

# Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 febbraio 2021

Compito  $\mathbb{F}1$  ✓

- 1) (6 punti) Siano date quattro proposizioni semplici  $p, q, r$  e  $s$ . Sotto l'ipotesi che le proposizioni  $p$  e  $r$  siano entrambe false, costruire la tavola di verità della proposizione composta:  $(q \Rightarrow (p \circ s)) \Leftrightarrow ((p \circ q) \circ \neg r)$ .
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 > 0\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^x \leq 3\}$ . Esprimere gli insiemi  $A$  e  $B$  come intervalli oppure unione di due intervalli e determinare l'insieme  $C(A \cup B) \cap B$ . (Con  $C(X)$  indichiamo l'insieme complementare dell'insieme  $X$ )
- 3) (8 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-2, 2]$ , codominio  $[-1, 1]$  e
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1 & \text{per } -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2} - 1 & \text{per } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$
, e sia  $g(x) = |f(x)|$ . Disegnare i grafici delle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  e determinare l'insieme  $g([-1, 1])$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x + x^2)}{x^2}$  ;
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = \log\left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_0^1 (x(e^x + x)) dx$ . (Suggerimento: si consiglia di utilizzare un opportuno metodo di integrazione)
- 7) (7 punti) Determinare l'espressione del polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione  $f(x) = x \cdot e^{2x} + \cos x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:
$$f(x, y, z, w) = y^z - \sqrt{x - w - 3}.$$

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

# Università degli Studi di Siena

## Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 febbraio 2021

Compito  $\mathbb{F}2$ ✓

- 1) (6 punti) Siano date quattro proposizioni semplici  $p, q, r$  e  $s$ . Sotto l'ipotesi che le proposizioni  $p$  e  $r$  siano entrambe vere, costruire la tavola di verità della proposizione composta:  $((p \text{ e } q) \Rightarrow (p \text{ o } s)) \Leftrightarrow \neg(q \text{ o } r)$ .
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{4 - x^2} > 1\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: 3^x \leq 9\}$ . Esprimere gli insiemi  $A$  e  $B$  come intervalli oppure unione di due intervalli e determinare l'insieme  $(A \cup B) \cap C(B)$ . (Con  $C(X)$  indichiamo l'insieme complementare dell'insieme  $X$ )
- 3) (8 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $[-1, 1]$ , codominio  $[0, 2]$  e 
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ 2^{1-x} & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$
, e sia  $g(x) = f(|x|)$ . Disegnare i grafici delle funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  e determinare l'insieme  $g([-1, 0])$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x + x^2)}{x^4}$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = \frac{x}{1 + x^2}$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_0^3 \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) dx$ . (Suggerimento: si consiglia di utilizzare un opportuno metodo di integrazione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di espressione  $f(x) = \sin x \cdot (1 - \cos x)$ . Per  $x \rightarrow 0$ , determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo  $f(x)$  rispetto all'infinitesimo campione  $g(x) = x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:  
$$f(x, y, z, w) = \log(x^z + 2) - \frac{w}{y^2}$$
.

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

# Università degli Studi di Siena

## Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 febbraio 2021

Compito  $\mathbb{F}3$ ✓

- 1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici  $p$ ,  $q$  e  $r$ . Sotto l'ipotesi che le proposizioni  $p$  e  $r$  siano entrambe vere oppure entrambe false, costruire la tavola di verità della proposizione composta:  $((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r) \Rightarrow (p \vee q)$ .
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x^2 \leq 0\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: \log_4 x \geq 2\}$ . Esprimere gli insiemi  $A$  e  $B$  come intervalli oppure unione di due intervalli e determinare l'insieme  $C(A \cap B) \cup A$ . (Con  $C(X)$  indichiamo l'insieme complementare dell'insieme  $X$ )
- 3) (8 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $\mathbb{R}$ , codominio  $\mathbb{R}$  e
$$f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{per } x < -2 \\ \text{sen}(2\pi x) & \text{per } -2 \leq x \leq 2 \\ b + 2x & \text{per } 2 < x \end{cases}$$
. Determinare i valori dei parametri  $a$  e  $b$  che rendono la funzione continua sul suo dominio  $\mathbb{R}$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + x^2)}{\text{sen } x}$  ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = \frac{1 + x^2}{1 - x}$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_2^5 \left(\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}\right) dx$ . (Suggerimento: si consiglia di utilizzare un opportuno metodo di integrazione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di espressione  $f(x) = e^x \cdot (1 - \cos x)$ . Per  $x \rightarrow 0$ , determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo  $f(x)$  rispetto all'infinitesimo campione  $g(x) = x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:  
 $f(x, y, z, w) = e^{2z^2 - y} + (\text{sen } w) \cdot 3^x$ .

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

# Università degli Studi di Siena

## Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 febbraio 2021

Compito  $\mathbb{F}4$ ✓

- 1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici  $p$  e  $q$  e siano  $s$  e  $t$  le proposizioni composte seguenti:  
 $s: \neg q \text{ o } ((p \Rightarrow q) \text{ o } p);$   
 $t: \neg q \text{ e } ((p \Rightarrow q) \text{ e } p).$   
Indicare se fra le proposizioni composte  $s$  e  $t$  vi sono delle contraddizioni o delle tautologie.
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R}: e^{1-x} > 1\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: \sqrt{25 - x^2} \geq 4\}$ . Esprimere gli insiemi  $A$  e  $B$  come intervalli oppure unione di due intervalli e determinare l'insieme  $C(A \cup B) \cup C(A)$ . (Con  $\mathcal{C}(X)$  indichiamo l'insieme complementare dell'insieme  $X$ )
- 3) (8 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $\mathbb{R}$ , codominio  $\mathbb{R}$  e  
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x \leq 0 \\ e^x - 1 & \text{per } 0 < x \end{cases}$$
. Disegnare il grafico della funzione  $f$  e determinare gli insiemi  $f([-\infty, 1])$  e  $f^{-1}([-1, +\infty[)$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen}(3x)}{x}$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3^{-x} + 5^{2x}}{10^x}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = \log\left(x - \frac{x^2}{4}\right)$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_1^e (x \cdot (\log x + x)) dx$ . (Suggerimento: si consiglia di utilizzare un opportuno metodo di integrazione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di espressione  $f(x) = \operatorname{sen} x^2 \cdot (1 - \cos x)$ . Per  $x \rightarrow 0$ , determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo  $f(x)$  rispetto all'infinitesimo campione  $g(x) = x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:  
$$f(x, y, z, w) = (x - y)^2 + \frac{\sqrt{2 - w}}{z}$$
.

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

# Università degli Studi di Siena

## Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 febbraio 2021

Compito  $\mathbb{F}5$ ✓

- 1) (6 punti) Siano date quattro proposizioni semplici  $p, q, r$  e  $s$ . Sotto l'ipotesi che la proposizione  $q$  sia falsa e la proposizione  $r$  sia vera, costruire la tavola di verità della proposizione composta:  $(q \Leftrightarrow (p \circ s)) \Rightarrow (\neg(p \circ q) \circ r)$ .
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R}: e^{1-x} > e^3\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x \geq 0\}$ . Esprimere gli insiemi  $A$  e  $B$  come intervalli oppure unione di due intervalli e determinare l'insieme  $C(A \cup B) \cap C(A)$ . (Con  $C(X)$  indichiamo l'insieme complementare dell'insieme  $X$ )
- 3) (8 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $\mathbb{R}$ , codominio  $\mathbb{R}$  e
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{per } x < -1 \\ ax + b & \text{per } -1 \leq x \leq 1 \\ 2^{-x} + x & \text{per } 1 < x \end{cases}$$
Determinare i valori dei parametri  $a$  e  $b$  che rendono la funzione continua sul suo dominio  $\mathbb{R}$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(\text{sen}(3x))}{x + \text{tg } x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3^{-x} + 5^x}{10^x}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = x\sqrt{1-x^2}$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_1^e ((x+e) \cdot \log x) dx$ . (Suggerimento: si consiglia di utilizzare un opportuno metodo di integrazione)
- 7) (7 punti) Sia data la funzione di espressione  $f(x) = \text{sen } x^2 \cdot (1 - e^{3x})$ . Per  $x \rightarrow 0$ , determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo  $f(x)$  rispetto all'infinitesimo campione  $g(x) = x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:
$$f(x, y, z, w) = \frac{z \cdot \cos(x - y)}{3 - w}$$

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

# Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 febbraio 2021

Compito  $\mathbb{F}6$ ✓

- 1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici  $p$  e  $q$  e siano  $s$  e  $t$  le proposizioni composte seguenti:  
 $s: \neg((\neg p \wedge \neg q) \wedge p)$ ;  
 $t: \neg((\neg p \vee \neg q) \vee p)$ .  
Indicare se fra le proposizioni composte  $s$  e  $t$  vi sono delle contraddizioni o delle tautologie.
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R}: \log_5 x > 1\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: 1 - 2^x \leq 0\}$ . Esprimere gli insiemi  $A$  e  $B$  come intervalli oppure unione di due intervalli e determinare l'insieme  $C(A \cap B) \cup C(B)$ . (Con  $C(X)$  indichiamo l'insieme complementare dell'insieme  $X$ )
- 3) (8 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $\mathbb{R}$ , codominio  $\mathbb{R}$  e  
 $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{per } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{per } 0 < x \end{cases}$ . Disegnare il grafico della funzione  $f$  e determinare gli insiemi  $f([-1, +\infty[)$  e  $f^{-1}(]-\infty, 1])$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + \log x)}{\log(1 + x)}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^5}{x^3 + 5x^4}$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = (1 - x^2)\sqrt{x}$ .
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_0^1 (3x \cdot e^{-x}) dx$ . (Suggerimento: si consiglia di utilizzare un opportuno metodo di integrazione)
- 7) (7 punti) Determinare l'espressione del polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione  $f(x) = (1 - x) \cdot \sin x + 1 - \cos x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:  
 $f(x, y, z, w) = x^3 - \log z + 2w + y \cdot \cos x$ .

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

# Università degli Studi di Siena

## Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 febbraio 2021

Compito F7✓

- 1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici  $p$  e  $q$  e siano  $s$  e  $t$  le proposizioni composte seguenti:  
 $s: \neg q \Rightarrow (p \circ (p \Rightarrow q))$ ;  
 $t: (p \text{ e } (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg q$ .  
Indicare se fra le proposizioni composte  $s$  e  $t$  vi sono delle contraddizioni o delle tautologie.
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi  $A = \{x \in \mathbb{R}: \log_5(x^2 - 4) > 1\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}: 4 - 2^x \leq 0\}$ . Esprimere gli insiemi  $A$  e  $B$  come intervalli oppure unione di due intervalli e determinare l'insieme  $(A \cap B) \cup C(B)$ . (Con  $C(X)$  indichiamo l'insieme complementare dell'insieme  $X$ )
- 3) (8 punti) Sia  $f$  una funzione con dominio  $\mathbb{R}$ , codominio  $\mathbb{R}$  e  
$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } x < -3 \\ ax + b & \text{per } -3 \leq x \leq 3 \\ 3^x - 9x & \text{per } 3 < x \end{cases}$$
. Determinare i valori dei parametri  $a$  e  $b$  che rendono la funzione continua sul suo dominio  $\mathbb{R}$ .
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3 \cdot \text{tg } x)}{\text{sen } x + \text{tg } x}$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ .
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione  $y = (x - 4)^2 \cdot \sqrt{1 + x}$ . (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta un unico punto di flesso)
- 6) (8 punti) Calcolare  $\int_1^5 \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}}\right) dx$ . (Suggerimento: si consiglia di utilizzare un opportuno metodo di integrazione)
- 7) (7 punti) Determinare l'espressione del polinomio di MacLaurin di secondo grado della funzione  $f(x) = (1 - x) \cdot \cos x + 1 - \text{sen } x$ .
- 8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:  
 $f(x, y, z, w) = x^{3w^2} - \log(z + \cos y)$ .

---

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.