Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)
8 febbraio 2021

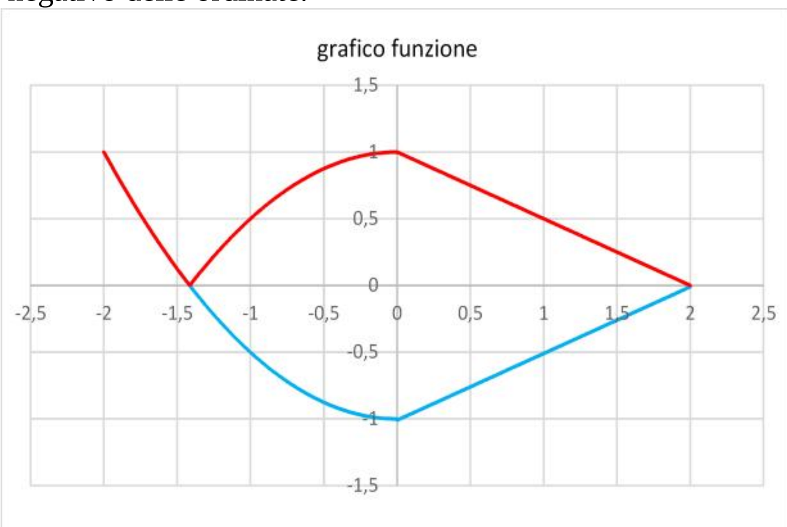
Compito $\mathbb{F}1$

1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui p e r sono entrambe false ed indichiamo con t la proposizione composta
$(q \Rightarrow (p\ o\ s)) \Leftrightarrow ((p\ e\ q)\ o\ \neg r)$.

p	q	r	s	$p\ o\ s$	$p\ e\ q$	$q \Rightarrow (p\ o\ s)$	$(p\ e\ q)\ o\ \neg r$	t
F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	F.
F	F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	V	V	V

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 4\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -2 \vee x > 2\} =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$; $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^x \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R}: 3^x \leq 3^1\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 1\} =]-\infty, 1]$. $A \cup B =]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$, $C(A \cup B) =]1, 2]$ e $C(A \cup B) \cap B = \emptyset$. Il risultato finale può essere ottenuto anche in maniera alternativa notando che $B \subset (A \cup B)$ e quindi gli insiemi $C(A \cup B)$ e B sono insiemi disgiunti.

3) Grafico di $f(x)$ in blé; il grafico di $g(x) = |f(x)|$ in rosso, si ottiene lasciando inalterata la parte del grafico che si trova sul semipiano positivo delle ordinate e ruotando di $180°$, rispetto all'asse delle ascisse, la parte del grafico che si trova sul semipiano negativo delle ordinate.



.

Per determinare l'insieme $g([-1, 1])$ notiamo che g è continua in tutto il suo dominio, strettamente monotona crescente in $[-1, 0]$ e decrescente in $[0, 1]$, con $g(-1) = g(1) = 1/2$ e $g(0) = 1$, ne consegue che $g([-1, 1]) = [1/2, 1]$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x + x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x + x^2)}{(x + x^2)^2} \cdot \frac{\cancel{x^2}(1 + x)^2}{\cancel{x^2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} x \cdot log\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$
$(\to +\infty) \cdot log(\to e) = +\infty$.

5) $C.E.$: $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow 1-x^2>0 \Rightarrow x^2<1 \Rightarrow -1<x<1$; $C.E. =]-1,1[$.

$y(-x) = log\left(\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}\right) = log\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate). La studiamo solo per $x \in [0,1[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $log\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{1+x^2} > 1 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{1+x^2} - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{-2x^2}{1+x^2} > 0$, impossibile. Funzione non positiva in $[0,1[$. $y=0$ se $log\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{-2x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

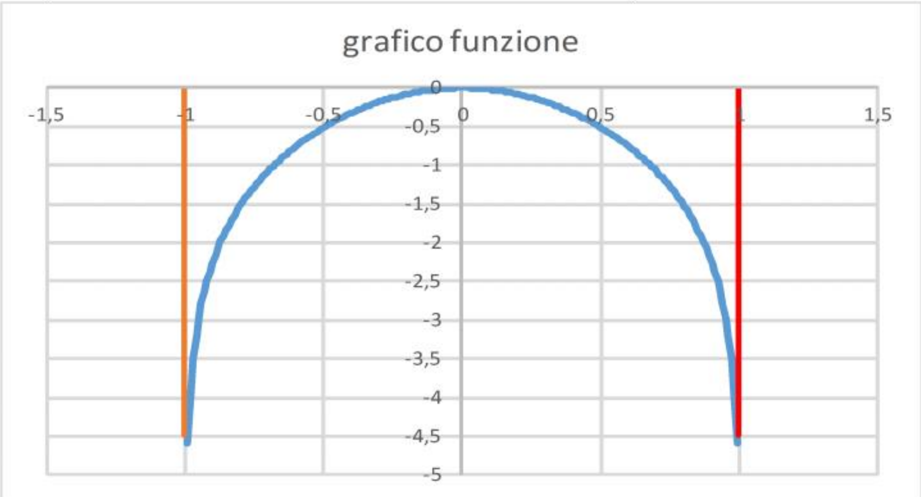
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 1} log\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = log\left(\dfrac{(\to 0)}{(\to 2)}\right) = -\infty$; AV di equazione $x=1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \dfrac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{\cancel{1+x^2}}{1-x^2} \cdot \dfrac{4x}{(1+x^2)^{\cancel{2}}} = -\dfrac{4x}{1-x^4}$. $y'<0$, $\forall x \in]0,1[$. Funzione strettamente decrescente in $[0,1[$. Massimo assoluto nel punto $O(0,0)$.

Concavità e convessità: $y'' = -\dfrac{4(1-x^4)-4x(-4x^3)}{(1-x^4)^2} = -\dfrac{4+12x^4}{(1-x^4)^2}$. $y''<0$, $\forall x \in [0,1[$. Funzione strettamente concava in $[0,1[$.

Grafico (in rosso i due asintoti verticali della funzione):



.

6) Integriamo per parti: $\displaystyle\int (x(e^x+x))\,dx = x\left(e^x+\frac{x^2}{2}\right) - \int\left(1\cdot\left(e^x+\frac{x^2}{2}\right)\right)dx = x\left(e^x+\frac{x^2}{2}\right) - \int\left(e^x+\frac{x^2}{2}\right)dx = x\left(e^x+\frac{x^2}{2}\right) - \left(e^x+\frac{x^3}{6}\right) + c = (x-1)e^x + \frac{x^3}{3} + c$. Passando all'integrale definito si ha $\displaystyle\int_0^1 (x(e^x+x))\,dx =$

$$\left((x-1)e^x+\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \left(0+\frac{1}{3}\right) - (-1+0) = \frac{4}{3}.$$

7) Il polinomio cercato ha espressione $P_2(x) = f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2$. Nel caso specifico risulta: $f(0)=1$, $f'(x)=e^{2x}+2x\cdot e^{2x}-sen\,x=$ $(1+2x)e^{2x}-sen\,x$, $f'(0)=1$, $f''(x)=2e^{2x}+2(1+2x)e^{2x}-cos\,x=$ $4(1+x)e^{2x}-cos\,x$ e $f''(0)=3$. $P_2(x)= 1+x+\frac{3}{2}x^2$.

8) $\nabla f=(f'_x,f'_y,f'_z,f'_w)$:

$$f'_x = -\frac{1}{2\sqrt{x-w-3}}; \qquad f'_y = z\cdot y^{z-1};$$

$$f'_z = y^z\cdot log\,y; \qquad f'_w = \frac{1}{2\sqrt{x-w-3}}.$$

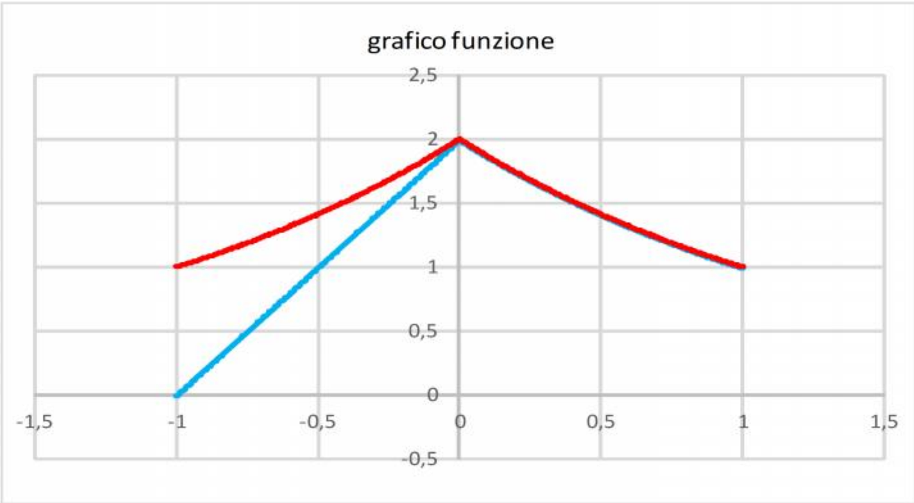
Compito $\mathbb{F}2$

1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui p e r sono entrambe vere ed indichiamo con t la proposizione composta $((p\ e\ q)\Rightarrow(p\ o\ s))\Leftrightarrow\neg(q\ o\ r)$.

p	q	r	s	$p\ e\ q$	$p\ o\ s$	$(p\ e\ q)\Rightarrow(p\ o\ s)$	$\neg(q\ o\ r)$	t
V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	V	F	V	V	V	F	F.
V	F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V	V	F	F

2) $A=\{x\in\mathbb{R}: \sqrt{4-x^2}>1\}=\{x\in\mathbb{R}: 4-x^2>1\}=\{x\in\mathbb{R}: x^2<3\}=$ $\{x\in\mathbb{R}: -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}\}=]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$; $B=\{x\in\mathbb{R}: 3^x\leq 9\}=$ $\{x\in\mathbb{R}: 3^x\leq 3^2\}=\{x\in\mathbb{R}: x\leq 2\}=]-\infty,2]$. $A\cup B=]-\infty,2]$, $C(B)=]2,+\infty[$ e $(A\cup B)\cap C(B)=\emptyset$. Il risultato finale può essere ottenuto anche in maniera alternativa notando che $A\subset B$ e quindi $(A\cup B)=B$, da cui $(A\cup B)\cap C(B)=B\cap C(B)=\emptyset$.

3) Grafico di $f(x)$ in blé; il grafico di $g(x)=f(|x|)$ in rosso, si ottiene lasciando inalterata la parte del grafico che si trova sul semipiano positivo delle ascisse e contemporaneamente riportando sul semipiano negativo delle ascisse la parte del grafico he si trova sul semipiano positivo delle ascisse ruotata di $180°$, rispetto all'asse delle ordinate.



.

Per determinare l'insieme $g([-1,0])$ notiamo che g è continua in tutto il suo dominio e strettamente monotona crescente in $[-1,0]$, con $g(-1)=1$ e $g(0)=2$, ne consegue che $g([-1,0])=[1,2]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos(x+x^2)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-cos(x+x^2)}{(x+x^2)^2}\cdot\dfrac{\cancel{x^2}(1+x)^2}{x^{\cancel{4}2}} =$

$\left(\to\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{(\to 1)}{(\to 0^+)} = +\infty\,.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\cdot log\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2} =$

$(\to 0)\cdot log(\to e) = 0.$

5) $C.E.$: $1+x^2\neq 0 \Rightarrow x^2\neq -1$, vera $\forall x\in\mathbb{R}$; $C.E.=\mathbb{R}$.

$y(-x)=\dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi). La studiamo solo per $x\geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $\dfrac{x}{1+x^2}>0 \Rightarrow x>0$. Funzione positiva per $x>0$. $y=0$ se $\dfrac{x}{1+x^2}=0\Rightarrow x=0$; unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

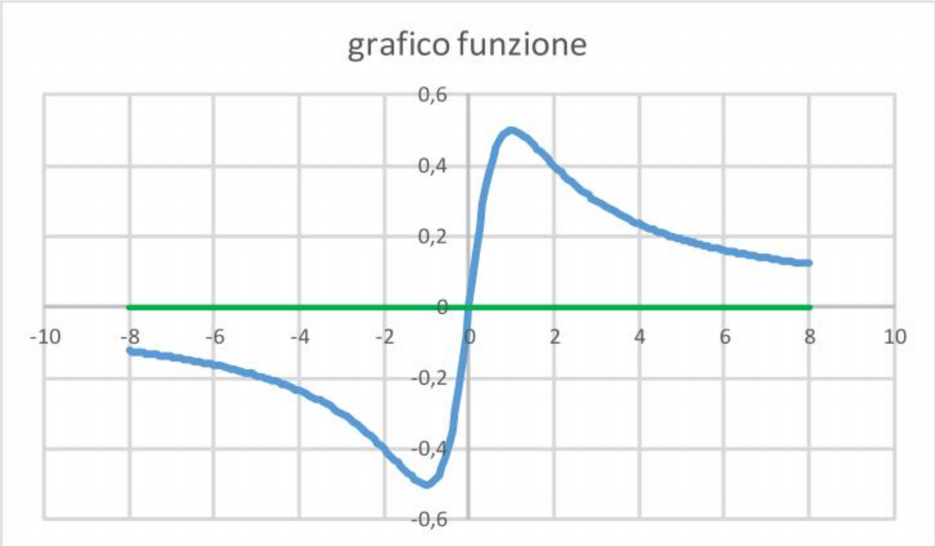
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\frac{1}{x}+x)} = \dfrac{1}{(\to+\infty)} = 0$; AOr di equazione $y=0$.

Crescenza e decrescenza: $y'=\dfrac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. $y'>0,$ se $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}>0\Rightarrow 1-x^2>0\Rightarrow x^2<1\Rightarrow 0<x<1$. Funzione strettamente crescente in $[0,1]$, strettamente decrescente in $[1,+\infty[$. Massimo assoluto nel punto $M(1,1/2)$.

Concavità e convessità: $y''=\dfrac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4} =$

$-\dfrac{2x(1\cancel{+}x^2)(3-x^2)}{(1+x^2)^{\cancel{4}3}} = -\dfrac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$. $y''>0,$ se $-\dfrac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}>0\Rightarrow$

$3 - x^2 < 0 \Rightarrow x^2 > 3 \Rightarrow x > \sqrt{3}$. Funzione strettamente concava in $[0, \sqrt{3}]$, strettamente convessa in $[\sqrt{3}, +\infty[$. Punti di flesso in $O(0,0)$ e in $F(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$. Grafico (in verde l'asintoto orizzontale della funzione):



.

6) Integriamo per sostituzione: posto $\sqrt{x+1} = t$ si ha $x = t^2 - 1$ da cui $dx = 2t\,dt$ e quindi, $\displaystyle\int \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) dx = \int \left(\frac{t^2-1}{\cancel{t}}\right) \cdot 2\cancel{t}\,dt = \int (2t^2 - 2)\,dt =$ $\displaystyle\frac{2}{3}t^3 - 2t + c = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1} + c$. Passando all'integrale definito si ottiene $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) dx = \left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2\sqrt{x+1}\right)_0^3 =$ $\displaystyle\left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$.

7) Per $x \to 0$, $sen\,x = x + o(x)$ mentre $cos\,x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ e quindi

$1 - cos\,x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, ne consegue che $f(x) = sen\,x \cdot (1 - cos\,x) =$

$(x + o(x)) \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$. Rispetto all'infinitesimo campione

$g(x) = x$, $f(x)$ ha ordine 3 e la sua parte principale è $\dfrac{x^3}{2}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$:

$$f'_x = \frac{zx^{z-1}}{x^z + 2}; \qquad f'_y = \frac{w \cdot 2y}{y^4} = \frac{2w}{y^3};$$

$$f'_z = \frac{x^z \cdot log\,x}{x^z + 2}; \qquad f'_w = -\frac{1}{y^2}.$$

Compito $\mathbb{F}3$

1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui p e r sono entrambe vere oppure entrambe false.

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$\neg r$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r$	$p\ e\ q$	$((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (p\ e\ q)$
V	V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	F	F

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x^2 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 9\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq -3 \vee x \geq 3\} =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$; $B = \{x \in \mathbb{R}: log_4 x \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 4^2\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 16\} = [16, +\infty[$. $A \cap B = [16, +\infty[$, $C(A \cap B) =]-\infty, 16[$ e $C(A \cap B) \cup A = \mathbb{R}$. Il risultato finale può essere ottenuto anche in maniera alternativa notando che $B \subset A$ e quindi $(A \cap B) = B$, da cui $C(A \cap B) \cup A = C(B) \cup A \supset C(B) \cup B = \mathbb{R}$.

3) La funzione f è palesemente continua per tutte le $x \neq \pm 2$, è inoltre continua da destra nel punto $x = 2$ e da sinistra nel punto $x = -2$; affinché sia continua in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$, è necessario e sufficiente che si verifichino le seguenti due condizioni:

$u.$ $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x)$;

$uu.$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x)$.

Passiamo al calcolo dei limiti: $\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} a - x^2 = a - 4$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} sen(2\pi x) = 0$; $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} sen(2\pi x) = 0$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} b + 2x = b + 4$. La funzione è quindi continua se si verificano le due condizioni: $a - 4 = 0 = b + 4$, da cui $a = 4$ e $b = -4$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x + x^2)}{sen\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{sen(x+x^2)}{x+x^2}}{\frac{sen\,x}{x}} \cdot \frac{\cancel{x}(1+x)}{\cancel{x}} = \frac{(\to 1)}{(\to 1)} \cdot (\to 1) = 1.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = log(\to e) = 1.$$

5) $C.E.$: $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$; $C.E. = \mathbb{R} \setminus \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{1 + x^2}{1 - x} > 0 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$.

Funzione positiva in $]-\infty, 1[$, negativa in $]1, +\infty[$. $y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + x^2}{1 - x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} + x\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{(\to 0) + (\to \pm\infty)}{(\to 0) - 1} = \mp\infty;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1+x^2}{1-x}}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + x^2}{x - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{(\to 0) + 1}{(\to 0) - 1} = -1;$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + x^2}{1 - x} + x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + x}{1 - x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} + 1\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)} =$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{(\to 0) + 1}{(\to 0) - 1} = -1;$$ AOb di equazione $y = -x - 1$;

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{1+x^2}{1-x} = \frac{(\to 2)}{(\to 0^{\mp})} = \mp\infty;$$ AV di equazione $x = 1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{2x(1-x)-(-1)(1+x^2)}{(1-x)^2} = -\frac{x^2-2x-1}{(1-x)^2}$.

$y' > 0$, se $x^2 - 2x - 1 < 0$. Calcoliamo il $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$,

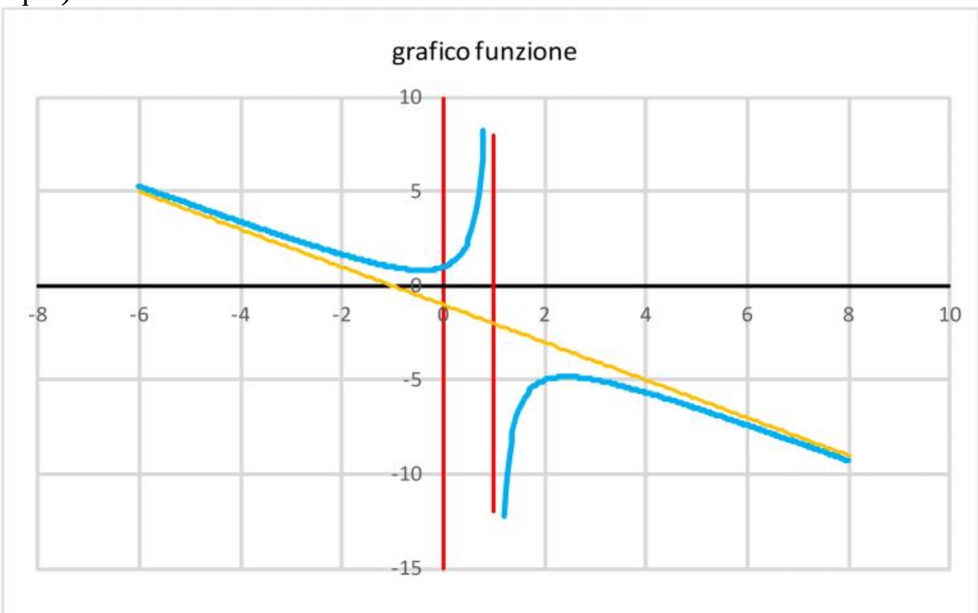
$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, pertanto le soluzioni della disequazione $x^2 - 2x - 1 < 0$ sono le $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$. Funzione strettamente decrescente in $]-\infty, 1-\sqrt{2}]$ e in $[1+\sqrt{2}, +\infty[$, strettamente crescente in $[1-\sqrt{2}, 1[$ e in $]1, 1+\sqrt{2}]$; punto di minimo relativo $x = 1 - \sqrt{2}$, di ordinata $y\left(1-\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$, punto di massimo relativo $x = 1 + \sqrt{2}$, di ordinata $y\left(1+\sqrt{2}\right) = -2\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Concavità e convessità:

$$y'' = -\frac{(2x-2)(1-x)^2 - (x^2-2x-1)\cdot 2(1-x)(-1)}{(1+x)^4} = \frac{4}{(1-x)^3}.$$ $y'' > 0$

se $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 1[$, strettamente concava in $]1, +\infty[$.

Grafico della funzione in blé (in rosso l'asintoto verticale ed in giallo l'asintoto obliquo):



.

6) Integriamo per sostituzione: posto $\sqrt{x-1} = t$ si ha $x = t^2 + 1$ da cui $dx = 2t\,dt$ e quindi, $\int \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right) dx = \int \left(\frac{t^2+1+1}{\cancel{t}}\right) \cdot 2\cancel{t}\,dt = \int \left(2t^2+4\right) dt =$

$\frac{2}{3}t^3 + 4t + c = \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + 4\sqrt{x-1} + c$. Passando all'integrale definito si ottiene $\int_2^5 \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right) dx = \left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + 4\sqrt{x-1}\right)_2^5 =$

$\left(\frac{16}{3} + 8\right) - \left(\frac{2}{3} + 4\right) = \frac{26}{3}$.

7) Per $x \to 0$, $e^x = 1 + o(1)$ mentre $cos\, x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ e quindi

$1 - cos\, x = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, ne consegue che $f(x) = e^x \cdot (1 - cos\, x) =$

$(1 + o(1)) \cdot \left(\dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Rispetto all'infinitesimo campione

$g(x) = x$, $f(x)$ ha ordine 2 e la sua parte principale è $\dfrac{x^2}{2}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$:

$$f'_x = (sen\, w) \cdot 3^x \cdot log\, 3; \qquad f'_y = -e^{2z^2-y};$$

$$f'_z = e^{2z^2-y} \cdot 4z; \qquad f'_w = (cos\, w) \cdot 3^x.$$

Compito $\mathbb{F}4$

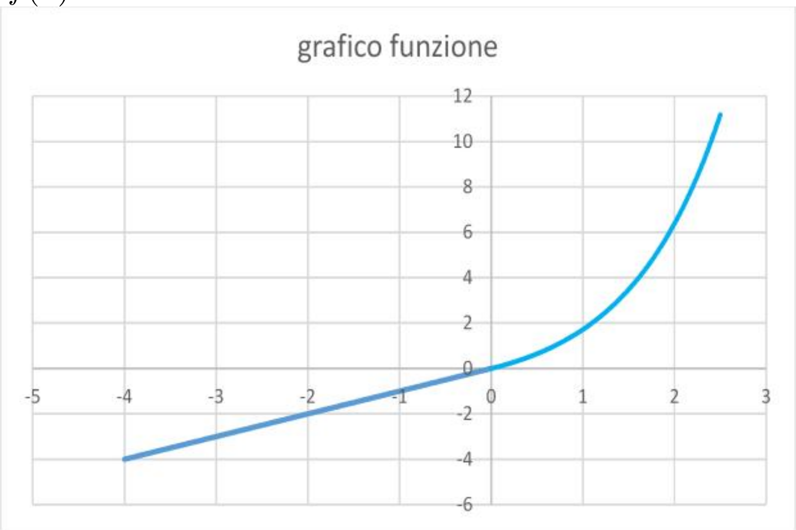
1)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$(p \Rightarrow q)\ o\ p$	s	$(p \Rightarrow q)\ e\ p$	t
V	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F

Come facilmente verificabile tramite la tavola preedente, s è una tautologia e t è una contraddizione.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: e^{1-x} > 1\} = \{x \in \mathbb{R}: e^{1-x} > e^0\} = \{x \in \mathbb{R}: 1 - x > 0\} =$ $\{x \in \mathbb{R}: x < 1\} =]-\infty, 1[$; $B = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{25 - x^2} \geq 4\} =$ $\{x \in \mathbb{R}: 25 - x^2 \geq 16\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 9\} = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 3\} =$ $[-3, 3]$. $A \cup B =]-\infty, 3]$, $C(A \cup B) =]3, +\infty[$, $C(A) = [1, +\infty[$ e $C(A \cup B) \cup C(A) = [1, +\infty[$. Il risultato finale può essere ottenuto anche in maniera alternativa notando che $A \subset (A \cup B)$ e quindi $C(A \cup B) \subset C(A)$, da cui $C(A \cup B) \cup C(A) = C(A)$.

3) Grafico di $f(x)$.



Come è facile notare la funzione è strettamente monotona crescente e continua, $f(-1) = -1$, $f(1) = e - 1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$,

pertanto segue facilmente che $f(]-\infty,1]) =]-\infty, e-1]$ e
$f^{-1}([-1,+\infty[) = [-1,+\infty[$.

4) $\lim_{x\to 0}\dfrac{tg\,x + sen(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\dfrac{tg\,x}{x} + \dfrac{sen(3x)}{3x}\cdot 3\right) = 1 + 1\cdot 3 = 4\,.$

Per il secondo limite, notiamo che per $x \to +\infty$, x^2 e 3^{-x} sono $o(5^{2x})$, pertanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - 3^{-x} + 5^{2x}}{10^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{o(5^{2x}) - o(5^{2x}) + 5^{2x}}{10^x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5^{2x}}{10^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{25^x}{10^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^x = +\infty.$$

5) $C.E.$: $x - \dfrac{x^2}{4} > 0 \Rightarrow \dfrac{4x - x^2}{4} > 0 \Rightarrow x(4-x) > 0$; studiamo separatamente i due fattori: 1. $x > 0$, 2. $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$, la disequazione è verificata per le $0 < x < 4$; $C.E. =]0,4[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $log\left(x - \dfrac{x^2}{4}\right) > 0 \Rightarrow x - \dfrac{x^2}{4} > 1 \Rightarrow$ $x^2 - 4x + 4 < 0 \Rightarrow (x-2)^2 < 0$; impossibile. Funzione non positiva nel suo $C.E.$.

$y = 0$ se $log\left(x - \dfrac{x^2}{4}\right) = 0 \Rightarrow x - \dfrac{x^2}{4} = 1 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Unica intersezione con gli assi nel punto $A(2,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x\to 0^+} log\left(x - \dfrac{x^2}{4}\right) = log(\to 0) = -\infty$; AV di equazione $x = 0$;

$\lim_{x\to 4^-} log\left(x - \dfrac{x^2}{4}\right) = log(\to 0) = -\infty$; AV di equazione $x = 4$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{x - \frac{x^2}{4}}\cdot\left(1 - \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{4}^2}\right) = \dfrac{\cancel{4}^2}{4x - x^2}\cdot\left(\dfrac{2-x}{\cancel{2}}\right) =$
$\dfrac{2(2-x)}{4x - x^2}$. $y' > 0$, se $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$. Funzione strettamente crescente in $]0,2]$, strettamente decrescente in $[2,4[$. Massimo assoluto nel punto $A(2,0)$.

Concavità e convessità: $y'' = 2\cdot\dfrac{(-1)(4x - x^2) - (2-x)(4-2x)}{(4x-x^2)^2} =$
$-2\cdot\dfrac{x^2 - 4x + 8}{(4x - x^2)^2}$. $y'' > 0$ se $x^2 - 4x + 8 < 0$. Calcoliamo il $\Delta = 16 - 32 =$
$-16 < 0$, disequazione mai verificata, funzione strettamente concava[.

Grafico (in rosso i due asintoti verticali della funzione):

.

6) Integriamo per parti: $\int (x \cdot (log\, x + x))\, dx =$
$\frac{x^2}{2}(log\, x + x) - \int \left(\frac{x^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right) dx =$
$\frac{x^2}{2}(log\, x + x) - \int \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{x^2}{2}(log\, x + x) - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right) + c =$
$x^2 \left(\frac{1}{2} \cdot log\, x + \frac{x}{3} - \frac{1}{4} \right) + c$. Passando all'integrale definito si ha
$\int_1^e (x \cdot (log\, x + x))\, dx = \left(x^2 \left(\frac{1}{2} \cdot log\, x + \frac{x}{3} - \frac{1}{4} \right) \right)_1^e =$
$\left(e^2 \left(\frac{1}{2} \cdot log\, e + \frac{e}{3} - \frac{1}{4} \right) \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot log\, 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^3}{3} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{12}$.

7) Per $x \to 0$, $sen\, x = x + o(x)$ mentre $cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, quindi

$sen\, x^2 = x^2 + o(x^2)$ e $1 - cos\, x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, ne consegue che

$f(x) = sen\, x^2 \cdot (1 - cos\, x) = (x^2 + o(x^2)) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$.
Rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, $f(x)$ ha ordine 4 e la sua parte principale è $\frac{x^4}{2}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$:

$$f'_x = 2(x - y); \qquad f'_y = -2(x - y);$$
$$f'_z = -\frac{\sqrt{2 - w}}{z^2}; \qquad f'_w = -\frac{1}{2z\sqrt{2 - w}}.$$

Compito $\mathbb{F}5$

1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui q è falsa e r è vera ed indichiamo con t la proposizione composta $(q \Leftrightarrow (p\ o\ s)) \Rightarrow (\neg(p\ e\ q)\ o\ r)$.

p	q	r	s	$p\, o\, s$	$\neg(p\, e\, q)$	$q \Leftrightarrow (p\, o\, s)$	$\neg(p\, e\, q)\, o\, r$	t
V	F	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	F	V	V .
F	F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V	V

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: e^{1-x} > e^3\} = \{x \in \mathbb{R}: 1-x > 3\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -2\} =]-\infty, -2[$; $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x-5) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0 \vee x \geq 5\} =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$. $A \cup B =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$, $C(A \cup B) =]0, 5[$, $C(A) = [-2, +\infty[$ e $C(A \cup B) \cap C(A) =]0, 5[$. Il risultato finale può essere ottenuto anche in maniera alternativa notando che $A \subset (A \cup B)$ e quindi $C(A \cup B) \subset C(A)$, da cui $C(A \cup B) \cap C(A) = C(A \cup B)$.

3) La funzione f è palesemente continua per tutte le $x \neq \pm 1$, è inoltre continua da destra nel punto $x = -1$ e da sinistra nel punto $x = 1$; affinché sia continua in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$, è necessario e sufficiente che si verifichino le seguenti due condizioni:

$u.\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$;

$uu.\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

Passiamo al calcolo dei limiti: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} -x^2 = -1$;

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} ax + b = -a + b$;

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ax + b = a + b$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2^{-x} + x = \dfrac{3}{2}$. La funzione è quindi continua se si verificano le due condizioni: $-a + b = -1$ e $a + b = \dfrac{3}{2}$, da cui $a = \dfrac{5}{4}$ e $b = \dfrac{1}{4}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen(3x))}{x + tg\, x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen(3x))}{sen(3x)} \cdot \dfrac{\frac{sen(3x)}{3x} \cdot 3}{1 + \frac{tg\, x}{x}} = 1 \cdot \dfrac{1 \cdot 3}{1 + 1} = \dfrac{3}{2}$.

Per il secondo limite, notiamo che per $x \to -\infty$, x^2 e 5^x sono $o(3^{-x})$, pertanto:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3^{-x} + 5^x}{10^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{o(3^{-x}) - 3^{-x} + o(3^{-x})}{10^x} =$$

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{3^{-x}}{10^x} = \lim_{x \to -\infty} -\left(\frac{1}{30}\right)^x = -\infty.$$

5) $C.E.$: $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$; $C.E. = [-1, 1]$.

$y(-x) = (-x)\sqrt{1 - (-x)^2} = -x\sqrt{1 - x^2} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi). La studiamo solo per $x \in [0, 1]$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $x\sqrt{1 - x^2} \geq 0$;, vera $\forall x \in [0, 1]$. Funzione non negativa in $[0, 1]$. $y = 0$ se $x\sqrt{1 - x^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$. Intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $O(0, 0)$ e $A(1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$: la funzione è continua nel suo $C.E.$ (insieme compatto) in quanto composizione di funzioni continue, non sono necessari i limiti agli estremi del $C.E.$ e la funzione non presenta asintoti.

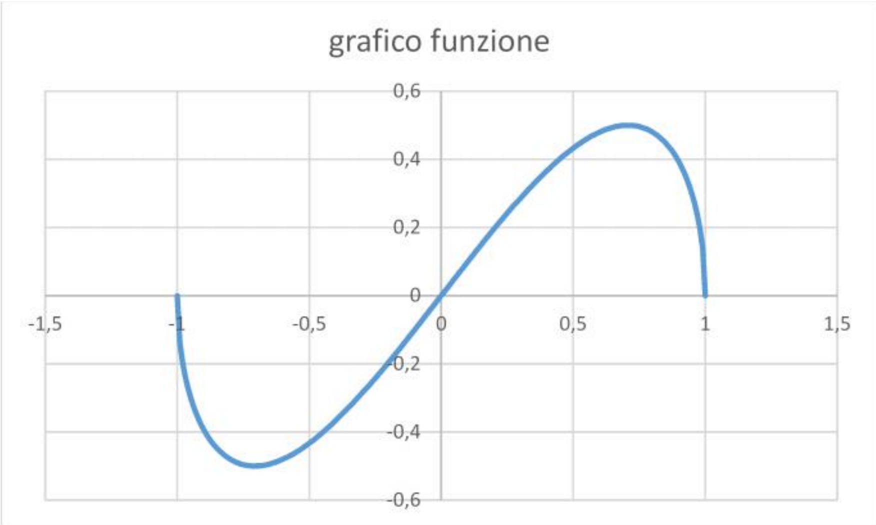
Crescenza e decrescenza: $y' = 1 \cdot \sqrt{1 - x^2} + x \cdot \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

$y' > 0$, se $1 - 2x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1/2 \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{1/2}$. Funzione strettamente crescente in $[0, \sqrt{1/2}]$, strettamente decrescente in $[\sqrt{1/2}, 1]$. Massimo assoluto nel punto $M(\sqrt{1/2}, 1/2)$ e minimo relativo nel punto $A(1,0)$. Notiamo che la funzione non è derivabile nel punto $x = 1$, in particolare si ha $\lim_{x \to 1} y'(x) = -\infty$. Il punto $A(1,0)$ è punto di stop a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} =$

$\dfrac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3} = \dfrac{x(2x^2-3)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$. $y'' \le 0, \forall x \in [0,1[$; funzione strettamente concava in $[0,1]$, unico punto di flesso in $O(0,0)$.

Grafico:



.

6) Integriamo per parti: $\int ((x+e) \cdot \log x)\, dx =$

$\left(\frac{x^2}{2} + ex\right) \cdot \log x - \int \left(\left(\frac{x^2}{2} + ex\right) \cdot \frac{1}{x}\right) dx =$

$\left(\frac{x^2}{2} + ex\right) \cdot \log x - \int \left(\frac{x}{2} + e\right) dx =$

$\left(\frac{x^2}{2} + ex\right) \cdot \log x - \left(\frac{x^2}{4} + ex\right) + c = x\left(\left(\frac{x}{2} + e\right) \cdot \log x - \left(\frac{x}{4} + e\right)\right) + c$.

Passando all'integrale definito si ha $\int_1^e ((x+e) \cdot \log x)\, dx =$

$\left(x\left(\left(\frac{x}{2} + e\right) \cdot \log x - \left(\frac{x}{4} + e\right)\right)\right)_1^e =$

$\left(e\left(\left(\frac{e}{2} + e\right) \cdot \log e - \left(\frac{e}{4} + e\right)\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{2} + e\right) \cdot \log 1 - \left(\frac{1}{4} + e\right)\right) =$

$\frac{e^2}{4} + e + \frac{1}{4}$.

7) Per $x \to 0$, $sen\, x = x + o(x)$ mentre $e^x = 1 + x + o(x)$, quindi $sen\, x^2 = x^2 + o(x^2)$, $e^{3x} = 1 + 3x + o(x)$ e $1 - e^{3x} = -3x + o(x)$, ne consegue che $f(x) = sen\, x^2 \cdot (1 - e^{3x}) = (x^2 + o(x^2)) \cdot (-3x + o(x)) =$ $-3x^3 + o(x^3)$. Rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, $f(x)$ ha ordine 3 e la sua parte principale è $-3x^3$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$:

$$f'_x = \frac{-z \cdot sen\,(x-y)}{3-w}\,; \qquad f'_y = \frac{z \cdot sen\,(x-y)}{3-w}\,;$$

$$f'_z = \frac{cos\,(x-y)}{3-w}\,; \qquad f'_w = \frac{z \cdot cos\,(x-y)}{(3-w)^2}\,.$$

Compito $\mathbb{F}6$

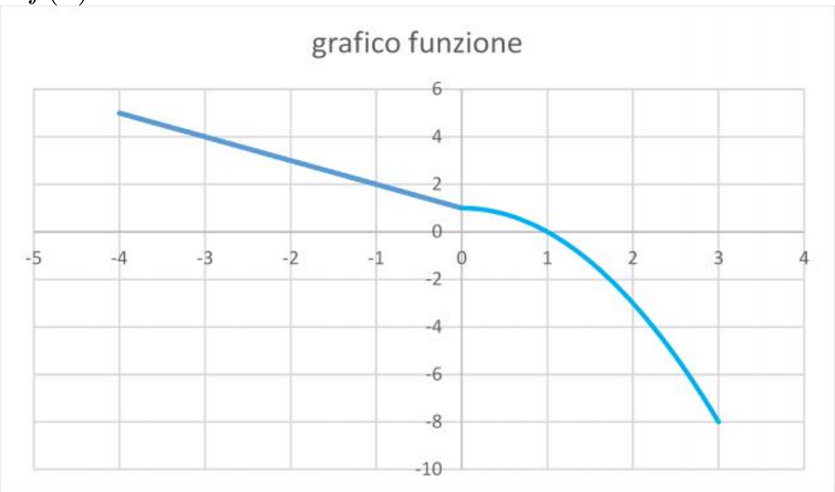
1)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\; e\; \neg q$	s	$\neg p\; o\; \neg q$	t
V	V	F	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	F

Come facilmente verificabile tramite la tavola preedente, s è una tautologia e t è una contraddizione.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: log_5 x > 1\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 5\} =]5, +\infty[$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 1 - 2^x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \geq 2^0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty[$. $A \cap B =]5, +\infty[$, $C(A \cap B) =]-\infty, 5]$, $C(B) =]-\infty, 0[$ e $C(A \cap B) \cup C(B) =]-\infty, 5]$. Il risultato finale può essere ottenuto anche in maniera alternativa notando che $(A \cap B) \subset B$ e quindi $C(B) \subset C(A \cap B)$, da cui $C(A \cap B) \cup C(B) = C(A \cap B)$.

3) Grafico di $f(x)$.



.

Come è facile notare la funzione è strettamente monotona decrescente e continua, $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$, e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, pertanto segue facilmente che $f([-1, +\infty[) =]-\infty, 2]$ e $f^{-1}(]-\infty, 1]) = [0, +\infty[$.

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{log(1 + log\,x)}{log(1+x)} = \frac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ (FI). Applichiamo il Teorema di de l'Hôpital: $\lim_{x \to +\infty} \frac{log(1 + log\,x)}{log(1+x)} \underline{\underline{H}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{1+log\,x} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}} =$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + log\,x} \cdot \frac{1+x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1+log\,x} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right) =$
$\frac{1}{(1 + (\to +\infty))} \cdot ((\to 0) + 1) = 0.$

Per il secondo limite, notiamo che per $x \to -\infty$, x^2 è $o(x^5)$ e x^3 è $o(5x^4)$, pertanto: $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x^5}{x^3 + 5x^4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{o(x^5) - x^5}{o(5x^4) + 5x^4} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{x^5}{5x^4} = \lim_{x \to -\infty} -\frac{x}{5} = +\infty$.

5) $C.E.$: $x \geq 0$; $C.E. = R_+ = [0, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $(1 - x^2)\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0; \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$. Funzione non negativa in $[0, 1]$. $y = 0$ se $(1 - x^2)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \vee 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$. Intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $O(0, 0)$ e $A(1, 0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to +\infty} (1 - x^2)\sqrt{x} = (\to -\infty) \cdot (\to +\infty) = -\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1 - x^2)\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} - x\right)\sqrt{x} =$
$((\to 0) - (\to +\infty)) \cdot (\to +\infty) = -\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = -2x\sqrt{x} + (1 - x^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1 - 5x^2}{2\sqrt{x}}$. $y' > 0$, se $1 - 5x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1/5 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{1/5}$. Funzione strettamente crescente in $[0, \sqrt{1/5}]$, strettamente decrescente in $[\sqrt{1/5}, +\infty[$. Minimo relativo nel punto $O(0, 0)$ e massimo assoluto nel punto $M\left(\sqrt{\frac{1}{5}}, \frac{4}{5}\sqrt[4]{\frac{1}{5}}\right)$. Notiamo che la funzione non è derivabile nel punto $x = 0$, in particolare si ha $\lim_{x \to 0} y'(x) = +\infty$. Il punto $O(0, 0)$ è punto di stop a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{-10x(2\sqrt{x}) - (1 - 5x^2) \cdot \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{2}\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = -\frac{1 + 15x^2}{4x\sqrt{x}}$.

$y'' < 0, \forall x \in]0, +\infty[$; funzione strettamente concava.

Grafico:

.

6) Integriamo per parti: $\int (3x \cdot e^{-x})\, dx =$

$3x \cdot (-e^{-x}) - \int (3 \cdot (-e^{-x}))\, dx = -3xe^{-x} + \int (3e^{-x})\, dx =$

$-3xe^{-x} + (-3e^{-x}) + c = -3(x+1)e^{-x} + c$. Passando all'integrale definito si ha $\int_0^1 (3x \cdot e^{-x})\, dx = (-3(x+1)e^{-x})_0^1 =$ $\left(-6e^{-1}\right) - (-3) = 3\left(1 - 2e^{-1}\right)$.

7) Il polinomio cercato ha espressione $P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2$. Nel caso specifico risulta: $f(0) = 0$, $f'(x) = -sen\,x + (1-x) \cdot cos\,x + sen\,x =$ $(1-x) \cdot cos\,x$, $f'(0) = 1$, $f''(x) = -cos\,x - (1-x) \cdot sen\,x$ e $f''(0) = -1$. $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$:

$$f'_x = 3x^2 - y \cdot sen\,x\,; \qquad f'_y = cos\,x\,;$$

$$f'_z = -\frac{1}{z}\,; \qquad f'_w = 2\,.$$

Compito $\mathbb{F}7$

1)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p\ o\ (p \Rightarrow q)$	s	$p\ e\ (p \Rightarrow q)$	t
V	V	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	F	V

Come facilmente verificabile tramite la tavola preedente, s è una tautologia e t è né una tautologia, né una contraddizione.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: log_5(x^2-4) > 1\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 5\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 9\} =$ $\{x \in \mathbb{R}: x^2 > 9\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -3 \vee x > 3\} =]-\infty, -3[\cup]3, +\infty[$; $B = \{x \in \mathbb{R}: 4 - 2^x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \geq 4\} = \{x \in \mathbb{R}: 2^x \geq 2^2\} =$ $\{x \in \mathbb{R}: x \geq 2\} = [2, +\infty[$. $A \cap B =]3, +\infty[$, $C(B) =]-\infty, 2[$ e $(A \cap B) \cup C(B) =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

3) La funzione f è palesemente continua per tutte le $x \neq \pm 3$, è inoltre continua da destra nel punto $x = -3$ e da sinistra nel punto $x = 3$; affinché sia continua in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$, è necessario e sufficiente che si verifichino le seguenti due condizioni:

$u.$ $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x)$;
$uu.$ $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$.

Passiamo al calcolo dei limiti: $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} -x = 3$; $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} ax + b = -3a + b$; $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} ax + b = 3a + b$; $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 3^x - 9x = 0$. La funzione è quindi continua se si verificano le due condizioni: $-3a + b = 3$ e $3a + b = 0$, da cui $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(3 \cdot tg\,x)}{sen\,x + tg\,x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(3 \cdot tg\,x)}{3 \cdot tg\,x} \cdot 3 \cdot \frac{\frac{tg\,x}{x}}{\frac{sen\,x}{x} + \frac{tg\,x}{x}} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$.

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x =$$
$(\to -\infty) \cdot log(\to e) = -\infty.$

5) $C.E.$: $1+x \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$; $C.E. = [-1, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0, \forall x \in C.E.$ in quanto prodotto di quantità non negative. $y = 0$ se $(x-4)^2 \cdot \sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x - 4 = 0 \vee 1 + x = 0 \Rightarrow$ $x = 4 \vee x = -1$. Intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $A(-1, 0)$ e $B(4, 0)$. $y(0) = 16$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x \to +\infty} (x-4)^2 \cdot \sqrt{1+x} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-4)^2 \cdot \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)^2 \sqrt{1+x} =$$

$(\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2(x-4)\sqrt{1+x} + (x-4)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} =$

$$(x-4)\left(2\sqrt{1+x} + \frac{x-4}{2\sqrt{1+x}}\right) = (x-4) \cdot \frac{5x}{2\sqrt{1+x}}.$$ $y' > 0,$ se $(x-4) \cdot 5x > 0$; studiamo separatamente i due fattori: 1. $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$, 2. $5x > 0 \Rightarrow x > 0$, la disequazione è verificata per le $-1 < x < 0 \vee x > 4$. Funzione strettamente crescente in $[-1, 0]$ e in $[4, +\infty[$, strettamente decrescente in $[0, 4]$. Minimo assoluto nei punti $A(-1, 0)$ e $B(4, 0)$, massimo relativo nel punto $M(0, 16)$. Notiamo che la funzione non è derivabile nel punto $x = -1$, in particolare si ha $\lim_{x \to -1} y'(x) = +\infty$. Il punto $A(-1, 0)$ è punto di stop a tangente verticale.

Concavità e convessità: l'esistenza di un unico punto di flesso insieme ai due punti di minimo ed al punto di massimo prima determinati, implicano che l'ascissa del flesso è $x_f \in]0, 4[$; con funzione strettamente concava in $[-1, x_f]$, strettamente convessa in $[x_f, +\infty[$

Grafico:

.

6) Integriamo per sostituzione: posto $\sqrt{2x-1} = t$ si ha $x = \dfrac{t^2+1}{2}$ da cui $dx = t\,dt$ e quindi, $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right) dx = \int \left(\frac{1}{\cancel{t}}\right) \cdot \cancel{t}\, dt = \int dt = t + c = \sqrt{2x-1} + c$.

Passando all'integrale definito si ottiene $\displaystyle\int_1^5 \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right) dx = \left(\sqrt{2x-1}\right)_1^5 =$ $3 - 1 = 2$.

7) Il polinomio cercato ha espressione $P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \dfrac{f''(0)}{2} \cdot x^2$. Nel caso specifico risulta: $f(0) = 2$, $f'(x) = -\cos x - (1-x) \cdot \operatorname{sen} x - \cos x =$ $-2\cos x - (1-x) \cdot \operatorname{sen} x$, $f'(0) = -2$,

$f''(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - (1-x) \cdot \cos x = 3\operatorname{sen} x - (1-x) \cdot \cos x$ e $f''(0) = -1$. $P_2(x) = 2 - 2x - \dfrac{1}{2}x^2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$:

$$f'_x = 3w^2 \cdot x^{3w^2-1}; \qquad f'_y = \frac{\operatorname{sen} y}{z + \cos y};$$

$$f'_z = -\frac{1}{z + \cos y}; \qquad f'_w = x^{3w^2} \cdot \log x \cdot 6w.$$