Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

8 ottobre 2020

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di verità considerando solo i casi in cui la proposizione $q\ e\ (p \Rightarrow r)$ è falsa:

p	q	r	$p \Rightarrow r$	$q\ e\ (p \Rightarrow r)$	$q \Leftrightarrow r$	$p\ o\ (q \Leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V		
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V		
F	V	F	V	V		
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	V

2) La funzione è definita se e solo se $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$;
$A = [-1, 1]$, $\mathring{A} =]-1, 1[$, A è un insieme chiuso perché $\delta(A) \subset A$.

3) Nel primo caso si hanno $\binom{6}{4}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le lettere e 21^4 e 10^2 distinti modi di scelta per rispettivamente lettere e cifre, i possibili codici sono pertanto $\binom{6}{4} \cdot 21^4 \cdot 10^2 = 291.721.500$. Per il secondo quesito nota che se un codice di acceso deve essere formato al più da due cifre, esso è formato con quattro lettere e due cifre oppure con cinque lettere e una cifra oppure infine con sei lettere, per la prima possibilità abbiamo già dato risposta precedentemente, per la seconda si hanno $\binom{6}{5}$ distinti modi di scelta su dove posizionare le lettere e 21^5 e 10 distinti modi di scelta per rispettivamente lettere e cifre, i possibili codici sono pertanto $\binom{6}{5} \cdot 21^5 \cdot 10$, infine per l'ultimo caso i possibili codici sono 21^6, in conclusione i distinti codici che si possono formare sono

$$\binom{6}{4} \cdot 21^4 \cdot 10^2 + \binom{6}{5} \cdot 21^5 \cdot 10 + 21^6 =$$
$$21^4 \left(\binom{6}{4} \cdot 10^2 + \binom{6}{5} \cdot 21 \cdot 10 + 21^2 \right) = 21^4 \cdot 3.201 = 622.533.681.$$

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{x+x^2} - 1}{sen\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x+x^2} - 1}{x + x^2} \cdot \frac{x}{sen\, x} \cdot (1 + x) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1;$

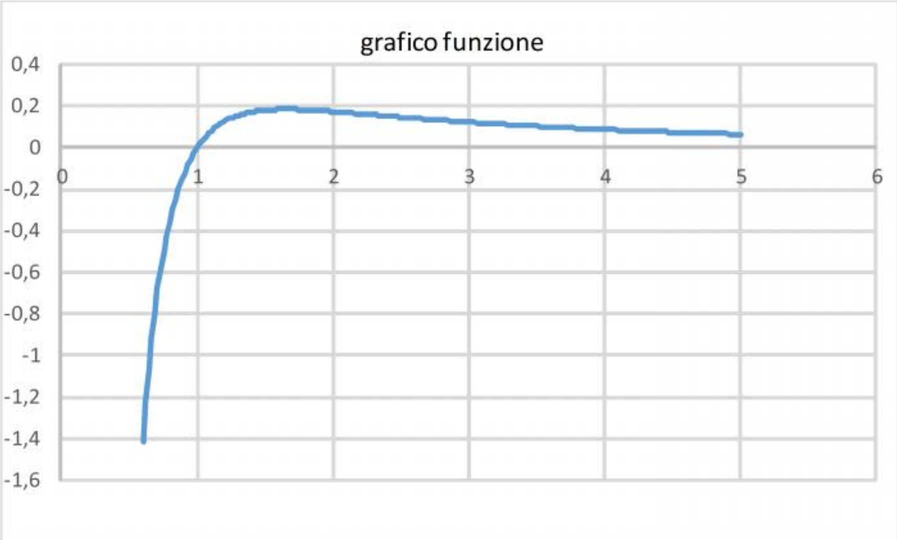
$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \log(\to e) = 1.$

5) $C.E.$: $(x > 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow x > 0$; $C.E. = \mathbb{R}_{++} =]0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0 \Rightarrow \log x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$, funzione negativa in $]0, 1[$, positiva in $]1, +\infty[$; unica intersezione con gli assi nel punto di coordinate $(1, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^2} = \frac{(\to -\infty)}{(\to 0^+)} = -\infty$; AV di equazione $x = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$; in quanto $\log x = o(x^2)$ per $x \to +\infty$; AO di equazione $y = 0$.
Il secondo limite è risolvibile anche tramite l'utilizzo del Teorema di de l'Hôpital infatti:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{\frac{1}{\cancel{x}} \cdot x^{\cancel{2}} - \log x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\log x)}{x^4}$. $y' > 0$ se $1 - 2\log x > 0 \Rightarrow \log x < 1/2 \Rightarrow x < e^{1/2}$. Funzione strettamente crescente in $]0, e^{1/2}[$, strettamente decrescente in $]e^{1/2}, +\infty[$. Massimo assoluto in $x = e^{1/2}$ pari a $y\left(e^{1/2}\right) = 1/2e$.
Concavità e convessità: l'esistenza dei due asintoti e la monotonia della funzione precedentemente studiata implicano che l'unico punto di flesso ha ascissa $x^F \in]e^{1/2}, +\infty[$.
Grafico:



.

6) $\int_1^2 \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \log|x|\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6 + \log 2\right) + -\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \log 1\right) = \log 2 - \frac{13}{6}$.

7) $A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 & 2x_3 + x_4 \\ -2x_1 & -2x_3 \end{bmatrix}$; pertanto

$A \cdot X = B$ se e solo se $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 = -1 \\ -2x_3 = 1 \end{cases}$. Da cui facilmente segue: $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1/2$ e $x_4 = 1$.

8) $f'_x = sen(y \cdot z \cdot t)$; $\qquad f'_y = xzt \cdot cos(y \cdot z \cdot t) - \frac{3\,y^2 \cdot t}{2\sqrt{y^3 \cdot t}}$;

$f'_z = xyt \cdot cos(y \cdot z \cdot t)$; $\qquad f'_t = xyz \cdot cos(y \cdot z \cdot t) - \frac{y^3}{2\sqrt{y^3 \cdot t}}$.