatta per valori esterni alle radici e di conseguenza le sue soluzioni sono $x \leq -4 \vee x \geq 0$.

3) Nel primo caso si hanno 21 distinti modi per ognuno dei primi quattro elementi del codice e 10 distinti modi per ognuno dei rimanenti quattro elementi, i possibili codici sono pertanto $21^4 \cdot 10^4 = 210^4 = 1.944.810.000$. Nel secondo caso si hanno $\binom{4}{2}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le vocali, 5^2 e 16^2 distinti modi di scelta per rispettivamente vocali e consonanti; $\binom{4}{2}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le cifre pari, 5^2 e 5^2 distinti modi di scelta per pari e dispari, i possibili codici sono pertanto

$$\binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 16^2 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5^2 \cdot 5^2 = \left(\binom{4}{2} \cdot 5^3 \cdot 16\right)^2 = 14.400.000\,.$$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,x + log(1 + x)}{2\,sen\,x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{tg\,x}{x} + \frac{log(1+x)}{x}}{2 \cdot \frac{sen\,x}{x}} = \dfrac{1 + 1}{2 \cdot 1} = 1.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 1}{x}\right)^{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-1} =$ $(\to e) \cdot (\to 1) = e.$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

$y(-x) = (-x)^2\big(1 - (-x)^2\big) = x^2(1 - x^2) = y(x)$. Funzione pari, la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

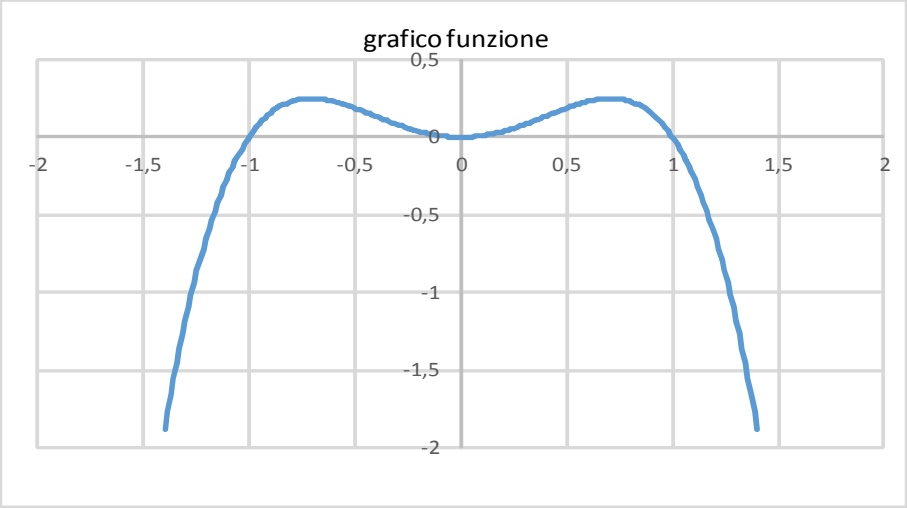
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0 \Rightarrow x^2\big(1 - x^2\big) > 0 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow$ $x^2 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$. Funzione positiva in $]0, 1[$, negativa in $]1, +\infty[$; intersezioni con gli assi nei punti di coordinate $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\big(1 - x^2\big) = (\to +\infty) \cdot (\to -\infty) = -\infty;$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}(1 - x^2)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\big(1 - x^2\big) =$ $(\to +\infty) \cdot (\to -\infty) = -\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2x\left(1 - x^2\right) + x^2(-2x) = 2x\left(1 - 2x^2\right)$. $y' > 0$ se $1 - 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1/2 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{1/2}$. Funzione strettamente crescente in $]0, \sqrt{1/2}[$, strettamente decrescente in $]\sqrt{1/2}, +\infty[$. Minimo relativo in $x = 0$ pari a $y(0) = 0$, massimo assoluto in $x = \sqrt{1/2}$ pari a $y\left(\sqrt{1/2}\right) = 1/4$.
Concavità e convessità: $y'' = 2\left(1 - 2x^2\right) + 2x(-4x) = 2\left(1 - 6x^2\right)$. $y'' > 0$, se $1 - 6x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1/6 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{1/6}$. Funzione strettamente convessa in $]0, \sqrt{1/6}[$, strettamente concava in $]\sqrt{1/6}, +\infty[$. Punto di flesso $\left(\sqrt{1/6}, 5/36\right)$.
Grafico:



.

6) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{x+3}\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - log|x+3|\right)_1^2 = (4 - log\,5) - \left(\frac{1}{4} - log\,4\right) = \frac{15}{4} + log\,\frac{4}{5}$.

7) La retta di equazione $y = x$ ha coefficiente angolare 1, quindi la retta tangente è parallela alla retta proposta se e solo se $y' = 1$. La derivata della funzione è $y' = 2x - 3$, posto $2x - 3 = 1$ si ottiene $x_0 = 2$; la retta cercata ha quindi equazione $y - y(2) = 1(x - 2)$ con $y(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3$. L'equazione richiesta è $y = x + 1$.

8) $\nabla f = (4x^3 - 4x, -2y)$.

FOC: $\begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x(x^2 - 1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$, tre punti critici $P_0(0,0)$ e $P_{1,2}(\pm 1, 0)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = -8(3x^2 - 1)$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_0)| = 8 > 0$, $f''_{yy}(P_0) = -2 < 0$. P_0 punto di massimo.

$|\mathcal{H}f(P_{1,2})| = -16 < 0$. $P_{1,2}$ punti di sella.

Compito $\mathbb{B}$

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo i casi in cui le proposizioni p e q sono entrambe vere oppure entrambe false:

p	q	r	$\neg r$	$\neg r \ o \ p$	$q \Rightarrow (\neg r \ o \ p)$	$p \Leftrightarrow (q \Rightarrow (\neg r \ o \ p))$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F

2) $f(f(x)-g(x)) = f\big((3-2x)-\big(1+3x^2\big)\big) = f\big(2-2x-3x^2\big) =$
$3-2\big(2-2x-3x^2\big) = 6x^2+4x-1$. Passiamo ora a risolvere la disequazione $f(f(x)-g(x))>1$ ovvero $6x^2+4x-1>1 \Leftrightarrow 6x^2+4x-2>0 \Leftrightarrow$ $3x^2+2x-1>0$, calcoliamo il discriminante: $\Delta = 2^2-4\cdot 3\cdot(-1)=16$;
$x_{1,2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{6} = \dfrac{-2\pm 4}{6} = \begin{matrix} \nearrow & x_1 = -1 \\ \searrow & x_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}$. La disequazione è soddisfatta per valori esterni alle radici e di conseguenza le sue soluzioni sono
$x < -1 \vee x > \dfrac{1}{3}$.

3) Nel primo caso si hanno $\binom{8}{4}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le lettere e 21^4 e 10^4 distinti modi di scelta per rispettivamente lettere e cifre, i possibili codici sono pertanto $\binom{8}{4}\cdot 21^4\cdot 10^4 = 136.136.700.000$. Il secondo caso si può risolvere in due diversi modi:

1. come nel primo caso si hanno $\binom{8}{4}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le lettere, $\binom{4}{2}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le vocali, 5^2 e 16^2 distinti modi di scelta per rispettivamente vocali e consonanti; i distinti modi di scelta per le cifre sono come in precedenza 10^4, i possibili codici sono pertanto
$\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{2}\cdot 5^2\cdot 16^2\cdot 10^4 = 26.880.000.000$;
2. vi sono $\binom{8}{2}$ e $\binom{6}{2}$ distinti modi di scelta su dove posizionare rispettivamente vocali e consonanti, 5^2, 16^2 e 10^4 distinti modi di scelta per rispettivamente vocali, consonanti e cifre, i possibili codici sono pertanto
$\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot 5^2\cdot 16^2\cdot 10^4 = 26.880.000.000$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen\,x+x^2}{x-3\,sen\,x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{sen\,x}{x}+x}{1-3\cdot\frac{sen\,x}{x}} = \dfrac{1+0}{1-3} = -\dfrac{1}{2}$.
Per $x\to-\infty$, $x^2=o(2^{-x})$; ne segue
$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2^{-x}}{3^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{2^{-x}}{3^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}-\left(\dfrac{1}{6}\right)^x = -\infty$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.
$y(-x) = -x\Big(1-(-x)^4\Big) = -x(1-x^4) = -y(x)$. Funzione dispari, la studiamo solo per $x\geq 0$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0 \Rightarrow x\big(1-x^4\big)>0 \Rightarrow 1-x^4>0 \Rightarrow$ $x^4<1 \Rightarrow 0<x<1$. Funzione positiva in $]0,1[$, negativa in $]1,+\infty[$; intersezioni con gli assi nei punti di coordinate $(0,0)$ e $(1,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

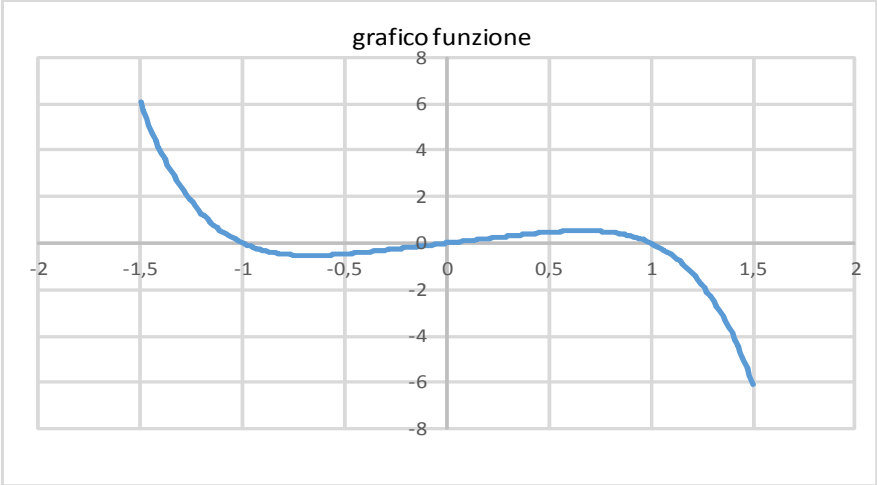
$\lim_{x \to +\infty} x(1-x^4) = (\to +\infty)\cdot(\to -\infty) = -\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(1-x^4)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} (1-x^4) = -\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 1(1-x^4) + x(-4x^3) = 1 - 5x^4$. $y' > 0$ se $1 - 5x^4 > 0 \Rightarrow x^4 < 1/5 \Rightarrow 0 < x < \sqrt[4]{1/5}$. Funzione strettamente crescente in $]0, \sqrt[4]{1/5}[$, strettamente decrescente in $]\sqrt[4]{1/5}, +\infty[$. Massimo relativo in $x = \sqrt[4]{1/5}$ pari a $y(\sqrt[4]{1/5}) = 4\sqrt[4]{1/5}/5$.

Concavità e convessità: $y'' = -20x^3$. $y'' < 0, \ \forall x > 0$. Funzione strettamente concava in $]0, +\infty[$. Punto di flesso $(0,0)$.

Grafico:



.

6) $\int_1^3 \left(x^2 + \frac{2}{x+1}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2\,log|x+1|\right)_1^3 =$

$(9 + 2\,log\,4) - \left(\frac{1}{3} + 2\,log\,2\right) = \frac{26}{3} + 2\,log\,2 = \frac{26}{3} + log\,4$.

7) La retta di equazione $y = x + 2$ ha coefficiente angolare 1, quindi la retta tangente è parallela alla retta proposta se e solo se $y' = 1$. La derivata della funzione è $y' = \frac{1}{1+x}$, posto $\frac{1}{1+x} = 1$ si ottiene $x_0 = 0$; la retta cercata ha quindi equazione $y - y(0) = 1 \cdot x$ con $y(0) = log\,1 = 0$. L'equazione richiesta è $y = x$.

8) $\nabla f = (2ax, 3by^2, 2cz^{c-1})$, $\nabla f(1,1,1) = (2a, 3b, 2c)$. Posto $\nabla f(1,1,1) = (1,1,1)$ si ottiene $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ e $c = \frac{1}{2}$.