Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2020-21)

22 settembre 2021

Compito Unico

1)

p	q	$\neg(q \Leftrightarrow p)$	$\neg(p\ e\ q)$	$\neg(q \Leftrightarrow p) \Rightarrow \neg(p\ e\ q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

La proposizione proposta è una tautologia.

2) $[-2,3] \subset [-6,6]$, pertanto $A = ([-2,3] \cup [-6,6]) \cap]5,8[=$ $[-6,6] \cap]5,8[=]5,6]$; $\overset{\circ}{A} =]5,6[$ e $D(A) = [5,6]$. Dato che $\overset{\circ}{A} \subset A \subset D(A)$, A è né aperto né chiuso.

3) Da $f(x) = log(1+x)$ e $f(g(x)) = log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ si ottiene

$f(g(x)) = log(1 + g(x)) = log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$, da cui facilmente $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

$g(f(x)) = \dfrac{1}{f^2(x)} = \dfrac{1}{(log(1+x))^2}$.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,2x - sen\,x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,2x}{2x} \cdot 2 - \dfrac{sen\,x^2}{x^2} \cdot x =$ $(\to 1) \cdot 2 - (\to 1) \cdot (\to 0) = 2$.

Per il secondo limite notiamo che per $x \to +\infty$, $log(1+x) = o(x)$ e quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{o(x)}{x} = 0$. Il limite può essere risolto anche con l'utilizzo del Teorema di de L'Hôpital, infatti $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log(1+x)}{x} = \dfrac{(\to +\infty)}{(\to +\infty)}$ FI, da cui $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log(1+x)}{x} \overset{H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$.

5) $C.E.$: $\mathbb{R}$.

$y(-x) = (-x)^2 e^{(-x)^2} = x^2 e^{x^2} = y(x)$. Funzione pari, la studiamo solo per $x \geq 0$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0,\ \forall x \geq 0$, in quanto prodotto fra quantità non negativa e quantità positiva. Unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

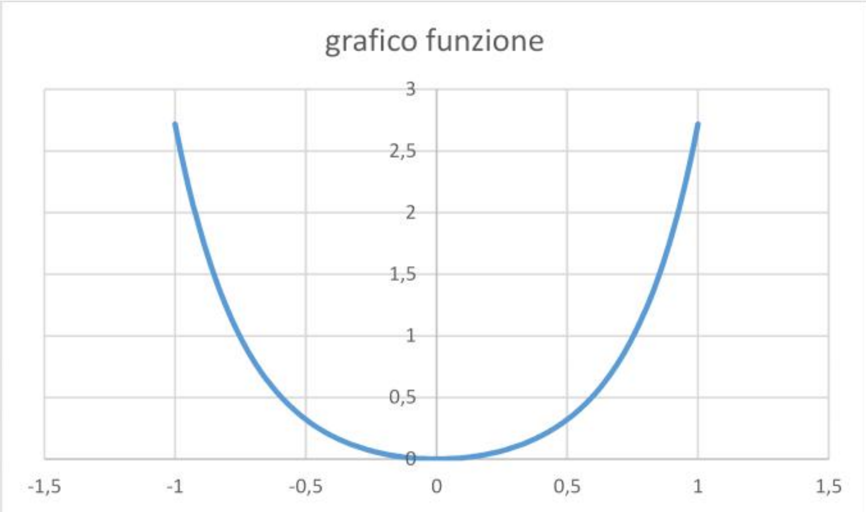
$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{x^2} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}} e^{x^2}}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{x^2} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) =$ $+\infty$. La funzione non presenta né asintoti orizzontali, né obliqui.

Crescenza e decrescenza: $y' = 2x \cdot e^{x^2} + x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2x(1+x^2)e^{x^2}$. $y' > 0$ se $2x > 0 \Rightarrow x > 0$. Funzione strettamente crescente in $[0, +\infty[$. Punto di minimo assoluto in $O(0,0)$.

Concavità e convessità: $y'' = 2(1+x^2)e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} + 2x(1+x^2)e^{x^2} \cdot 2x =$ $2(1 + 5x^2 + 2x^4)e^{x^2}$. $y'' > 0,\ \forall x \geq 0$. Funzione strettamente convessa in $[0, +\infty[$. Nessun punto di flesso.

Grafico:



.

6) Calcoliamo per prima cosa la primitiva della funzione integranda con il metodo dell'integrazione per sostituzione: posto $1 + log\, x = t$ si ha $log\, x = t - 1$ e $x = e^{t-1}$ con $dx = e^{t-1}dt$ da cui $\int \left(\frac{1 + log\, x}{x} \right) dx \;=\; \int \frac{t}{e^{\cancel{t-1}}}\, e^{\cancel{t-1}}dt \;=\; \int t\, dt \;=\; \frac{1}{2}t^2 + c$. Ritorniamo all'integrale definito: $\int_1^e \left(\frac{1 + log\, x}{x} \right) dx \;=\; \left(\frac{1}{2}(1 + log\, x)^2 \right)_1^e \;=\; \left(\frac{1}{2}(1 + log\, e)^2 \right) \;-\; \left(\frac{1}{2}(1 + log\, 1)^2 \right) \;=\; 2 - \frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{2}$.

7) Ricordiamo che se una funzione di equazione $y = f(x)$ è derivabile due volte nel punto 0, il suo polinomio di grado due ha espressione

$P_2(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2}\, y''(0) \cdot x^2$, per la funzione proposta risulta:

$y(0) = e^0 - cos\, 0 = 1 - 1 = 0$, $y' = 2e^{2x} + sen\, x$,

$y'(0) = 2e^0 + sen\, 0 = 2 + 0 = 2$, $y'' = 4e^{2x} + cos\, x$,

$y''(0) = 4e^0 + cos\, 0 = 4 + 1 = 5$; e quindi il polinomio richiesto ha espressione

$P_2(x) = 2x + \frac{5}{2}\, x^2$.

8) $f'_x = 2(x + y)$ $\qquad f'_y = 2(x + y) - (z + w)^3$

$$f'_z = f'_w = \; - 3y \cdot (z + w)^2 \, .$$