Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

8 settembre 2021

Compito Unico

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione proposta considerando solo i tre casi in cui una e solo una fra le tre proposizioni semplici è vera:

p	q	r	$\neg(q \Leftrightarrow r)$	$p\, e\, \neg r$	$\neg(q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p\, e\, \neg r)$
V	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

.

2) $A = ([-2,3] \cup]5,8[) \cap [-6,6] = [-2,3] \cup]5,6]$; $\delta(A) = \{-2,3,5,6\}$ e $\overline{A} = [-2,3] \cup [5,6]$. Dato che $\overline{A} \neq A$, A non è chiuso, inoltre $\delta(A) \cap A \neq \emptyset$ e quindi A non è aperto; in conclusione A è né aperto né chiuso.

3) $f(g(x)) = f(x+b) = a(x+b)+2 = ax+ab+2$. Posto $f(g(x)) = ax+ab+2 = 2x+1$ si ottiene $a=2$ e $ab+2=1$ da cui $b=-1/2$.

4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^2 - sen\, x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x^2}{x^2} - \frac{sen\, x^2}{x^2} = (\to 1) - (\to 1) = 0.$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \sqrt{(\to e)} = \sqrt{e}.$

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

$y(-x) = (-x)^3 - 24(-x)^2 + 165(-x) = -x^3 - 24\,x^2 - 165\,x$ che è quantita diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$. Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $x^3 - 24\,x^2 + 165\,x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 24\,x + 165) > 0$; studiamo separatamente i due fattori:

1. $x > 0$;
2. $x^2 - 24\,x + 165 > 0$; disequazione di secondo grado; iniziamo con calcolare il $\Delta = (-24)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 165 = 576 - 660 = -84 < 0$. La disequazione è sempre verificata. Funzione negativa in $]-\infty, 0[$, positiva in $]0, +\infty[$. Unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} x^3 - 24\,x^2 + 165\,x = (\to -\infty) - (\to +\infty) + (\to -\infty) = -\infty;$

$\displaystyle \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 24\,x^2 + 165\,x}{x} = \lim_{x \to -\infty} x^2 - 24\,x + 165 = (\to +\infty) - (\to -\infty) = +\infty;$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x^3 - 24\,x^2 + 165\,x = (\to +\infty) - (\to +\infty) + (\to +\infty) = +\infty - \infty$, FI; per superare la forma di indecisione raccogliamo a fattor comune la quantità x^3;

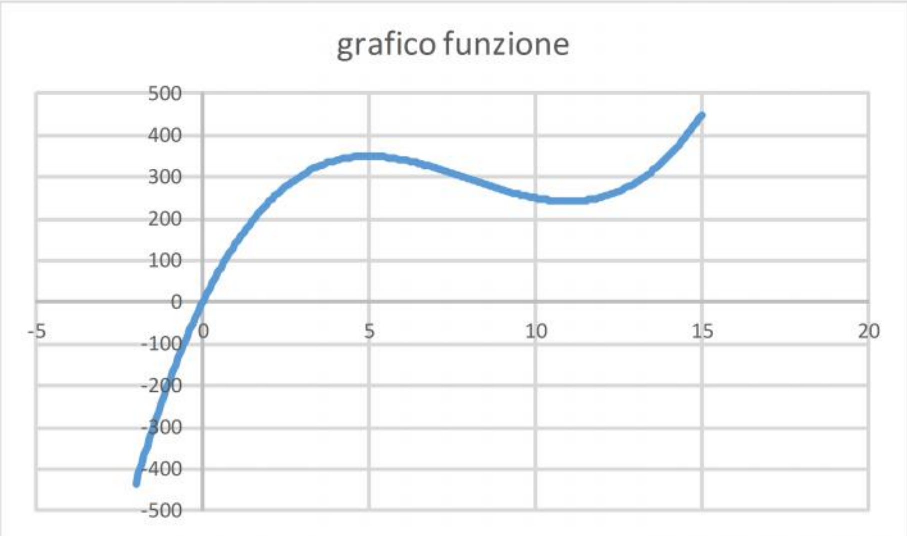
$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x^3 - 24\,x^2 + 165\,x = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{24}{x} + \frac{165}{x^2}\right) = (\to +\infty) \cdot (\to 1) = +\infty;$

$\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 24\,x^2 + 165\,x}{x} = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 24\,x + 165 = (\to +\infty) - (\to +\infty) = +\infty - \infty$, FI; procediamo come in precedenza ed in questo caso raccogliamo la quantità x^2;

$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 24\,x + 165 \ = \ \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 \ - \ \frac{24}{x} + \frac{165}{x^2}\right) \ =$
$(\to \ +\infty) \cdot (\to 1) \ = \ +\infty$. La funzione non presenta né asintoti orizzontali, né obliqui.
Crescenza e decrescenza: $y' = 3\,x^2 - 48\,x + 165 = 3(x^2 - 16\,x + 55)$. $y' > 0$ se $x^2 - 16\,x + 55 > 0$; disequazione di secondo grado; calcoliamo il $\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 55 = 256 - 220 = 36 > 0$.

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{16 \pm 6}{2} = \begin{matrix} \nearrow & x_1 = \frac{16-6}{2} = 5 \\ \searrow & x_2 = \frac{16+6}{2} = 11 \end{matrix}$$, da cui $x < 5 \vee x > 11$.

Funzione strettamente crescente in $]-\infty, 5]$ e in $[11, +\infty[$, strettamente decrescente in $[5, 11]$. Punto di massimo relativo $x = 5$, di ordinata $y(5) = 350$, punto di minimo relativo $x = 11$, di ordinata $y(11) = 242$.
Concavità e convessità: $y'' \ = \ 3(2\,x - 16) \ = \ 6(x - 8)$. $y'' > 0$ se $x - 8 > 0 \ \Rightarrow \ x > 8$. Funzione strettamente concava in $]-\infty, 8]$, strettamente convessa in $[8, +\infty[$. Punto di flesso $F(8, 296)$.
Grafico:



.

6) $\int_{-1}^{3}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)dx \ = \ \int_{-1}^{3}\left(\frac{x+2-1}{x+2}\right)dx \ = \ \int_{-1}^{3}\left(1 - \frac{1}{x+2}\right)dx \ =$
$(x - log|x+2|)_{-1}^{3} \ = \ (3 - log\,5) \ - \ (-1 - log\,1) \ = 4 - log\,5$.

7) La matrice B è una matrice identità pertanto $D = A \cdot B \cdot C = A \cdot C =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-3+0 & 0+3+0 \\ 0+4+2 & 0-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

$D \cdot X = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 - 4x_2 \end{pmatrix}$; posto
$\begin{pmatrix} -3x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ si ottiene facilmente $x_1 = x_2 = 1$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(O) = \nabla z(O) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
$z(O) = e^0 = 1$, $\nabla z = \left(e^{4x-3x^2y} \cdot (4 - 6xy), e^{4x-3x^2y} \cdot (-3x^2)\right)$, $\nabla z(O) = (4, 0)$.
Equazione del piano tangente: $z - 1 = 4 \cdot x + 0 \cdot y$ che può essere riscritta come $z = 4x + 1$ oppure $4x - z = -1$.