Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

17 settembre 2020

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo i casi in cui la proposizione $p \Leftrightarrow (q\ e\ r)$ è falsa:

p	q	r	$q\ e\ r$	$p \Leftrightarrow (q\ e\ r)$	$p\ o\ r$	$q \Rightarrow (p\ o\ r)$
V	V	V	V	V		
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V		
F	F	V	F	V		
F	F	F	F	V		

2) La funzione è definita se e solo se $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$; studiamo separatamente numeratore e denominatore: N: $1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$; D: $1+x>0 \Rightarrow x > -1$. Pertanto la disequazione $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$ è verificata per le $-1 < x \leq 1$; $A =]-1,1]$, $\delta(A) = \{-1,1\}$, A è un insieme né aperto né chiuso perché $\delta(A) \nsubseteq A$ e $\delta(A) \nsubseteq C(A)$.

3) Nel primo caso si hanno $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le lettere e 42^5 e 10 distinti modi di scelta per rispettivamente lettere e cifre, i possibili codici sono pertanto $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 42^5 \cdot 10 = 7.841.473.920$. Per il secondo quesito nota che se un codice di acceso deve essere formato da almeno cinque lettere, esso è formato con cinque lettere e una cifra oppure con sei lettere, per la prima possibilità abbiamo già dato risposta precedentemente, per la seconda i possibili codici sono 42^6, in conclusione i distinti codici che si possono formare sono

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 42^5 \cdot 10 + 42^6 = 42^5 \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot 10 + 42 \right) = 42^5 \cdot 102 = 13.330.505.664.$$

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+sen\,x} - \sqrt{1-sen\,x}}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, FI; razionalizziamo.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+sen\,x} - \sqrt{1-sen\,x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-sen\,x}}{\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-sen\,x}} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1+sen\,x) - (1-sen\,x)}{x\left(\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-sen\,x}\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2\,sen\,x}{x\left(\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-sen\,x}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\,\frac{sen\,x}{x}}{\sqrt{1+sen\,x} + \sqrt{1-sen\,x}} =$$

$$\frac{2 \cdot 1}{2} = 1;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3} = ((\to e^{-1}))^3 = e^{-3}.$$

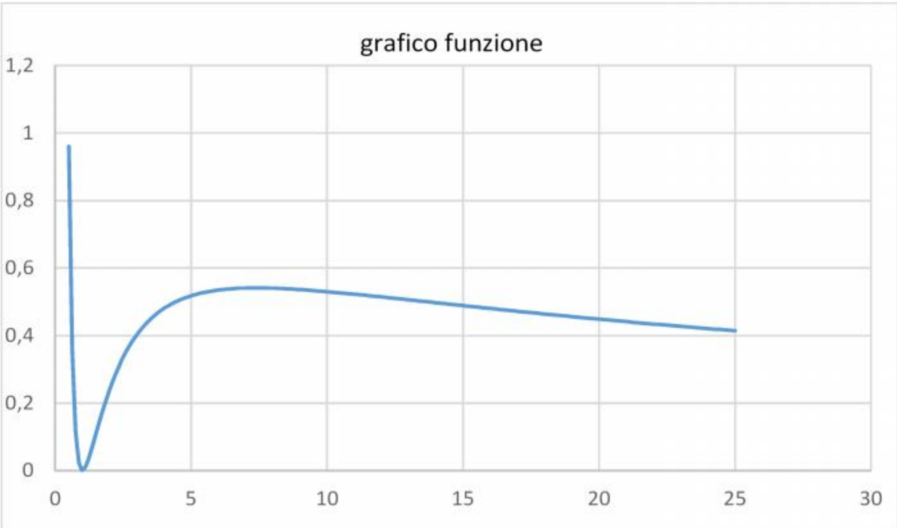
5) $C.E.$: $(x > 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow x > 0$; $C.E. = \mathbb{R}_{++} =]0, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$, $\forall x \in C.E.$ in quanto rapporto fra una quantità non negativa ed una quantità positiva. $y = 0$ se e solo se $\dfrac{log^2 x}{x} = 0 \Rightarrow log^2 x = 0 \Rightarrow x = 1$; unica intersezione con gli assi nel punto di coordinate $(1, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{log^2 x}{x} = \dfrac{(\to +\infty)}{(\to 0^+)} = +\infty$; AV di equazione $x = 0$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log^2 x}{x} = 0$; in quanto $log^2 x = o(x)$ per $x \to +\infty$; AO di equazione $y = 0$.
Il secondo limite è risolvibile anche tramite l'utilizzo del Teorema di de l'Hôpital infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log^2 x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2\, log x \cdot \frac{1}{x}}{1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\, log x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{2\, log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - log^2 x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{log x (2 - log x)}{x^2}$. $y' > 0$ se $log x (2 - log x) > 0$; studiamo separatamente i due fattori: $log x > 0 \Rightarrow x > 1$; $2 - log x > 0 \Rightarrow log x < 2 \Rightarrow x < e^2$. Pertanto $y' > 0$ se $1 < x < e^2$. Funzione strettamente crescente in $]1, e^2[$, strettamente decrescente in $]0, 1[$ e in $]e^2, +\infty[$. Minimo assoluto in $x = 1$ pari a $y(1) = 0$, massimo relativo in $x = e^2$ pari a $y(e^2) = 4/e^2$.
Concavità e convessità: l'esistenza dei due asintoti e la monotonia della funzione precedentemente studiata implicano che i due punti di flesso hanno ascisse $x_1^F \in]1, e^2[$ e $x_2^F \in]e^2, +\infty[$.
Grafico:



6) $\displaystyle\int (x^3 - cos\, x + e^{2x})\, dx = \frac{x^4}{4} - sen\, x + \frac{e^{2x}}{2} + k\,.$

7) $A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & 2x_3 \\ -2x_2 & -2x_3 - x_4 \end{bmatrix}$; pertanto

$A \cdot X = B$ se e solo se $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_3 = 0 \\ -2x_2 = -1 \\ -2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$. Da cui facilmente segue: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 0$ e $x_4 = -1$.

8) $f'_x = t \cdot (-sen(x \cdot z) \cdot z) = -zt \cdot sen(x \cdot z)$;

$$f'_y = -\frac{1}{2\sqrt{y^3 - z \cdot t^2}} \cdot 3y^2 = -\frac{3y^2}{2\sqrt{y^3 - z \cdot t^2}};$$

$$f'_z = t \cdot (-sen(x \cdot z) \cdot x) - \frac{1}{2\sqrt{y^3 - z \cdot t^2}} \cdot \left(-t^2\right) =$$

$$-xt \cdot sen(x \cdot z) + \frac{t^2}{2\sqrt{y^3 - z \cdot t^2}};$$

$$f'_t = cos(x \cdot z) - \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y^3 - z \cdot t^2}} \cdot (-\cancel{2}zt) = cos(x \cdot z) + \frac{zt}{\sqrt{y^3 - z \cdot t^2}}.$$