Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}1$✓

1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q; indicare se la proposizione composta seguente è una tautologia, una contraddizione o né una tautologia né una contraddizione:
$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \; o \; q).$$
2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = [2,5] \cup]3, 2\pi[$ e $B = \{3,4,5,6\}$. Determinare l'estremo superiore dell'intersezione fra i due insiemi: $Sup(A \cap B)$, e l'estremo inferiore dell'unione fra i due insiemi: $Inf(A \cup B)$. Indicare inoltre se i due estremi sono anche massimo o minimo dei rispettivi insiemi.
3) (8 punti) Siano date le funzioni f e g, l'espressione della f è $f(x) = 2 - \sqrt{x}$, mentre l'espressione dell'inversa di g è $g^{-1}(x) = \dfrac{3}{1+x}$. Determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e della composta $g(f(x))$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen(x+x^2)}{3x - x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 2x^3 - e^x}{3^x - 2x^2}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = log\left(1 - x^2\right)$.
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^4 \left(x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{3}{x}\right) dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = 3x^2 - 1$. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di ascissa $x_0 = -2$.
8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione: $f(x,y,z) = x^3 z - e^{y-3z}$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}2$✓

1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q; indicare se la proposizione composta seguente è una tautologia, una contraddizione o né una tautologia né una contraddizione:

$$(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (p \; e \; q).$$

2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A =]-2,0[\cup [3,\pi[$ e $B = \{2,3\}$. Determinare l'estremo superiore dell'unione fra i due insiemi: $Sup(A \cup B)$, e l'estremo inferiore dell'intersezione fra i due insiemi: $Inf(A \cap B)$. Indicare inoltre se i due estremi sono anche massimo o minimo dei rispettivi insiemi.

3) (8 punti) Sia f una funzione con dominio $[-1,1]$, codominio $[-1,1]$ e $f(x) = \begin{cases} -1-2x & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ -1 & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([-1/2,1/2])$ e $f^{-1}([0,1])$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^x - 2^x}{x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x + 2^x}{e^x + 2x^2 - sen\, x}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = \sqrt{1-x} - 2x$.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} + e^x \right) dx$.

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^{2x} - 3x$. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione: $f(x,y,z) = 2y^3 + z^2 + xe^{2y}$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}3^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano dati i seguenti tre enunciati:
p: $\forall n \in \mathbb{N},\ n$ è un numero pari;
q: se m e n sono numeri naturali, allora $m+n$ è un numero pari;
r: $\exists n \in \mathbb{N}:\ n$ è un numero pari.
Dopo aver indicato se ogni enunciato è vero, falso o può essere talvolta vero e talvolta falso, costruire, con i valori di falsità e verità prima determinati, la tavola di verità della proposizione: $(p\ e\ q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg r)$.

2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = [-3, 5]$ e $B =]-\infty, \pi[$. Determinare gli insiemi $A \cap B$ e $\mathcal{C}(A \cup B)$, e per il primo insieme determinare il suo insieme frontiera $\delta(A \cap B)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)

3) (8 punti) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[-1, 1]$ e $f(x) = \begin{cases} -1-2x & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ x^2-1 & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases}$. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([-1/2, 1/2])$ e $f^{-1}([-1, 0])$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg(sen\, x)}{x^3}$; $\lim\limits_{x \to 0} (1-x)^{\frac{4}{x}}$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = e^{1+x} - e^{-x}$.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$.

7) (7 punti) Sia data la funzione di espressione $f(x) = (1-e^x) \cdot sen\, x$. Per $x \to 0$, determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$.

8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:
$f(x, y, z) = 2z + z^2 - xe^{x+2y}$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}4^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici p, q e r. Sotto l'ipotesi che le proposizioni p e q non possono essere entrambe vere ed entrambe false, costruire la tavola di verità della proposizione composta: $(p\ o\ q) \Leftrightarrow ((p\ e\ q) \Rightarrow \neg r)$.
2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A =]-\infty, -2[$ e $B =]-\infty, 0[$. Determinare gli insiemi $A \cup \mathcal{C}(B)$ e $\mathcal{C}(A) \cap B$, e per il primo insieme determinare il suo insieme frontiera $\delta(A \cup \mathcal{C}(B))$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)
3) (8 punti) Sia f una funzione con dominio $[-1,1]$, codominio $[-1,1]$ e $f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ 2x^2-1 & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases}$. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x)$ e $|f(x)|$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{sen\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = log\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

   (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta un unico punto di flesso di ascissa maggiore di 1.)
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_4^5 \left(x^3 + \frac{2}{x} - e^{-x}\right) dx$.
7) (7 punti) Calcolare la derivata della seguente funzione: $f(x) = \dfrac{2^{3x-1}}{\sqrt{2-x}}$.
8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione: $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \cdot sen(y-1)$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}5^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q. Costruire la tavola di verità della proposizione composta: $(p \Rightarrow (q\ o\ p))\ e\ (p \Rightarrow q)$.
2) (7 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 =]-\infty, 6]$ e $\mathcal{I}_2 =]3, 9[$. Determinare un terzo intervallo $\mathcal{I}_3$ in modo che risultino verificate le seguenti due condizioni: $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 =]-\infty, 8]$ e $\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3 = [3, 9[$. Determinare inoltre l'insieme chiusura dell'intersezione fra i tre intervalli $\overline{\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3}$.
3) (8 punti) Siano date le funzioni f e g, l'espressione della g è $g(x) = log(2x) - 3$, mentre l'espressione dell'inversa di f è $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^3}$. Determinare l'espressione dlla funzione $f(x)$ e della composta $g(f(x))$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\,x}{2x^2 + x^3}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+3}{x}\right)^x$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = \dfrac{1}{x^2 + x}$.
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi} (sen\,x + cos(3x))\, dx$.
7) (7 punti) Calcolare la derivata della seguente funzione: $f(x) = \dfrac{3^{1-x^2}}{2 - \sqrt{x}}$.
8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione: $f(x, y, z) = \dfrac{x - y}{z^2}$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}6^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano date due proposizioni semplici p e q. Costruire la tavola di verità della proposizione composta: $(p \Leftrightarrow q)\ o\ ((\neg p\ e\ q) \Rightarrow q)$.
2) (7 punti) Siano dati gli intervalli $\mathcal{I}_1 = [-1, 5]$ e $\mathcal{I}_2 = [3, 8]$. Determinare un terzo intervallo $\mathcal{I}_3$ in modo che risultino verificate le seguenti due condizioni:
$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_3 = [0, 5]$ e $\mathcal{I}_2 \cap \mathcal{I}_3 = [3, 6[$. Determinare inoltre l'insieme frontiera dell'unione fra i tre intervalli $\delta(\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3)$.
3) (8 punti) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[0, 1]$ e $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x)$ e $f(|x|)$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \dfrac{3^x - 1}{e^x - 1}$; $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x - 2^x}{e^x + 2x^2 - \cos x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = x + \sqrt{x - 1}$.
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_4^9 \left(3x - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right) dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = log(2x + e) - 2$. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di ascissa $x_0 = 0$.
8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:
$f(x, y, z) = x^3 y + cos(xz - 6)$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}7^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici p, q e r. Sotto l'ipotesi che le proposizioni q e r non possono essere entrambe vere ed entrambe false, costruire la tavola di verità della proposizione composta: $(p \Rightarrow (r\ o\ p))\ e\ (r\ o\ \neg q)$.
2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = [-6, e]$ e $B =]0, +\infty[$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $\mathcal{C}(A \cap B)$, e per il primo insieme determinare il suo insieme derivato $\mathcal{D}(A \cup B)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)
3) (8 punti) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[0, 1]$ e $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([0, 1])$ e $f^{-1}([1/2, 1])$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right)^x$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = \frac{1}{x - x^2}$.
6) (8 punti) Calcolare $\int_2^4 \left(\frac{x + x\sqrt{x} - 1}{x} \right) dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = \log(\cos x) + x$. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva nel punto di ascissa $x_0 = 0$.
8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione: $f(x, y, z) = 2z \cdot e^{3(x+2y)}$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}8^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano date tre proposizioni semplici p, q e r. Sotto l'ipotesi che le proposizioni p e r non possono essere entrambe vere ed entrambe false, costruire la tavola di verità della proposizione composta: $(p \Rightarrow \neg(r\ o\ p))\ o\ (r\ e\ q)$.
2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A =]3, 4[$ e $B = [0, +\infty[$. Determinare gli insiemi $A \cup \mathcal{C}(B)$ e $\mathcal{C}(A) \cup B$, e per il primo insieme determinare il suo insieme derivato $\mathcal{D}(A \cup \mathcal{C}(B))$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)
3) (8 punti) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[0, 1]$ e $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{per } -1 \le x \le 0 \\ 1 - x & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases}$. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([-1, 0])$ e $f^{-1}([1/4, 1])$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen^2 x} - 1}{x^2 - x^5}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{4x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = e^{2-x} + e^x$.
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{sen\, x + cos\, x}{cos\, x - sen\, x}\right) dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di espressione $f(x) = 1 - cos\, x^2$. Per $x \to 0$, determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$.
8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione: $f(x, y, z) = (x - y) \cdot y \cdot z^2$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

11 gennaio 2021

Compito $\mathbb{G}9^{\checkmark}$

1) (6 punti) Siano dati i seguenti tre enunciati:
   p: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$;
   q: $\exists x \in \mathbb{R}:\ x^2 < 0$;
   r: $x^2 \geq 1$.
   Dopo aver indicato se ogni enunciato è vero, falso o può essere talvolta vero e talvolta falso, costruire, con i valori di falsità e verità prima determinati, la tavola di verità della proposizione:
$$(p \Rightarrow \neg(r\ o\ p))\ o\ (r\ e\ q).$$
2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A =]3, +\infty[$ e $B = [0, +\infty[$. Determinare gli insiemi $\mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e $\mathcal{C}(A \cap B)$, e per il primo insieme determinare il suo insieme interno $\mathcal{C}(A) \overset{\circ}{\cap} \mathcal{C}(B)$. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare dell'insieme X)
3) (8 punti) Sia f una funzione con dominio $[-1, 1]$, codominio $[0, 1]$ e $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ 3^{-x} & \text{per } 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Disegnare il suo grafico e calcolare gli insiemi $f([0, 1])$ e $f^{-1}([1/3, 1])$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{4 + sen\, x} - 2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos^2 x}{1 - cos\, x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione: $y = \dfrac{1 + x^2}{1 + x}$.
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{-2}^{2} \left(1 - 5x^2 + e^x\right) dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di espressione $f(x) = x^2 \cdot (1 - cos\, x)$. Per $x \to 0$, determinare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo $f(x)$ rispetto all'infinitesimo campione $g(x) = x$.
8) (6 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:
   $f(x, y, z) = cos(x - y + z) - y \cdot z^3$.

$^{\checkmark}$ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 hanno superato l'esame con votazione che sarà comunicata dal docente in un secondo momento.