Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)
11 gennaio 2020

Compito $\mathbb{G}1$

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata:

$$\begin{array}{ccccc} p & q & p \Rightarrow q & \neg p \; o \; q & (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \; o \; q) \\ V & V & V & V & V \\ V & F & F & F & V \\ F & V & V & V & V \\ F & F & V & V & V \end{array}.$$

Dall'ultima colonna della tavola di verità deriva che la proposizione proposta è una tautologia.

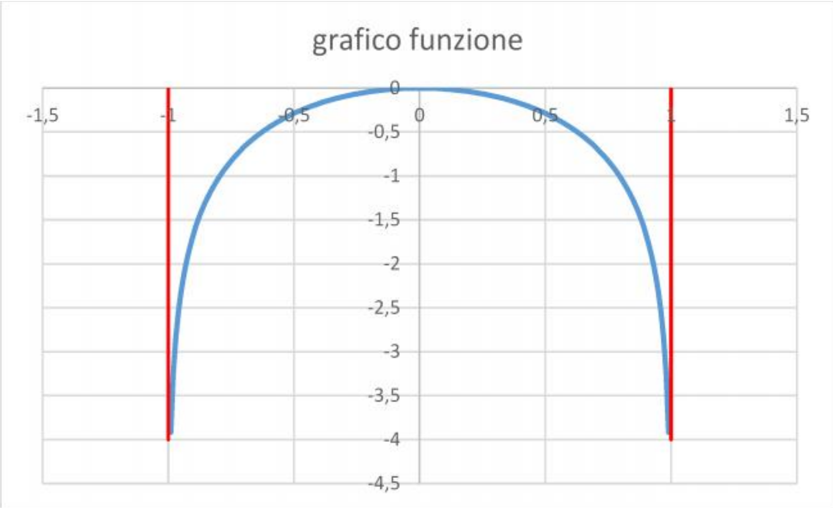
2) $A = [2;5] \cup]3;2\pi[= [2;2\pi[$, $B \subset A$ quindi $A \cap B = B$ e $A \cup B = A$.
$Sup(A \cap B) = Sup(B) = 6$, e 6 è anche massimo di $A \cap B$ perché $6 \in A \cap B$.
$Inf(A \cup B) = Inf(A) = 2$, e 2 è anche minimo di $A \cup B$ perché $2 \in A \cup B$.

3) Per prima cosa determiniamo l'espressione di g; a tal fine posto $y = \dfrac{3}{1+x}$ si ottiene $1 + x = \dfrac{3}{y}$ da cui $x = \dfrac{3}{y} - 1$. $g(x) = \dfrac{3}{x} - 1$ e
$g(f(x)) = g\left(2 - \sqrt{x}\right) = \dfrac{3}{2 - \sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x + x^2)}{3x - x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x + x^2)}{x + x^2} \cdot \dfrac{\cancel{x}(1 + x)}{\cancel{x}(3 - x)} = 1 \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Per il secondo limite, notiamo che per $x \to +\infty$, x e $2x^3$ sono $o(e^x)$ e $2x^2$ è $o(3^x)$, pertanto: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2x^3 - e^x}{3^x - 2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{o(e^x) + o(e^x) - e^x}{3^x - o(3^x)} =$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-e^x}{3^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\left(\dfrac{e}{3}\right)^x = 0$.

5) $C.E.$: $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$; $C.E. =]-1, 1[$.
$y(-x) = log\left(1 - (-x)^2\right) = log\left(1 - x^2\right) = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate). la studiamo solo per $x \in [0, 1[$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $log\left(1 - x^2\right) > 0 \Rightarrow 1 - x^2 > 1 \Rightarrow$ $x^2 < 0$, impossibile. Funzione non positiva nel suo campo di esistenza. $y = 0$ se $log\left(1 - x^2\right) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$; unica intersezione con gli assi nel punto $O(0, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim\limits_{x \to 1} log\left(1 - x^2\right) = log(\to 0) = -\infty$; AV di equazione $x = 1$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$. $y' < 0$, $\forall x \in]0, 1[$. Funzione strettamente decrescente in $[0, 1[$. Massimo assoluto nel punto $O(0, 0)$.
Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-2(1 - x^2) + 2x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = -\dfrac{2 + 2x^2}{(1 - x^2)^2}$. $y'' < 0$, $\forall x \in [0, 1[$. Funzione strettamente concava in $[0, 1[$.
Grafico (in rosso i due asintoti verticali della funzione):



.

6) $\int_1^4 \left(x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx \; = \; \left(\frac{x^3}{3} - 2x\sqrt{x} + 3\,log|x|\right)_1^4 \; = \; \left(\frac{64}{3} - 16 + 3\,log\,4\right) \; - \; \left(\frac{1}{3} - 2 + 3\,log\,1\right) \; = \; 7 + 3\,log\,4\,.$

7) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione è $y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. $y(x_0) = y(-2) = 11$, $y' = 6x$ e $y'(x_0) = y'(-2) = -12$. L'equazione della retta tangente richiesta è pertanto $y - 11 = -12 \cdot (x+2)$ che può essere riscritta come $y = -12x - 13$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = 3x^2 z\,; \qquad f'_y = -e^{y-3z}\,; \qquad f'_z = x^3 + 3e^{y-3z}\,.$$

Compito $\mathbb{G}2$

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata:

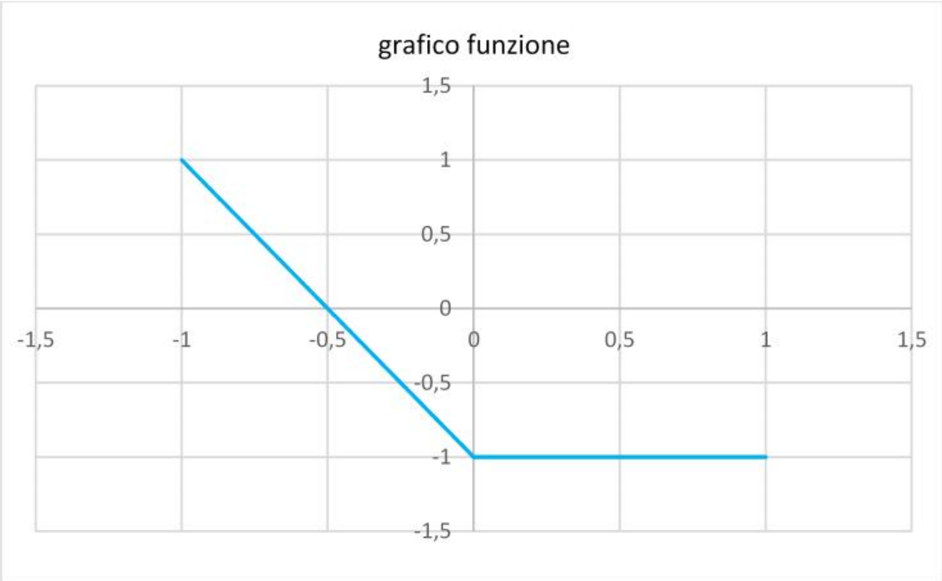
p	q	$p \Rightarrow \neg q$	$p\ e\ q$	$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p\ e\ q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

.

Dall'ultima colonna della tavola di verità deriva che la proposizione proposta è una contraddizione.

2) $A \cup B = \,]-2; 0[\, \cup \{2\} \cup [3; \pi[$; $A \cap B = \{3\}$. $Sup(A \cup B) = \pi$, e π non è massimo di $A \cup B$ perché $\pi \notin A \cup B$. $Inf(A \cap B) = 3$, e 3 è anche minimo di $A \cap B$ perché $3 \in A \cap B$.

3) Grafico di $f(x)$.



.

$f(-1/2) = 0$ e $f(1/2) = -1$, per la continuità e la monotonia decrescente di f segue che $f([-1/2, 1/2]) = [-1, 0]$; per l'insieme $f^{-1}([0,1])$ notiamo che $f(-1) = 1$ e da $f(-1/2) = 0$, sempre per la continuità e la stretta monotonia decrescente di f nell'insieme $[-1, 0]$, si ottiene $f^{-1}([0,1]) = [-1, -1/2]$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{x} - \dfrac{2^x - 1}{x} = log\, 3 - log\, 2 = log\, \dfrac{3}{2}$.

Per il secondo limite,si ha che per $x \to +\infty$, $log\, x$ è $o(2^x)$ e $2x^2$ e $sen\, x$ sono $o(e^x)$, pertanto: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\, x + 2^x}{e^x + 2x^2 - sen\, x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{o(2^x) + 2^x}{e^x + o(e^x) - o(e^x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{e}\right)^x = 0.$

5) $C.E.$: $1 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$; $C.E. =]-\infty, 1]$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\sqrt{1-x} - 2x > 0 \Rightarrow \sqrt{1-x} > 2x$, disequazione sicuramente verificata per le $x \leq 0$; per le $x > 0$ possiamo passare al quadrato di entrambi i termini ed otteniamo la disequazione: $1 - x > 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + x - 1 < 0$. Calcoliamo il $\Delta = 1 + 16 = 17 > 0$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$, con unica soluzione compresa fra 0 e 1 pari a $\frac{-1+\sqrt{17}}{8}$. Funzione positiva in $]-\infty, \frac{-1+\sqrt{17}}{8}[$, negativa in $]\frac{-1+\sqrt{17}}{8}, 1]$; unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(\frac{-1+\sqrt{17}}{8}, 0)$. $y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} - 2x = +\infty$;

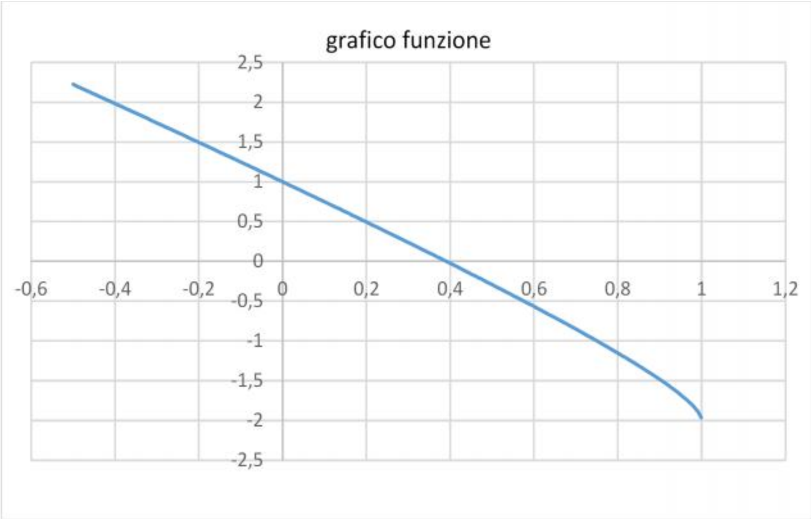
$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1-x} - 2x}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x} - 2 = -2$, in quanto per $x \to -\infty$, $\sqrt{1-x}$ è $o(x)$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} - 2x + 2x = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} - 2$. $y' < 0$, $\forall x \in]-\infty, 1[$. Funzione strettamente decrescente in $]-\infty, 1]$. Minimo assoluto nel punto $m(1, -2)$. Nota che $\lim_{x \to 1}\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} - 2\right) = -\infty$; $m(1, -2)$ è punto di stop della funzione a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = +\frac{2\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{\left(2\sqrt{1-x}\right)^2} = -\frac{1}{4\left(\sqrt{1-x}\right)^3}$. $y'' < 0$, $\forall x \in]-\infty, 1[$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, 1]$.

Grafico:



.

6) $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} + e^x\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + e^x\right)_1^3 =$

$\left(9 + \frac{1}{3} + e^3\right) - \left(\frac{1}{3} + 1 + e\right) = 8 + e^3 - e$.

7) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione è $y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. $y(x_0) = y(0) = 1$, $y' = 2e^{2x} - 3$ e $y'(x_0) = y'(0) = -1$. L'equazione della retta tangente richiesta è pertanto $y - 1 = -1 \cdot (x)$ che può essere riscritta come $y = -x + 1$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = e^{2y}; \qquad f'_y = 6y^2 + 2xe^{2y}; \qquad f'_z = 2z.$$

Compito $\mathbb{G}3$

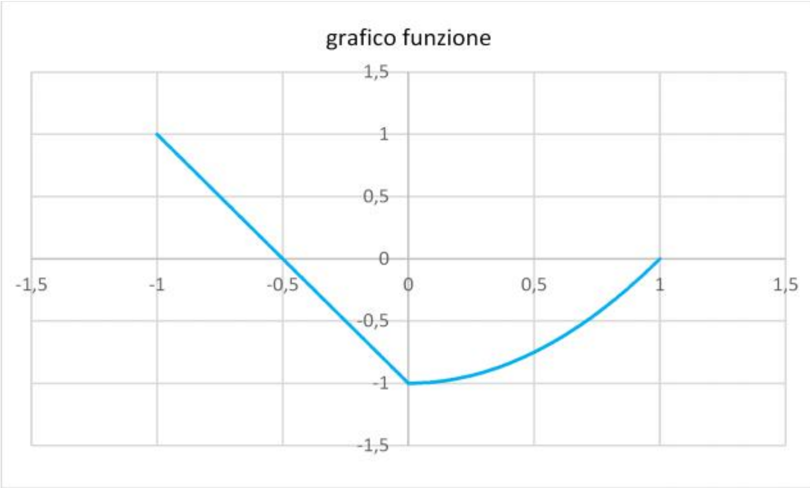
1) L'enunciato p è palesemente falso, così come l'enunciato r è palesemente vero, l'enunciato q può essere talvolta vero e talvolta falso, dipende dai valori che attribuiamo a m e n. Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata con i valori di falsità e verità prima determinati:

p	q	r	p e q	$q \Rightarrow \neg r$	$(p$ e $q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg r)$
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F

.

2) $A \cap B = [-3; \pi[$; $A \cup B =]-\infty; 5]$; $\mathcal{C}(A \cup B) =]5; +\infty[$. $\delta(A \cap B) = \{-3, \pi\}$.

3) Grafico di $f(x)$.



.

Notiamo che in $[-1,0]$ la funzione è continua e strettamente monotona decrescente, mentre in $[0,1]$ è continua e strettamente monotona crescente; $f(-1/2)=0$, $f(0)=-1$ e $f(1/2)=-3/4<0$, segue che $f([-1/2,1/2])=[-1,0]$; per l'insieme $f^{-1}([-1,0])$ notiamo che $f(1)=0$ e da $f(-1/2)=0$ e $f(0)=-1$, sempre per le caratteristiche della funzione prima ottenute si ottiene $f^{-1}([-1,0])=[-1/2,1]$.

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(sen\,x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(sen\,x)}{sen\,x}\cdot\dfrac{sen\,x}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2} =$
$(\to 1)\cdot(\to 1)\cdot(\to +\infty) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{4}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left((1-x)^{-\frac{1}{x}}\right)^{-4} = (\to e)^{-4} = e^{-4}.$

5) $C.E.=\mathbb{R}.$

$y(-x)=e^{1-x}-e^{x}$ che ha espressione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$. Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $e^{1+x}-e^{-x}>0 \Rightarrow e^{1+x}>e^{-x} \Rightarrow 1+x>-x \Rightarrow x>-1/2$. Funzione positiva in $]-1/2,+\infty[$, negativa in $]-\infty,-1/2]$; unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(-1/2,0)$.
$y(0)=e-1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x\to -\infty} e^{1+x}-e^{-x} = e^{(\to -\infty)}-e^{(\to +\infty)} = -\infty;$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^{1+x}-e^{-x}}{x} = -\infty$; in quanto $x=o(e^{-x})$ per $x\to -\infty$;

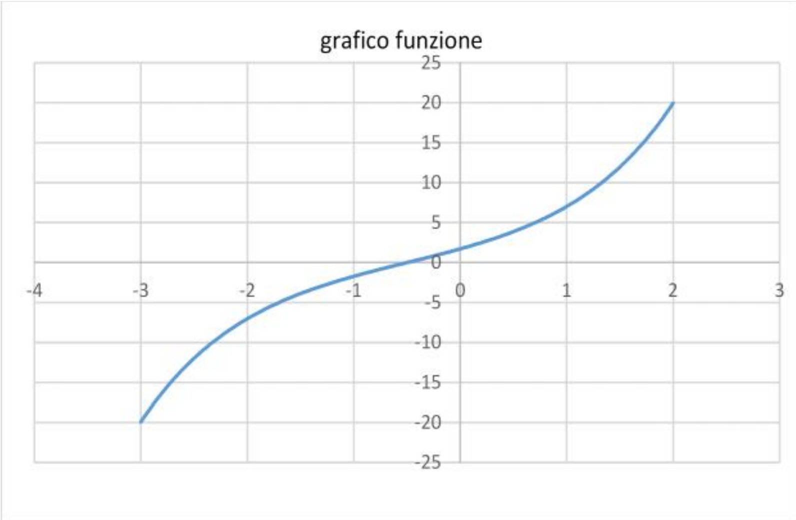
$\lim\limits_{x\to +\infty} e^{1+x}-e^{-x} = e^{(\to +\infty)}-e^{(\to -\infty)} = +\infty;$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{1+x}-e^{-x}}{x} = +\infty$; in quanto $x=o(e^{1+x})$ per $x\to +\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y'=e^{1+x}+e^{-x}$. $y'>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Funzione strettamente monotona crescente.

Concavità e convessità: $y''=e^{1+x}-e^{-x}$. $y''>0$, se $e^{1+x}-e^{-x}>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x>-1/2$. Funzione strettamente convessa in $]-1/2,+\infty[$, strettamente concava in $]-\infty,-1/2]$. Un unico punto di flesso coincidente con $A(-1/2,0)$.

Grafico:



.

6) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+arctg\,x\right)_{-1}^{1} =$
$\displaystyle\left(\frac{1}{3}+arctg\,1\right) - \left(-\frac{1}{3}+arctg(-1)\right) = \frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}\,.$

7) Per $x \to 0$, $e^x = 1+x+o(x)$ e quindi $1-e^x = -x+o(x)$, $sen\,x = x+o(x)$, ne consegue che $f(x) = (1-e^x)\cdot sen\,x = (-x+o(x))\cdot(x+o(x)) =$
$-x^2+o(x^2)$. Rispetto all'infinitesimo campione $g(x)=x$, $f(x)$ ha ordine 2 e la sua parte principale è $-x^2$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = -e^{x+2y} - xe^{x+2y} = -(1+x)e^{x+2y}\,; \qquad f'_y = -2xe^{x+2y}\,;$$
$$f'_z = 2+2z\,.$$

Compito $\mathbb{G}4$

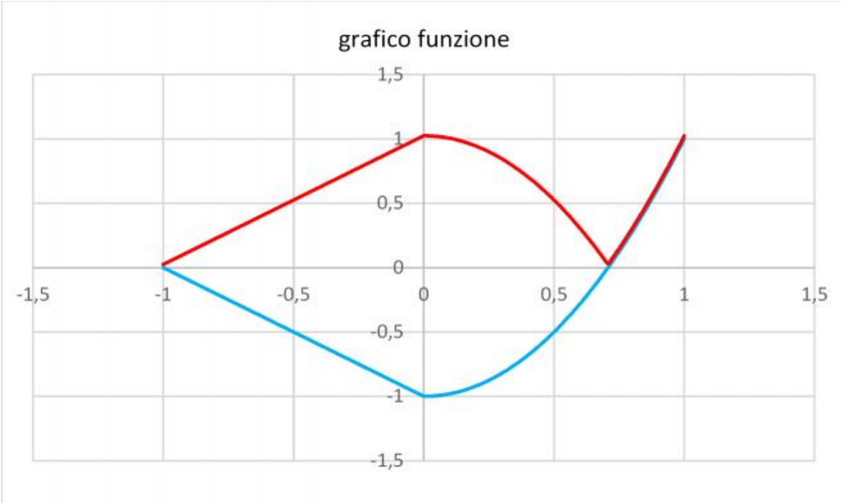
1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui p e q non possono essere entrambe vere ed entrambe false.

p	q	r	$p\ o\ q$	$p\ e\ q$	$(p\ e\ q) \Rightarrow \neg r$	$(p\ o\ q) \Leftrightarrow ((p\ e\ q) \Rightarrow \neg r)$
V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V

.

2) $\mathcal{C}(A) = [-2;+\infty[$, $\mathcal{C}(B) = [0;+\infty[$, $A\cup\mathcal{C}(B) =]-\infty;-2[\,\cup\,[0;+\infty[$, $\mathcal{C}(A)\cap B = [-2;0[$, $\delta(A\cup\mathcal{C}(B)) = \{-2,0\}$.

3) Grafico di $f(x)$ in blé; il grafico di $|f(x)|$ in rosso, si ottiene lasciando inalterata la parte del grafico che si trova sul semipiano positivo delle ordinate e ruotando di $180°$, rispetto all'asse delle ascisse, la parte del grafico che si trova sul semipiano negativo delle ordinate.



.

4) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sen\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sen\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = (\to 1) \cdot (\to 1) = 1.$

$\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left((1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right)^2 = (\to e)^2 = e^2.$

5) $C.E.: \dfrac{x}{1+x^2} > 0 \Rightarrow x > 0; C.E. = \mathbb{R}_{++} =]0, +\infty[.$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $log\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) > 0 \Rightarrow \dfrac{x}{1+x^2} > 1 \Leftrightarrow$ $\dfrac{x}{1+x^2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1-x^2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 < 0$. Calcoliamo il $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, la disequazione non presenta soluzioni. Funzione negativa nel suo Campo di esistenza.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x \to 0} log\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = log\left(\dfrac{(\to 0)}{(\to 1)}\right) = -\infty$; AV di equazione $x = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} log\left(\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+x\right)}\right) = log\left(\dfrac{1}{(\to +\infty)}\right) =$ $-\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log\, x - log(1+x^2)}{x} = 0$; in quanto sia $log\, x$ che $log(1+x^2)$ sono $o(x)$ per $x \to +\infty$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{\frac{x}{1+x^2}} \cdot \dfrac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{x(1+x^2)}$. $y' > 0$, se $1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$. Funzione strettamente crescente in $]0, 1]$, strettamente decrescente in $[1, +\infty[$; punto di massimo assoluto $x = 1$, di ordinata $y(1) = log\left(\dfrac{1}{2}\right) = -log\, 2.$

Concavità e convessità: indichiamo con $\alpha > 1$ l'ascissa del punto di flesso, l'esistenza del massimo assoluto individuato al punto precedente porta ad affermare che la funzione è strettamente concava in $]0, \alpha]$, strettamente convessa in $[\alpha, +\infty[$.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale della funzione):

.

6) $\int_4^5 \left(x^3 + \frac{2}{x} - e^{-x} \right) dx \;=\; \left(\frac{x^4}{4} + 2\,log|x| + e^{-x} \right)_4^5 \;=$
$\left(\frac{625}{4} + 2\,log\,5 + e^{-5} \right) \;-\; \left(64 + 2\,log\,4 + e^{-4}\right) \;=\; \frac{369}{4} + 2\,log\,\frac{5}{4} + e^{-5} - e^{-4}\,.$

7) $f'(x) = \dfrac{2^{3x-1} \cdot log\,2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2-x} - 2^{3x-1} \cdot \frac{-1\cdot}{2\sqrt{2-x}}}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2} \;=\; \dfrac{2^{3x-1}(6\,log\,2 \cdot (2-x) + 1)}{2\left(\sqrt{2-x}\right)^3}\,.$

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = \; y \cdot z \cdot sen(y-1)\,; \qquad\qquad f'_z = \; x \cdot y \cdot sen(y-1)\,;$$

$$\begin{aligned} f'_y &= \; x \cdot z \cdot sen(y-1) + x \cdot y \cdot z \cdot cos(y-1) \\ &= \; x \cdot z \cdot (sen(y-1) + y \cdot cos(y-1))\,. \end{aligned}$$

Compito $\mathbb{G}5$

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata:

p	q	$q\ o\ p$	$p \Rightarrow (q\ o\ p)$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow (q\ o\ p))\ e\ (p \Rightarrow q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

.

2) Da $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 = \,]-\infty; 8]$ si ottiene $Sup(\mathcal{I}_3) = 8 \in \mathcal{I}_3$ e $Inf(\mathcal{I}_3) \leq 6$, mentre da $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 = [3; 9[$ abbiamo $Inf(\mathcal{I}_3) = 3 \in \mathcal{I}_3$, quindi $\mathcal{I}_3 = [3; 8]$. $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 = \,]3; 6]$ e $\overline{\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3} = [3; 6]$.

3) Per prima cosa determiniamo l'espressione di f; a tal fine posto $y = \sqrt{1-x^3}$ si ottiene $y^2 = 1 - x^3$ da cui $x^3 = 1 - y^2$ e $x = \sqrt[3]{1-y^2}$. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ e $g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{1-x^2}\right) = log\left(2\sqrt[3]{1-x^2}\right) - 3\,.$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\,x}{2x^2 + x^3} \;=\; \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\,x}{x^2} \cdot \dfrac{1}{2+x} \;=\; \left(\to \dfrac{1}{2} \right) \cdot \left(\to \dfrac{1}{2} \right) \;=\; \dfrac{1}{4}\,.$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x} \right)^x \;=\; \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x} \right)^x \;= e^3.$

5) $C.E.$: $x^2 + x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x(x+1) \neq 0 \;\Rightarrow\; (x \neq 0 \vee x + 1 \neq 0) \Leftrightarrow$

$(x \neq 0 \vee x \neq -1)$; $C.E. = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{1}{x^2+x} > 0 \Rightarrow x^2 + x > 0 \Leftrightarrow$ $x(x+1) > 0$. Studiamo separatamente i due fattori: $x > 0$ e $x + 1 > 0 \Rightarrow$ $x > -1$. Funzione positiva in $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, negativa in $]-1, 0[$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

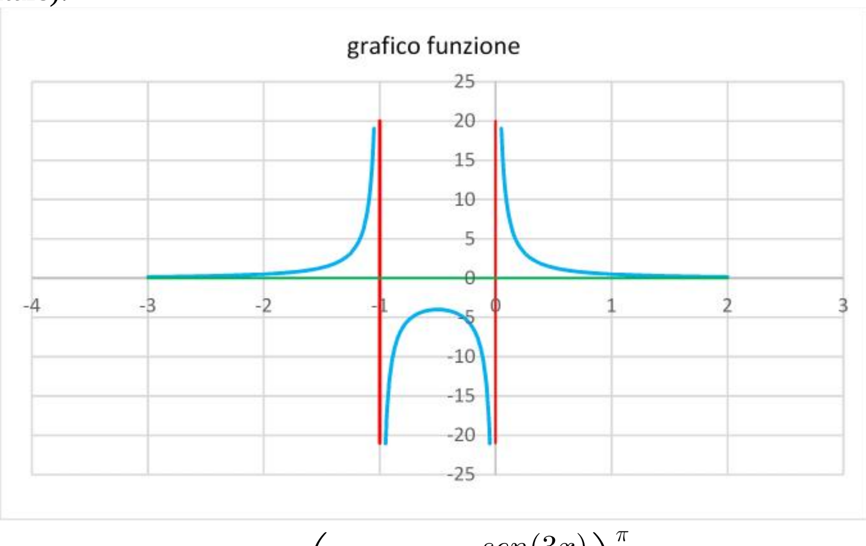
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{(\to \pm\infty)(\to \pm\infty)} = 0$; AOr di equazione $y = 0$;

$\lim\limits_{x \to -1^{\pm}} \frac{1}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to -1^{\pm}} \frac{1}{x(x+1)} = = \frac{1}{(\to -1)(\to 0^{\pm})} = \mp\infty$; AV di equazione $x = -1$;

$\lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x^2+x} = \lim\limits_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x(x+1)} = = \frac{1}{(\to 0^{\pm})(\to 1)} = \pm\infty$; AV di equazione $x = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$. $y' > 0$, se $2x + 1 < 0 \Rightarrow$ $x < -1/2$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -1[$ e in $]-1, -1/2]$, strettamente decrescente in $[-1/2, 0[$ e in $]0, +\infty[$; punto di massimo relativo $x = -1/2$, di ordinata $y(-1/2) = -4$.

Concavità e convessità: $y'' = -\frac{2(x^2+x)^2 - (2x+1)\cdot 2(x^2+x)\cdot(2x+1)}{(x^2+x)^4} =$ $\frac{2\cancel{(x^2+x)}(3x^2+3x+1)}{(x^2+x)^{\cancel{4}3}} = \frac{2(3x^2+3x+1)}{(x^2+x)^3}$. Per studiare il segno di y'' consideriamo in primis il segno di $3x^2 + 3x + 1$, tale espressione di secondo grado ha $\Delta = 9 - 12 < 0$, quindi $3x^2 + 3x + 1 > 0$, $\forall x \in C.E.$; pertanto $y'' > 0$ se e solo se $x^2 + x > 0$ e tale condizione è verificata per $x < -1 \vee x > 0$. Funzione strettamente convessa in $]-\infty, -1[$ e in $]0, +\infty[$, strettamente concava in $]-1, 0[$.
Grafico della funzione in blé (in rosso i due asintoti verticali ed in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) $\int_0^{\pi} (sen\, x + cos(3x))\; dx = \left(-\cos x + \frac{sen(3x)}{3}\right)_0^{\pi} =$

$$\left(- cos\,\pi + \frac{sen(3\pi)}{3} \right) - \left(- cos\,0 + \frac{sen\,0}{3} \right) = 2.$$

7) $f'(x) = \dfrac{3^{1-x^2} \cdot log\,3 \cdot (- 2x) \cdot \left(2 - \sqrt{x}\right) - 3^{1-x^2} \cdot \left(- \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{\left(2 - \sqrt{x}\right)^2} =$

$\dfrac{3^{1-x^2}\left(1 - 4\,log\,3 \cdot x \cdot \left(2 - \sqrt{x}\right)\right)}{2\sqrt{x}\left(2 - \sqrt{x}\right)^2}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = \frac{1}{z^2}; \qquad f'_y = -\frac{1}{z^2}; \qquad f'_z = -\frac{2\cancel{z}(x-y)}{\cancel{z^4}^{\,3}} = \frac{2(y-x)}{z^3}.$$

Compito $\mathbb{G}6$

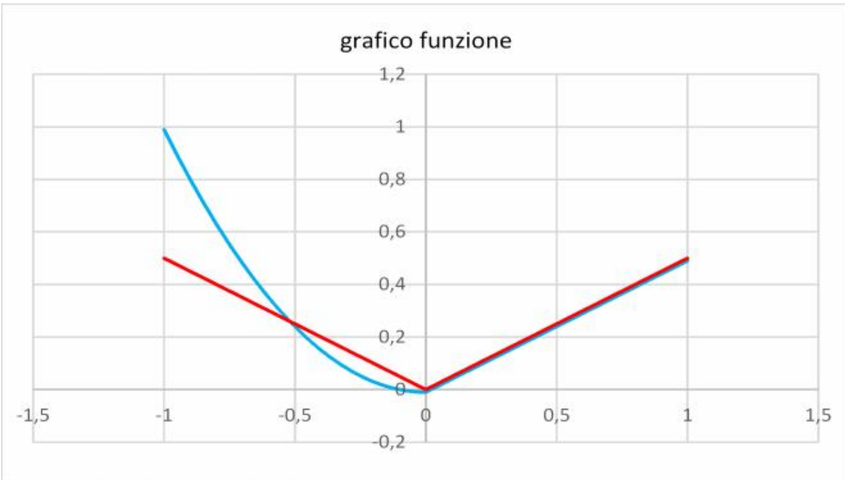
1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata:

p	q	$\neg p\ e\ q$	$(\neg p\ e\ q) \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q)\ o\ ((\neg p\ e\ q) \Rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V

.

2) Da $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 = [0,5]$ si ottiene $Inf(\mathcal{I}_3) = 0 \in \mathcal{I}_3$ e $Sup(\mathcal{I}_3) \geq 5$, mentre da $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 = [3,6[$ abbiamo $Sup(\mathcal{I}_3) = 6 \notin \mathcal{I}_3$, quindi $\mathcal{I}_3 = [0;6[$.
$\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 = [-1,8]$ e $\delta(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3) = \{-1,8\}$.

3) Grafico di $f(x)$ in blé; il grafico di $f(|x|)$ in rosso, si ottiene lasciando inalterata la parte del grafico che si trova sul semipiano positivo delle ascisse e contemporaneamente riportando sul semipiano negativo delle ascisse la parte del grafico he si trova sul semipiano positivo delle ascisse ruotata di $180°$, rispetto all'asse delle ordinate.



.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{3^x-1}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{(\to log\,3)}{(\to 1)} = log\,3.$

Per il secondo limite, si ha che per $x \to -\infty$, 2^x è $o(x)$ e e^x e $cos\,x$ sono $o(2x^2)$,

pertanto: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - 2^x}{e^x + 2x^2 - cos\,x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - o(x)}{o(2x^2) + 2x^2 - o(2x^2)} =$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0.$

5) $C.E.: x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1; C.E. = [1, +\infty[.$

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ in tutto il suo $C.E.$ perché somma fra una quantità positiva ed una non negativa.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x-1} = +\infty;$

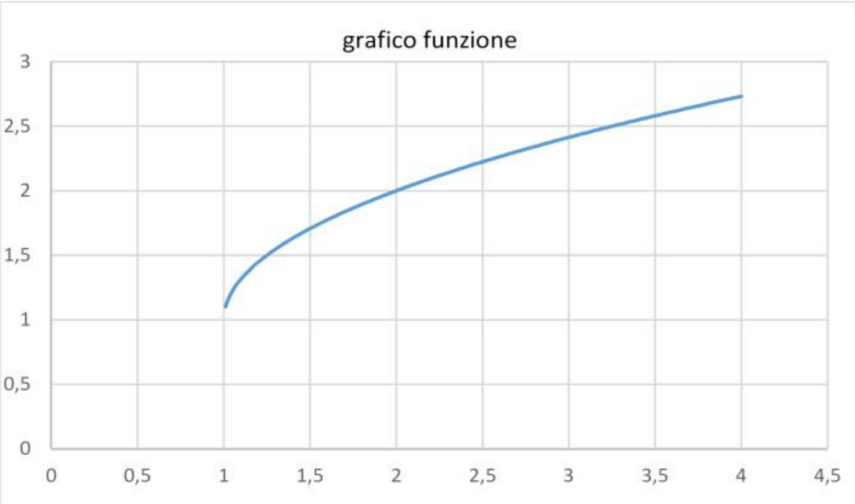
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x-1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{\sqrt{x-1}}{x} = 1$, in quanto per $x \to +\infty$, $\sqrt{x-1}$ è $o(x)$;

$\lim_{x \to +\infty} x + \sqrt{x-1} - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$. $y' > 0$, $\forall x \in]1, +\infty[$. Funzione strettamente crescente in $]1, +\infty]$. Minimo assoluto nel punto $m(1, 1)$. Nota che $\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right) = +\infty$; $m(1, 1)$ è punto di stop della funzione a tangente verticale.

Concavità e convessità: $y'' = -\frac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{\left(2\sqrt{x-1}\right)^2} = -\frac{1}{4\left(\sqrt{x-1}\right)^3}$. $y'' < 0$, $\forall x \in]1, +\infty[$. Funzione strettamente concava in $]1, +\infty]$.

Grafico:



.

6) $\int_4^9 \left(3x - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right) dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - 2\sqrt{x} + 2x\right)_4^9 =$

$\left(\frac{243}{2} - 6 + 18\right) - (24 - 4 + 8) = \frac{211}{2}.$

7) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione è

$y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. $y(x_0) = y(0) = -1$, $y' = \frac{2}{2x + e}$ e

$y'(x_0) = y'(0) = \dfrac{2}{e}$. L'equazione della retta tangente richiesta è pertanto $y + 1 = \dfrac{2}{e} \cdot (x)$ che può essere riscritta come $y = \dfrac{2}{e}x - 1$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = 3x^2y - sen(xz - 6) \cdot z\,; \qquad f'_y = x^3\,; \qquad f'_z = -sen(xz-6) \cdot x\,.$$

Compito $\mathbb{G}7$

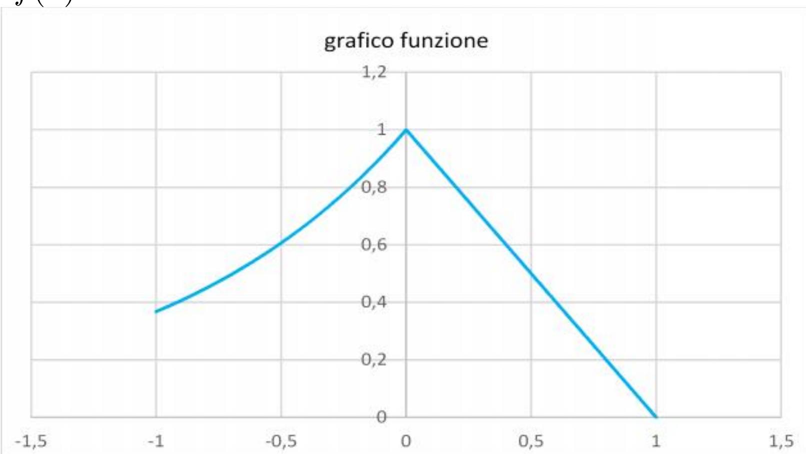
1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui q e r non possono essere entrambe vere ed entrambe false.

p	q	r	$r\ o\ p$	$p \Rightarrow (r\ o\ p)$	$r\ o\ \neg q$	$(p \Rightarrow (r\ o\ p))\ e\ (r\ o\ \neg q)$
V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

.

2) $A \cup B = [-6; +\infty[$, $A \cap B =]0; e]$, $\mathcal{C}(A \cap B) =]-\infty; 0] \cup]e; +\infty[$. L'insieme $A \cup B$ è un intervallo chiuso, quindi $\mathcal{D}(A \cup B) = A \cup B$.

3) Grafico di $f(x)$.



.

Notiamo che in $[0,1]$ la funzione è continua e strettamente monotona decrescente, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, segue che $f([0,1]) = [0,1]$; per l'insieme $f^{-1}([1/2, 1])$ nota per prima cosa che $f(x) = 1/2$ se $x = log(1/2) \vee x = 1/2$ e $f(x) = 1$ solo per $x = 0$; dalla continuità e stretta monotonia crescente di f in $[-1, 0]$ insieme alla continuità e stretta monotonia decrescente di f in $[0,1]$ si ottiene $f^{-1}([1/2, 1]) = [log(1/2), 1/2]$.

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{1 - cos\, x}{x^2}} = \frac{(\to 1)}{(\to \frac{1}{2})} = 2.$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \frac{1}{x}\right)^x = ((\to +\infty) + (\to 0))^{(\to +\infty)} = +\infty.$

5) $C.E.$: $x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x(1-x) \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0 \vee 1 - x \neq 0) \Leftrightarrow (x \neq 0 \vee x \neq 1)$; $C.E. = \mathbb{R} \backslash \{0,1\} =]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1, +\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\dfrac{1}{x - x^2} > 0 \Rightarrow x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0$. Studiamo separatamente i due fattori: $x > 0$ e $1 - x > 0 \Rightarrow$

$x < 1$. Funzione positiva in $]0, 1[$, negativa in $]-\infty, 0[\, \cup\,]1, +\infty[$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

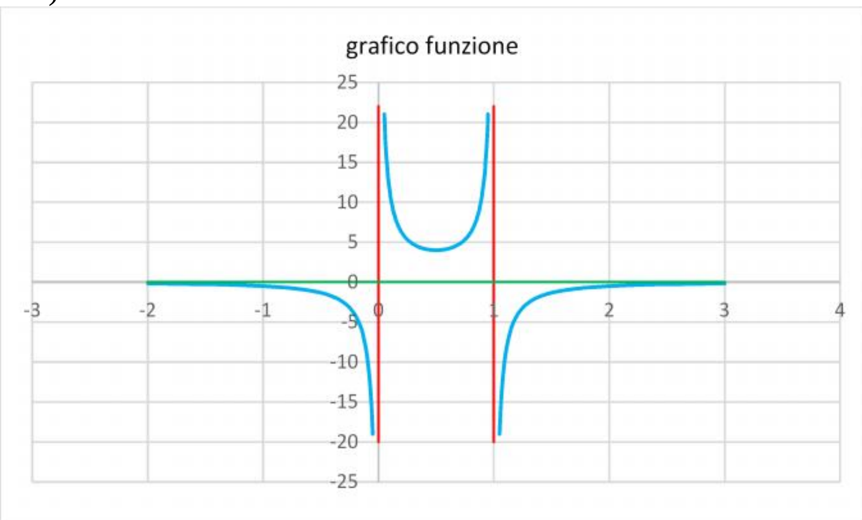
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x - x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{(\to \pm\infty)(\to \mp\infty)} = 0;$$ AOr di equazione $y = 0$;

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x - x^2} = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{(\to 0^\pm)(\to 1)} = \pm\infty;$$ AV di equazione $x = 0$;

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{1}{x - x^2} = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{(\to 1)(\to 0^\mp)} = \mp\infty;$$ AV di equazione $x = 1$.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\dfrac{1-2x}{(x-x^2)^2} = \dfrac{2x-1}{(x-x^2)^2}$. $y' > 0$, se $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1/2$. Funzione strettamente crescente in $[1/2, 1[$ e in $]1, +\infty[$, strettamente decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 1/2]$; punto di minimo relativo $x = 1/2$, di ordinata $y(1/2) = 4$.

Concavità e convessità: $$y'' = \frac{2(x-x^2)^2 - (2x-1)\cdot 2(x-x^2)\cdot(1-2x)}{(x-x^2)^4} = \frac{2\cancel{(x-x^2)}(3x^2-3x+1)}{(x-x^2)^{\cancel{4}3}} = \frac{2(3x^2-3x+1)}{(x-x^2)^3}.$$ Per studiare il segno di y'' consideriamo in primis il segno di $3x^2 - 3x + 1$, tale espressione di secondo grado ha $\Delta = 9 - 12 < 0$, quindi $3x^2 - 3x + 1 > 0,\ \forall x \in C.E.$; pertanto $y'' > 0$ se e solo se $x - x^2 > 0$ e tale condizione è verificata per $0 < x < 1$. Funzione strettamente convessa in $]0, 1[$, strettamente concava in $]-\infty, 0[$ e in $]1, +\infty[$.
Grafico della funzione in blé (in rosso i due asintoti verticali ed in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) $$\int_2^4 \left(\frac{x + x\sqrt{x} - 1}{x}\right) dx = \int_2^4 \left(1 + \sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - log|x|\right)_2^4 = \left(4 + \frac{16}{3} - log\,4\right) - \left(2 + \frac{4}{3}\sqrt{2} - log\,2\right) = \frac{2}{3}\left(11 - 2\sqrt{2}\right) - log\,2.$$

7) L'equazione della retta tangente al grafico della funzione è $y - y(x_0) = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$. $y(x_0) = y(0) = 0$, $y' = \dfrac{-\,sen\,x}{cos\,x} + 1$ e $y'(x_0) = y'(0) = 1$. L'equazione della retta tangente richiesta è pertanto $y = 1 \cdot (x)$ che può essere riscritta come $y = x$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = 6z \cdot e^{3(x+2y)}; \qquad f'_y = 12z \cdot e^{3(x+2y)}; \; f'_z = 2 \cdot e^{3(x+2y)}.$$

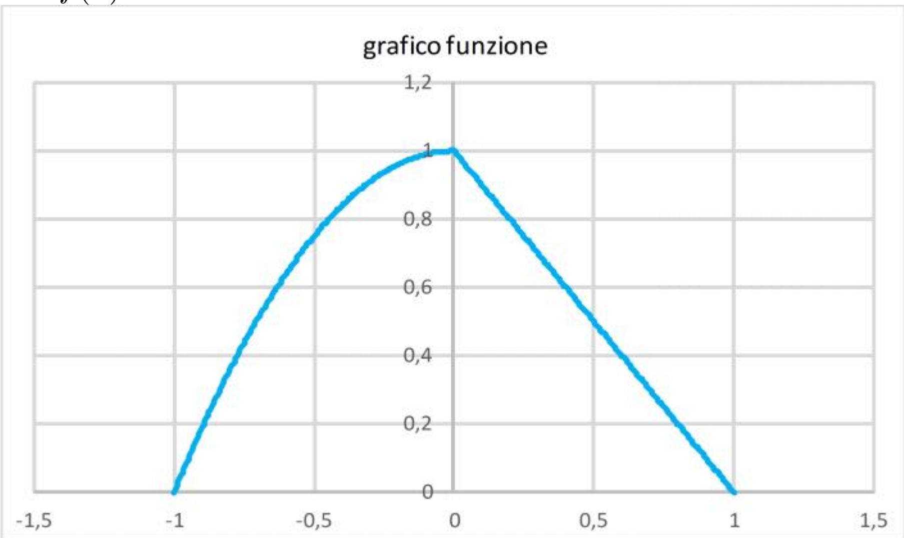
Compito $\mathbb{G}8$

1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui p e r non possono essere entrambe vere ed entrambe false.

p	q	r	$\neg(r\ o\ p)$	$p \Rightarrow \neg(r\ o\ p)$	$r\ e\ q$	$(p \Rightarrow \neg(r\ o\ p))\ o\ (r\ e\ q)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V

2) $\mathcal{C}(A) =]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[$, $\mathcal{C}(B) =]-\infty, 0[$, $A \cup \mathcal{C}(B) =]-\infty, 0[\cup]3, 4[$, $\mathcal{C}(A) \cup B = \mathbb{R}$, $\mathcal{D}(A \cup \mathcal{C}(B)) =]-\infty, 0] \cup [3, 4]$.

3) Grafico di $f(x)$.



Notiamo che in $[-1, 0]$ la funzione è continua e strettamente monotona crescente, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$, segue che $f([-1, 0]) = [0, 1]$; per l'insieme $f^{-1}([1/4, 1])$ notiamo per prima cosa che $f(x) = 1/4$ se $x = -\sqrt{3}/2 \vee x = 3/4$ e $f(x) = 1$ solo per $x = 0$; dalla continuità e stretta monotonia crescente di f in $[-1, 0]$ insieme alla continuità e stretta monotonia decrescente di f in $[0, 1]$ si ottiene $f^{-1}([1/4, 1]) = [-\sqrt{3}/2, 3/4]$.

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^{sen^2 x} - 1}{x^2 - x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{sen^2 x} - 1}{sen^2 x} \cdot \frac{sen^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^3} = (\to 1) \cdot (\to 1) \cdot (\to 1) = 1.$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{4x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x \right)^4 = ((\to e^{-1}))^4 = e^{-4}.$$

5) $C.E. = \mathbb{R}$.

$y(-x) = e^{2+x} + e^{-x}$ che ha espressione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$.
Funzione né pari né dispari.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Funzione positiva. $y(0) = e^2 + 1$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

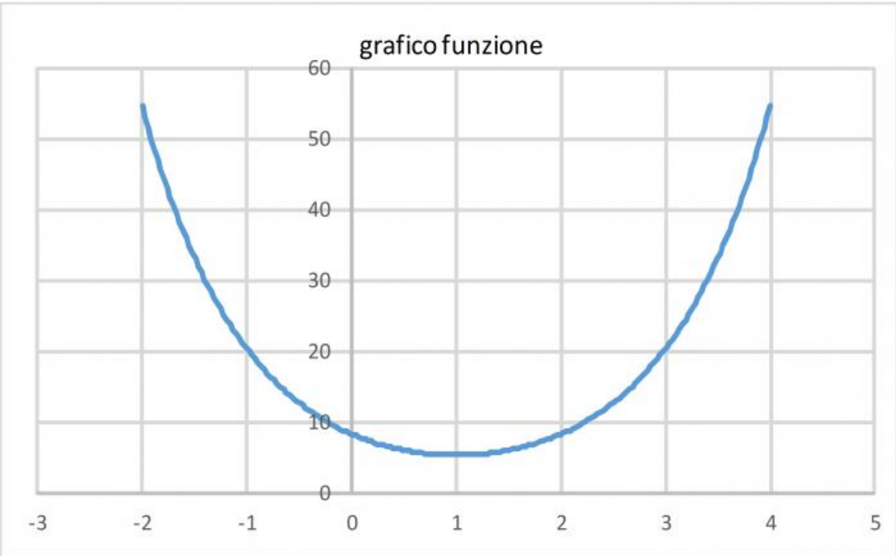
$\lim_{x \to -\infty} e^{2-x} + e^{x} = e^{(\to +\infty)} + e^{(\to -\infty)} = +\infty;$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{2-x} + e^{x}}{x} = +\infty$; in quanto $x = o(e^{2-x})$ per $x \to -\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} e^{2-x} + e^{x} = e^{(\to -\infty)} + e^{(\to +\infty)} = +\infty;$

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{2-x} + e^{x}}{x} = +\infty$; in quanto $x = o(e^{x})$ per $x \to +\infty$; la funzione non presenta asintoti.

Crescenza e decrescenza: $y' = -e^{2-x} + e^{x}$. $y' > 0$, se $-e^{2-x} + e^{x} > 0 \Rightarrow$ $e^{x} > e^{2-x} \Rightarrow x > 2 - x \Rightarrow x > 1$. Funzione strettamente decrescente in $]-\infty, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty[$; punto di minimo relativo $x = 1$, di ordinata $y(1) = 2e$.
Concavità e convessità: $y'' = e^{2-x} + e^{x}$. $y'' > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Funzione strettamente convessa.
Grafico:



.

6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{sen\,x + cos\,x}{cos\,x - sen\,x} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{-sen\,x - cos\,x}{cos\,x - sen\,x} \right) dx =$
$(-log|cos\,x - sen\,x|)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$
$(-log|cos\,\pi - sen\,\pi|) - \left(-log|cos\,\dfrac{\pi}{2} - sen\,\dfrac{\pi}{2}| \right) = 0.$

7) Per $x \to 0$, $cos\,x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$ e quindi $cos\,x^2 = 1 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$, ne consegue che $f(x) = 1 - cos\,x^2 = 1 - \left(1 - \dfrac{x^4}{2} + o(x^4) \right) = \dfrac{x^4}{2} + o(x^4)$.
Rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, $f(x)$ ha ordine 4 e la sua parte principale è $\dfrac{x^4}{2}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x = y \cdot z^2\,; \qquad\qquad f'_z = 2(x-y)\cdot y \cdot z$$
$$f'_y = -y\cdot z^2 + (x-y)\cdot z^2 = (x-2y)\cdot z^2.$$

Compito $\mathbb{G}9$

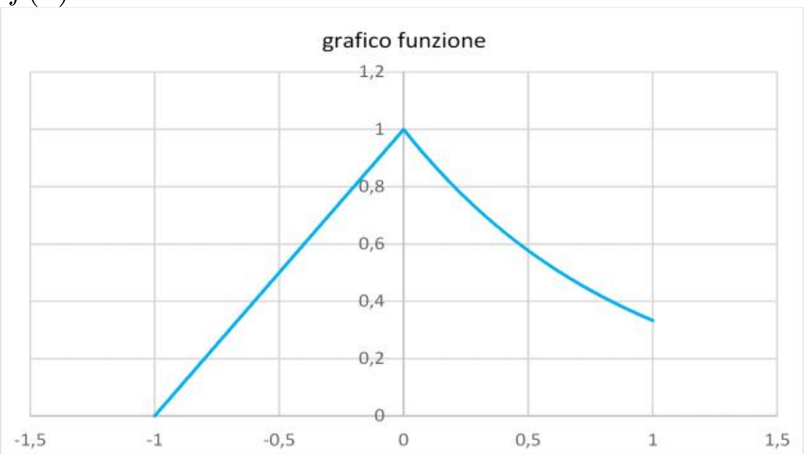
1) L'enunciato p è palesemente vero, così come l'enunciato q è palesemente falso, l'enunciato r può essere talvolta vero e talvolta falso, dipende dal valore che attribuiamo a x. Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata con i valori di falsità e verità prima determinati:

p	q	r	$\neg(r\ o\ p)$	$p \Rightarrow \neg(r\ o\ p)$	$r\ e\ q$	$(p \Rightarrow \neg(r\ o\ p))\ o\ (r\ e\ q)$
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F

.

2) $A \subset B$, quindi $A \cap B = A$ e $\mathcal{C}(B) \subset \mathcal{C}(A)$. Ne segue che $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(B) =]-\infty; 0[$ e $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) =]-\infty; 3]$. Per l'insieme interno richiesto possiamo notare che $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ è un intervallo aperto, quindi $\mathcal{C}(A) \overset{\circ}{\cap} \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$.

3) Grafico di $f(x)$.



Notiamo che in $[0,1]$ la funzione è continua e strettamente monotona decrescente, $f(0) = 1$, $f(1) = 1/3$, segue che $f([0,1]) = [1/3, 1]$; per l'insieme $f^{-1}([1/3,1])$ nota per prima cosa che $f(x) = 1/3$ se $x = -2/3 \vee x = 1$ e $f(x) = 1$ solo per $x = 0$; dalla continuità e stretta monotonia crescente di f in $[-1, 0]$ insieme alla continuità e stretta monotonia decrescente di f in $[0,1]$ si ottiene $f^{-1}([1/3,1]) = [-2/3, 1]$.

4) Per risolvere il primo limite possiamo razionalizzare il denominatore:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{4+sen\,x}-2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{4+sen\,x}-2}\cdot\frac{\sqrt{4+sen\,x}+2}{\sqrt{4+sen\,x}+2} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen\,x}\cdot\left(\sqrt{4+sen\,x}+2\right) = (\to 1)(\to 4) = 4.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2x}{1-cos\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cancel{1-cos\,x})(1+cos\,x)}{\cancel{1-cos\,x}} = \lim_{x\to 0}(1+cos\,x) = 2.$$

5) $C.E.$: $1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$; $C.E. = \mathbb{R}\backslash\{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$.

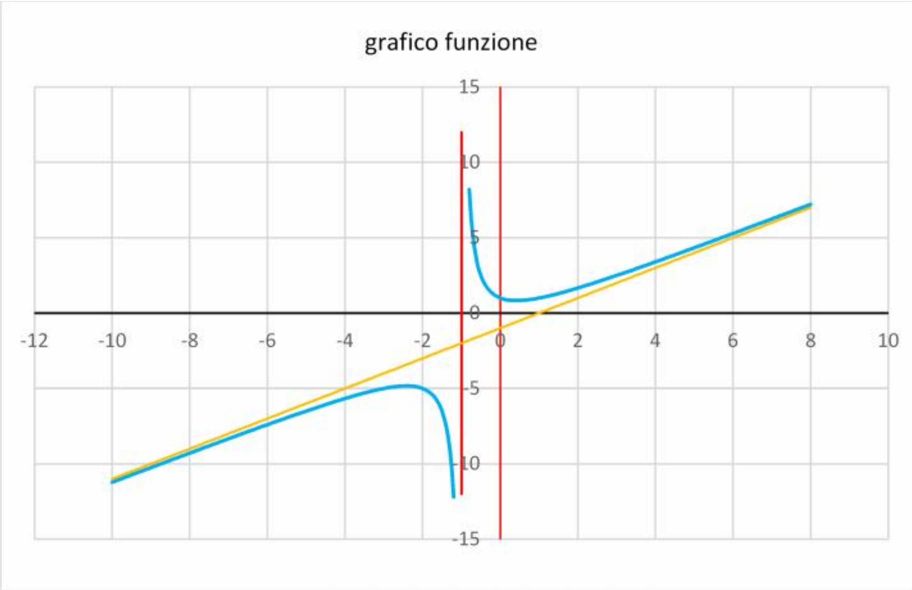
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\dfrac{1+x^2}{1+x} > 0 \Rightarrow 1+x > 0 \Rightarrow x > -1$.

Funzione positiva in $]-1, +\infty[$, negativa in $]-\infty, -1[$. $y(0) = 1$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1+x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+x\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}+x}{\frac{1}{x}+1} =$
$\frac{(\to 0)+(\to \pm\infty)}{(\to 0)+1} = \pm\infty;$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1+x^2}{1+x}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+1}{\frac{1}{x}+1} =$
$\frac{(\to 0)+1}{(\to 0)+1} = 1;$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1+x^2}{1+x} - x = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-x}{1+x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)} =$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{(\to 0)-1}{(\to 0)+1} = -1$; AOb di equazione $y = x-1$;

$\lim\limits_{x\to -1^{\pm}}\frac{1+x^2}{1+x} = \frac{(\to 2)}{(\to 0^{\pm})} = \pm\infty$; AV di equazione $x = -1$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{2x(1+x)-(1+x^2)}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$. $y' > 0$, se $x^2+2x-1>0$. Calcoliamo il $\Delta = 4+4 = 8 > 0$,
$x_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} = -1\pm\sqrt{2}$, pertanto le soluzioni della disequazione $x^2+2x-1>0$ sono le $x < -1-\sqrt{2} \vee x > -1+\sqrt{2}$. Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -1-\sqrt{2}]$ e in $[-1+\sqrt{2}, +\infty[$, strettamente decrescente in $[-1-\sqrt{2}, -1[$ e in $]-1, -1+\sqrt{2}]$; punto di massimo relativo $x = -1-\sqrt{2}$, di ordinata $y\left(-1-\sqrt{2}\right) = -2\left(1+\sqrt{2}\right)$, punto di minimo relativo $x = -1+\sqrt{2}$, di ordinata $y\left(-1+\sqrt{2}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{(2x+2)(1+x)^2-(x^2+2x-1)\cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} =$
$\frac{4}{(1+x)^3}$. $y''>0$ se $1+x>0 \Rightarrow x > -1$. Funzione strettamente convessa in $]-1, +\infty[$, strettamente concava in $]-\infty, -1[$.
Grafico della funzione in blé (in rosso l'asintoto verticale ed in giallo l'asintoto obliquo):



.

6) $\int_{-2}^{2} \left(1 - 5x^2 + e^x\right)\ dx\ =\ \left(x - \frac{5}{3}x^3 + e^x\right)_{-2}^{2}\ =$
$\left(2 - \frac{40}{3} + e^2\right)\ -\ \left(-2 + \frac{40}{3} + e^{-2}\right)\ =\ e^2 - e^{-2} - \frac{68}{3}\ .$

7) Per $x \to 0$, $\cos x\ =\ 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ e quindi $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, ne consegue che $f(x) = x^2 \cdot (1 - \cos x) = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right)\ =\ \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$.
Rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$, $f(x)$ ha ordine 4 e la sua parte principale è $\frac{x^4}{2}$.

8) $\nabla f\ =\ (f'_x, f'_y, f'_z)$:

$$f'_x =\ -sen(x - y + z)\,; \qquad f'_y =\ sen(x - y + z) - z^3\,;$$
$$f'_z =\ -sen(x - y + z) - 3yz^2\,.$$