Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

17 settembre 2020

Compito Unico✓

1) (7 punti) Siano date tre proposizioni semplici p, q e r; sapendo che la proposizione composta $p \Leftrightarrow (q\ e\ r)$ è falsa, costruire la tavola di verità della proposizione composta $q \Rightarrow (p\ o\ r)$.

2) (7 punti) Sia A il campo di esistenza della funzione di equazione $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
Determinare l'insieme A, il suo insieme frontiera $\delta(A)$, ed indicare se A è un insieme aperto, chiuso o né aperto né chiuso.

3) (6 punti) Il codice di accesso al caveau di una banca è formato da sei caratteri alfanumerici (le ventuno lettere dell'alfabeto italiano e le dieci cifre arabe), il codice è in grado di riconoscere fra le lettere minuscole e le lettere maiuscole (il carattere a è considerato diverso dal carattere A). Quanti distinti codici di accesso si possono formare se esso deve essere formato da cinque lettere ed una sola cifra? E quanti distinti codici si possono formare se esso deve essere formato da almeno cinque lettere?

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+sen\,x} - \sqrt{1-sen\,x}}{x}$;
$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = \dfrac{log^2 x}{x}$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta due punti di flesso.)

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int \left(x^3 - cos\,x + e^{2x}\right) dx$.

7) (6 punti) Siano date le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}$. Determinare gli elementi della matrice X in modo tale che valga l'uguaglianza: $A \cdot X = B$.

8) (8 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione
$f(x,y,z,t) = t \cdot cos(x \cdot z) - \sqrt{y^3 - z \cdot t^2}$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono una votazione non inferiore a 24 hanno superato la prova.