Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2019-20)

15 marzo 2021

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di verità richiesta considerando solo i casi in cui una e solo una delle tre proposizioni è falsa.

p	q	r	$\neg p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow \neg r$	$(\neg p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg r)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F

2) La parola $NAPOLI$ è formata da sei lettere tutte distinte; i suoi anagrammi anche privi di senso sono $6! = 720$. per quanto riguarda la parola $NAPOLETANO$, questa è composta da dieci lettere di cui tre: *N*, *A* e *O*, che si ripetono; i suoi anagrammi anche privi di senso sono pertanto $\dfrac{10!}{(2!)^3} = 453.600$.

3) $\lim_{x \to -2} \dfrac{3x-1}{2} = -\dfrac{7}{2}$. Verifica: $\forall \epsilon > 0$ si ha $\left|\dfrac{3x-1}{2} - \left(-\dfrac{7}{2}\right)\right| = \left|\dfrac{3x+6}{2}\right| = \dfrac{3}{2}\left|x+2\right|$, posto $\dfrac{3}{2}\left|x+2\right| < \epsilon$ risulta $|x+2| < 2\epsilon/3$ da cui $\delta_\epsilon = 2\epsilon/3$, limite verificato.

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{log(1+x^2) - log(1-x^2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{log(1+x^2)}{x^2} + \dfrac{log(1-x^2)}{-x^2} = (\to 1) + (\to 1) = 2$.

$\lim_{x \to 0} sen^2 x \cdot \left(x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot sen^2 x - \dfrac{sen^2 x}{x^2} = (\to 0) \cdot (\to 0) - (\to 1) = -1$.

5) $C.E.$: $3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$y(-x) = \dfrac{e^{1-(-x)}}{3(-x)} = -\dfrac{e^{1+x}}{3x}$. $y(-x)$ è diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$; funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\dfrac{e^{1-x}}{3x} > 0 \Rightarrow 3x > 0 \Rightarrow x > 0$, in quanto e^{1-x} è un'esponenziale, quindi positiva. Funzione negativa in $]-\infty, 0[$, positiva in $]0, +\infty[$. Nessuna intersezione con gli assi.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{1-x}}{3x} = \dfrac{(\to +\infty)}{(\to -\infty)} = FI$, possiamo risolvere il limite applicando il Teorema di de l'Hôpital:

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{1-x}}{3x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \dfrac{-e^{1-x}}{3} = -\infty$.

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{e^{1-x}}{3x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{e^{1-x}}{3x^2} = \dfrac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)} = FI$, anche in questo caso possiamo risolvere il limite applicando il Teorema di de l'Hôpital per due volte consecutivamente:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{1-x}}{3x^2} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{1-x}}{6x} = \frac{(\to -\infty)}{(\to -\infty)} = FI \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{1-x}}{6} = +\infty$. La funzione a sinistra non presenta asintoti.

$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{e^{1-x}}{3x} = \frac{(\to e)}{(\to 0^{\pm})} = \pm\infty$. AV di equazione $x = 0$.

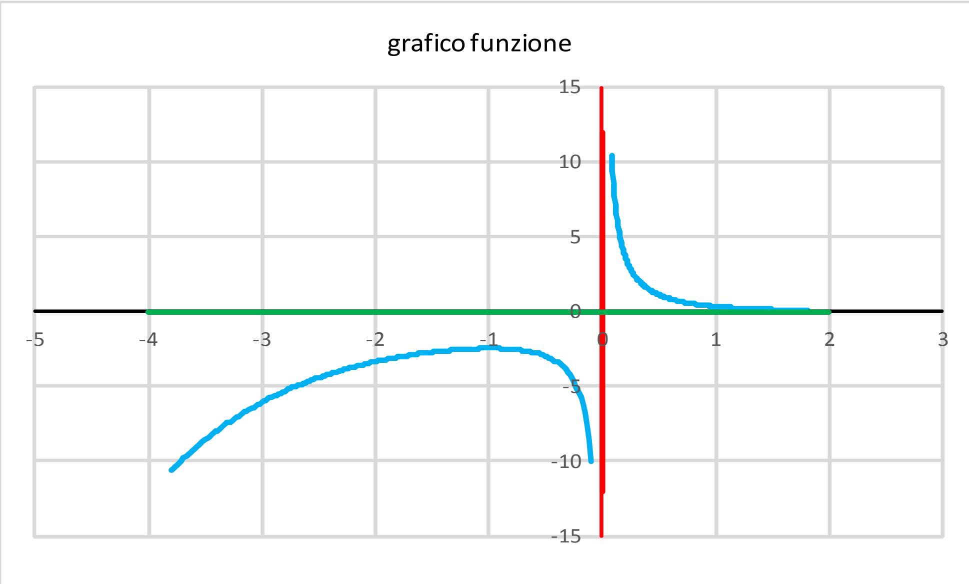
$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1-x}}{3x} = \frac{(\to 0)}{(\to +\infty)} = 0$. $AO\ dx$ di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-e^{1-x} \cdot 3x - e^{1-x} \cdot 3}{(3x)^2} = \frac{-\cancel{3}\, e^{1-x}(x+1)}{\cancel{9}^{3} x^2} = \frac{-e^{1-x}(x+1)}{3x^2}$. $y' > 0 \Rightarrow \frac{-e^{1-x}(x+1)}{3x^2} > 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$.

Funzione strettamente crescente in $]-\infty, -1]$; strettamente decrescente in $[-1, 0[$ e in $]0, +\infty[$. Punto di massimo relativo per $x = -1$, con $y(-1) = -e^2/3$.

Concavità e convessità: l'esistenza del punto di massimo relativo di ascissa negativa, insieme ai due asintoti prima determinati ed al fatto che la funzione non presenta punti di flesso, implica che tale funzione è strettamente concava in $]-\infty, 0[$, strettamente convessa in $]0, +\infty[$.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale della funzione, in verde quello orizzontale):



.

6) $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - log|x| - \frac{2}{x}\right)_1^3 = \left(9 - log\,3 - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - log\,1 - 2\right) = 10 - log\,3$.

7) La funzione proposta è composizione di funzioni continue e derivabili in tutto l'insieme $\mathbb{R}$, ne consegue che essa è continua e derivabile nell'intervallo $[-1, 1]$, $y(-1) = y(1) = 1$; a tale funzione è applicabile il Teorema di Rolle nell'intervallo proposto. $y' = -2xe^{2-x^2}$, per determinare x_0 è quindi necessario risolvere l'equazione: $y' = 0 \Rightarrow -2xe^{2-x^2} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$.

8) $\nabla f = (2x - 4, 3y^2 - 27)$.

FOC: $\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 3y^2 - 27 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 3 \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(2, \pm 3)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 12y$.

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 36 > 0$, $f''_{xx}(P_1) = 2 > 0$. P_1 punto di minimo.

$|\mathcal{H}f(P_2)| = -36 < 0$. P_2 punto di sella.