Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

28 giugno 2021

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione indicata:

p	q	$p\ o\ \neg q$	$\neg(p\ o\ \neg q)$	$p\ e\ \neg q$	$\neg(p\ o\ \neg q)\ e\ (p\ e\ \neg q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F

Dall'ultima colonna della tavola di verità deriva che la proposizione proposta è una contraddizione.

2) $I_1 \cap I_2 = [2,8]$, da $(I_1 \cap I_2) \cup I_3 = [2,12[$ si ottiene $2 \leq Inf(I_3) \leq 8$ e $Sup(I_3) = 12 \notin I_3$; $I_1 \cup I_2 = [0,10]$ e da $(I_1 \cup I_2) \cap I_3 = [4,10]$ si ha $Inf(I_3) = 4 \in I_3$; $I_3 = [4,12[$. $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = [4,8]$ e $\delta(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \delta([4,8]) = \{4,8\}$.

3) $y(0) = \dfrac{b}{c}$, pertanto dalla condizione $y(0) = 1$ si ottiene $b = c \neq 0$; la funzione presenta asintoto orizzontale di equazione $y = 2$ se e solo se $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 2$, ma

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{x+c} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(a+\frac{b}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{c}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a+\frac{b}{x}}{1+\frac{c}{x}} = a,$$

quindi $a = 2$, infine la funzione presenta asintoto verticale di equazione $x = -2$ se e solo se $\lim_{x \to -2} y(x) = \infty$, ma $\lim_{x \to -2} y(x) = \lim_{x \to -2} \dfrac{ax+b}{x+c} = \infty$ solo se $\lim_{x \to -2} x + c = 0$ ovvero $c = 2$, e da questa condizione abbiamo:

$$\lim_{x \to -2} \frac{ax+b}{x+c} = \lim_{x \to -2} \frac{2x+2}{x+2} = \frac{(\to -2)}{(\to 0)} = \infty.$$ In conclusione $a = b = c = 2$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{log(1+sen(5x))}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{log(1+sen(5x))}{sen(5x)} \cdot \frac{sen(5x)}{5x} \cdot 5 = (\to 1) \cdot (\to 1) \cdot 5 = 5.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \sqrt{(\to e)} = \sqrt{e}.$$

5) $C.E.$: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$; $C.E. = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

$y(-x) = 2^{(-x)^2+\frac{1}{(-x)^2}} = 2^{x^2+\frac{1}{x^2}} = y(x)$. Funzione pari (simmetrica rispetto all'asse delle ordinate), la studiamo solo per $x > 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0,\ \forall x > 0$, in quanto la funzione è un'esponenziale.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0^+} 2^{x^2+\frac{1}{x^2}} = 2^{(\to 0)+(\to +\infty)} = 2^{(\to +\infty)} = +\infty$; AV di equazione $x = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} 2^{x^2+\frac{1}{x^2}} = 2^{(\to +\infty)+(\to 0)} = 2^{(\to +\infty)} = +\infty$;

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^{x^2+\frac{1}{x^2}}}{x} = +\infty$; in quanto per x che tende a $+\infty$, si ha $x = o\left(2^{x^2}\right)$ e $2^{x^2+\frac{1}{x^2}} \asymp 2^{x^2}$. La funzione non presenta né asintoti orizzontali, né obliqui.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2^{x^2+\frac{1}{x^2}} \cdot log\, 2 \cdot \left(2x - \frac{2}{x^3}\right) =$ $2^{x^2+\frac{1}{x^2}+1} \cdot log\, 2 \cdot \left(x - \frac{1}{x^3}\right)$. $y' > 0$ se $x - \frac{1}{x^3} > 0 \Rightarrow \frac{x^4-1}{x^3} > 0$, che per $x > 0$ è verificata se $x^4 - 1 > 0 \Rightarrow x^4 > 1 \Rightarrow x > 1$. Funzione strettamente decrescente in $]0, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty[$. Punto di minimo assoluto $x = 1$, di ordinata $y(1) = 4$.

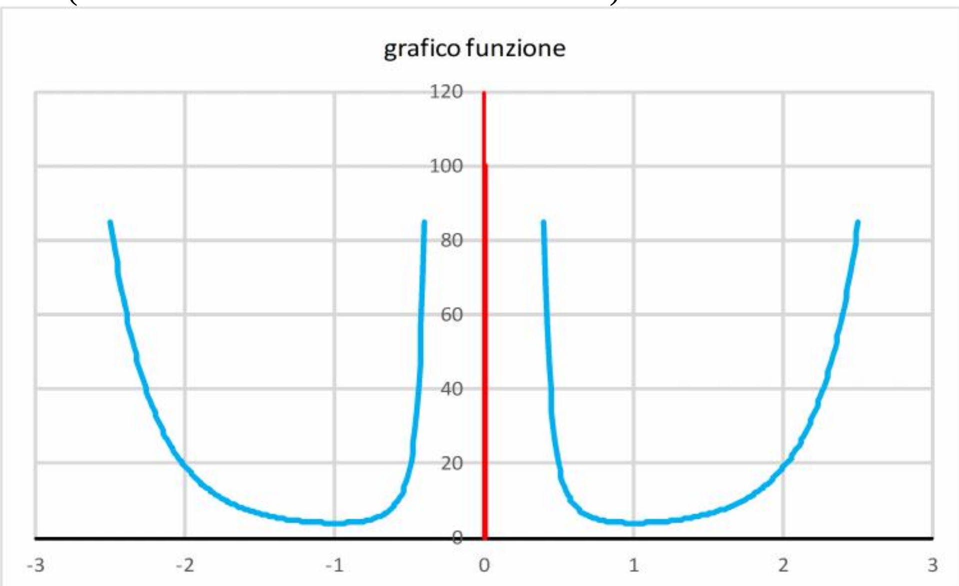
Concavità e convessità: $y'' = 2^{x^2+\frac{1}{x^2}+1} \cdot log^2\, 2 \cdot \left(2x - \frac{2}{x^3}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x^3}\right)$

$$+ 2^{x^2+\frac{1}{x^2}+1} \cdot log\, 2 \cdot \left(1 + \frac{3}{x^4}\right) =$$

$$2^{x^2+\frac{1}{x^2}+1} \cdot log\, 2 \cdot \left(2 \cdot log\, 2 \cdot \left(x - \frac{1}{x^3}\right)^2 + 1 + \frac{3}{x^4}\right).$$

$y'' > 0,\ \forall x > 0$. Funzione strettamente convessa in $]0, +\infty[$.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale della funzione):



6) $\int_0^{\pi} (sen\, x \cdot (1 + 2\, cos\, x))\, dx = \int_0^{\pi} (sen\, x + 2\, sen\, x\, cos\, x)\, dx =$ $\left(-cos\, x + sen^2 x\right)_0^{\pi} = \left(-cos\, \pi + sen^2 \pi\right) - \left(-cos\, 0 + sen^2 0\right) = 2.$

7) $Y = A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k \\ 2k \\ k \end{pmatrix}$;

$||Y|| = \sqrt{(2k)^2 + (2k)^2 + k^2} = \sqrt{9k^2} = 3|k|$; il modulo del vettore Y è pari a 9 se e solo se $3|k| = 9$, ovvero $|k| = 3$ da cui $k = \pm 3$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(P) = \nabla z(P) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$.

$z(P) = 0$, $\nabla z = \left(e^{x-y} - 8x, -e^{x-y} + 6y\right)$, $\nabla z(P) = (-7, 5)$. Equazione del piano tangente: $z - 0 = -7(x-1) + 5(y-1)$ che può essere riscritto come $z = -7x + 5y + 2$ oppure $7x - 5y + z = 2$.