

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

10 gennaio 2022

Compito G1[✓]

- 1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità delle tre proposizioni semplici sapendo che la proposizione composta $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ è falsa, mentre è vera la proposizione composta $\neg(p \Leftrightarrow r)$.
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 3x\}$ e $B = [1, 3\pi[$. Determinare l'insieme $C = A \cup \mathcal{C}(B)$, l'insieme frontiera di C , ed indicare se l'insieme C è aperto, chiuso o né aperto né chiuso. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare di X)
- 3) (6 punti) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 8}{x^2}$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\arcsen x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{-3x} - 3^{4x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = -\frac{x}{x^2 - 1}$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta un unico punto di flesso di ascissa nulla.)
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} \right) dx$.
- 7) (8 punti) La funzione di equazione $y = f(x)$ presenta nel punto $x_0 = 0$ retta tangente di equazione $y = -3x$; determinare i valori di $f(0)$ e $f'(0)$. Sia inoltre $g(x) = -f\left(\frac{1}{2} \cdot f(x)\right)$; calcolare $g(0)$ e $g'(0)$.
- 8) (7 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = x^2 + \alpha y^2 - 2x + 8y$. Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(1, -1)$; dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

[✓] Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

10 gennaio 2022

Compito G2[✓]

- 1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità delle tre proposizioni semplici sapendo che la proposizione composta $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ è falsa, mentre è vera la proposizione composta $\neg(p \Leftrightarrow q)$.
- 2) (7 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq -3x\}$ e $B =]-e, 3[$.
Determinare l'insieme $C = \mathcal{C}(A) \cap B$, l'insieme frontiera di C , ed indicare se l'insieme C è aperto, chiuso o né aperto né chiuso. (Con $\mathcal{C}(X)$ indichiamo l'insieme complementare di X)
- 3) (6 punti) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{2x^2}$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(1 - \cos x)}{2x^2}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{3x} - 3^{-2x}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = -\frac{3x}{9 - x^2}$. (Non sono richiesti il calcolo e lo studio della derivata seconda. La funzione presenta un unico punto di flesso di ascissa nulla.)
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \right) dx$.
- 7) (8 punti) La funzione di equazione $y = f(x)$ presenta nel punto $x_0 = 0$ retta tangente di equazione $y = x$; determinare i valori di $f(0)$ e $f'(0)$. Sia inoltre $g(x) = f(f(7x))$; calcolare $g(0)$ e $g'(0)$.
- 8) (7 punti) Sia data la funzione a due variabili $f(x, y) = \alpha x^2 + y^2 - 6x + 8y$.
Determinare il valore del parametro α sapendo che l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-3, -4)$; dopo aver determinato il valore di α studiare la natura del punto critico.

[✓] Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena
Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)
10 gennaio 2022
Compito G3[✓]

- 1) (6 punti) Si dia un esempio di una coppia di insiemi di numeri reali \mathbb{A} e \mathbb{B} tali che $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ e $\delta(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \delta(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$. Con il simbolo δ si indica la frontiera di un insieme.
- 2) (8 punti) Sia data la funzione $f(x) = x^2$, sapendo che la funzione composta $g(f(x))$ ha espressione $g(f(x)) = \sqrt{x^4 + 2} - 3x^2$, determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e della funzione composta $f(g(x))$.
- 3) (6 punti) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 - 10x^2 + 25$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{1 - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x} - 1}{x - 2}$.
- 5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = x^2 \cdot e^{1-x}$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_0^3 (3-x)\sqrt{x} dx$.
- 7) (6 punti) Siano date le matrici $\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbb{N} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$; indicare il valore di k per cui risulta $\mathbb{M} \cdot \mathbb{N} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- 8) (8 punti) Calcolare le derivate parziali della funzione $f(x, y, z, w) = (y^2 + w)\sqrt{x^3 + y^2 z^3}$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

10 gennaio 2022

Compito G4[✓]

- 1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità delle tre proposizioni semplici sapendo che la proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r$ è falsa, così come è falsa la proposizione composta $\neg(r \Rightarrow p)$.
- 2) (8 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 3\}$, $B = [1, +\infty[$ e $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Determinare l'insieme $D = (A \cap B) \cup C$, l'insieme frontiera di D , ed indicare se l'insieme D è aperto, chiuso o né aperto né chiuso.
- 3) (6 punti) Calcolare il seguente limite e tramite la definizione in forma metrica verificare il risultato trovato: $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 6x + 9x^2$.
- 4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - \operatorname{sen}(2x^2))}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{3^{3x} + 3^{2x}}$.
- 5) (10 punti) Relativamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, determinare l'andamento del grafico della funzione $y = \log(2 + \operatorname{sen}x)$.
- 6) (8 punti) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot (1 + \operatorname{sen}^2 x)) dx$.
- 7) (6 punti) La funzione di equazione $y = x^2$ presenta nel punto x_0 retta tangente di coefficiente angolare uguale a $-\frac{1}{5}$; determinare il valore x_0 e scrivere l'equazione della retta tangente in tale punto.
- 8) (8 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione:
 $f(x, y, z, w) = x^3 z - e^{y-3z} - w^z$.

[✓] Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.