Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

31 maggio 2021

Compito Unico

1) *I METODO* (con la tavola di verità). Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata:

p	q	$\neg p\ e\ q$	$\neg(\neg p\ e\ q)$	$p\ o\ \neg q$	$\neg(\neg p\ e\ q) \Rightarrow (p\ o\ \neg q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V

Dall'ultima colonna della tavola di verità deriva che la proposizione proposta è una tautologia.

II METODO (con le operazioni della logica matematica). Per le leggi di de Morgan, la proposizione $\neg(\neg p\ e\ q)$ è equivalente alla proposizione $p\ o\ \neg q$, pertanto $\neg(\neg p\ e\ q) \Rightarrow (p\ o\ \neg q)$ equivale logicamente alla $(p\ o\ \neg q) \Rightarrow (p\ o\ \neg q)$ che è banalmente una tautologia.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R}: -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$;
$B = \{x \in \mathbb{R}: 3^x < 81\} = \{x \in \mathbb{R}: 3^x < 3^4\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 4\} =]-\infty, 4[$, dato che $A \subset B$ risulta $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$. $A \cup C(B) = [-2, 2] \cup [4, +\infty[$, $C(A) \cap B =]-\infty, -2[\cup]2, 4[$, e di conseguenza $\delta(A \cup C(B)) = \delta(C(A) \cap B) = \{-2, 2, 4\}$.

(Che i due insiemi presentino la stessa fontiera è implicito dal fatto che $A \cup C(B) = C(C(A) \cap B)$ e ogni insieme presenta sempre la stessa frontiera del suo complementare.)

3) La funzione proposta risulta continua in tutto l'insieme dei numeri reali se si verificano le seguenti due uguaglianze:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x).$$

Calcoliamo i quattro limiti:

$i.$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} -1 + x = -1 + a$;
$ii.$ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} 3 - x = 3 - a$;
$iii.$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} 3 - x = 3 - b$;
$iiii.$ $\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} -3 + x = -3 + b$.

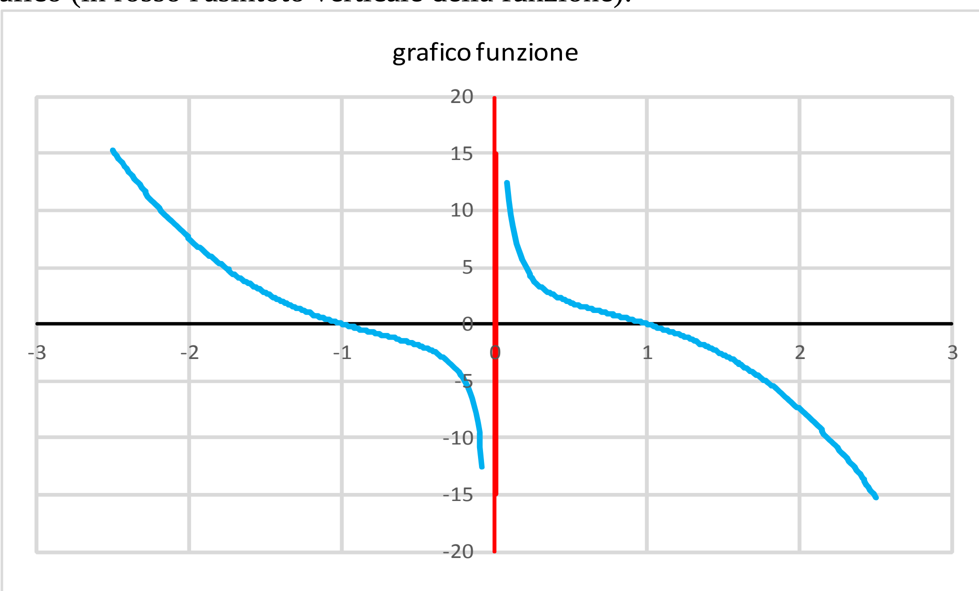
Pertanto la funzione è continua in tutto l'insieme dei numeri reali se si verificano le due condizioni $-1 + a = 3 - a$ e $3 - b = -3 + b$, da cui $a = 2$ e $b = 3$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\,x} + sen\,x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\,x} - 1}{sen\,x} \cdot \frac{sen\,x}{x} + \frac{sen\,x}{x} =$$
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{sen\,x} - 1}{sen\,x} + 1 \right) \cdot \frac{sen\,x}{x} = ((\to 1) + 1) \cdot (\to 1) = 2.$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \to +\infty} x \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)} =$$
$$\lim_{x \to +\infty} \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} = \sqrt{1 + (\to 0)} = 1.$$

(Il primo limite può essere risolto anche con l'utilizzo del Teorema di de l'Hôpital, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\,x} + sen\,x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$ FI; applichiamo il Teorema:
$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\,x} + sen\,x - 1}{x} \overset{H}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{e^{sen\,x} \cdot cos\,x + cos\,x}{1} =$
$(\to 1) \cdot (\to 1) + (\to 1) = 2.$)

5) $C.E.$: $x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
$y(-x) = \frac{1-(-x)^4}{-x} = -\frac{1-x^4}{x} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi). la studiamo solo per $x > 0$ ed operiamo per simmetria.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $\frac{1-x^4}{x} > 0 \Rightarrow 1 - x^4 > 0 \Rightarrow x^4 < 1$ $\Rightarrow x < 1$. Funzione positiva per le $0 < x < 1$, negativa per le $x > 1$. Intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A(1, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-x^4}{x} = \frac{(\to 1)}{(\to 0^+)} = +\infty$; AV di equazione $x = 0$;
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^4}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} - x^3 = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^4}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} - x^2 = (\to 0) - (\to +\infty)$
$= -\infty$. La funzione non presenta né asintoti orizzontali, né obliqui.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{-4x^3 \cdot x - (1-x^4) \cdot 1}{x^2} = -\frac{1+3x^4}{x^2}$. $y' < 0$, $\forall x > 0$. Funzione strettamente decrescente in $\mathbb{R}_{++}$.
Concavità e convessità: $y'' = -\frac{12x^3 \cdot x^2 - (1+3x^4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\cancel{x}(1-3x^4)}{x^{\cancel{4}3}} =$
$\frac{2(1-3x^4)}{x^3}$. $y'' > 0$ se $1 - 3x^4 > 0 \Rightarrow 3x^4 < 1 \Rightarrow x^4 < 1/3 \Rightarrow 0 < x < \sqrt[4]{1/3}$.
Funzione strettamente convessa $]0, \sqrt[4]{1/3}]$, strettamente concava in $[\sqrt[4]{1/3}, +\infty[$.
Punto di flesso in $(\sqrt[4]{1/3}, 2\sqrt[4]{3}/3)$
Grafico (in rosso l'asintoto verticale della funzione):



.

6) $\int_0^{\pi} (sen\,x - 2\,cos(2x))\,dx = (-cos\,x - sen(2x))_0^{\pi} =$
$(-cos\,\pi - sen\,2\pi) - (-cos\,0 - sen\,0) = 2.$

7) La funzione proposta è differenza di funzioni continue e derivabili in tutto l'insieme $\mathbb{R}$, ne consegue che essa è continua e derivabile nell'intervallo $[1,2]$; a tale funzione è applicabile il Teorema di Lagrange nell'intervallo proposto. $y(1) = 2^1 - 2 \cdot 1 = 0$, $y(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$ e $y' = 2^x \cdot log\,2 - 2$. Per determinare x_0 è quindi necessario risolvere l'equazione: $y' = \dfrac{y(2) - y(1)}{2-1} \Rightarrow 2^x \cdot log\,2 - 2 = 0 \Rightarrow 2^x = \dfrac{2}{log\,2} =$
$2\,log_2\,e \Rightarrow x_0 = log_2(2\,log_2\,e) = log_2(log_2\,e^2).$

8) $\nabla f = (-4x, 12 - 3y^2).$

FOC: $\begin{cases} -4x = 0 \\ 12 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2 \end{cases}$, due punti critici $P_{1,2}(0, \pm 2)$.

$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f| = 24y.$

SOC: $|\mathcal{H}f(P_1)| = 48 > 0$, $f''_{xx}(P_1) = -4 < 0$. P_1 punto di massimo.
$|\mathcal{H}f(P_2)| = -48 < 0$. P_2 punto di sella.