Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

7 febbraio 2022

Compito $\mathbb{F}1$

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ è falsa, $p \Leftrightarrow q$ è vera e r è falsa, quindi p e q o sono entrambe vere oppure sono entrambe false; veniamo ora alla proposizione $p \Rightarrow (q\ e\ r)$, se essa è vera, p è falsa, perché $q\ e\ r$ è falsa, quindi p e q sono entrambe false. Riassumendo, sotto le ipotesi poste risulta che p, q e r sono tutte false.

SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ:

p	q	r	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$	$q\ e\ r$	$p \Rightarrow (q\ e\ r)$
V	V	V	V	V		
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V		
V	F	F	F	V		
F	V	V	F	V		
F	V	F	F	V		
F	F	V	V	V		
$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F}$	V	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{V}$

Consideriamo nella tavola di verità solo le righe dove $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ è falsa, come evidenziato in grassetto, l'unico caso in cui sono verificate le ipotesi poste è quello in cui p, q e r sono tutte false.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 25\} = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x \leq 5\} = [-5, 5]$,
$B = \{x \in \mathbb{R}: log_2 x > 2\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 4\} =]4, +\infty[$,
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x \leq 5 \vee x > 4\} = [-5, +\infty[$,
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: -5 \leq x \leq 5 \wedge x > 4\} =]4, 5]$; $\delta(A \cup B) = \{-5\}$,
$\delta(A \cap B) = \{4, 5\}$.

3) La funzione di equazione data presenta asintoto obliquo destro di equazione $y = x - 1$ se: $i.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 1$ e $ii.$ $\lim\limits_{x \to +\infty} y - x = -1$.

Per il primo limite risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + bx + 1}{2x + 5} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + bx + 1}{2x^2 + 5x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(a + \frac{b}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{a + (\to 0)}{2 + (\to 0)} = \frac{a}{2}$$; posto $\frac{a}{2} = 1$ si ottiene $a = 2$.

Veniamo ora al secondo limite:

$$\lim_{x \to +\infty} y - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + bx + 1}{2x + 5} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(b-5)x + 1}{2x + 5} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(b - 5 + \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(2 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{b - 5 + (\to 0)}{2 + (\to 0)} = \frac{b-5}{2}$$; posto $\frac{b-5}{2} = -1$ si ottiene $b = 3$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{arcsen(1 - cos\, x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{arcsen(1 - cos\, x)}{1 - cos\, x} \cdot \frac{1 - cos\, x}{x^2} =$$

$$(\to 1) \cdot \left(\to \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{2^x}\right)^{4^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1+\frac{1}{2^x}\right)^{2^x}\right)^{2^x} = (\to e)^{(\to +\infty)} = +\infty.$$

5) $C.E.$: $2 - cosx > 0 \Rightarrow cosx < 2$, vera $\forall x \in [0, 2\pi]$; $D = [0, 2\pi]$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $log(2 - cosx) \geq 0 \Rightarrow$ $2 - cosx \geq 1 \Rightarrow cosx \leq 1$, vera $\forall x \in [0, 2\pi]$. Funzione non negativa nel suo dominio. $y = 0$ se $log(2 - cosx) = 0$ che è soddisfatta nei punti $x = 0$ o $x = 2\pi$, intersezioni con gli assi nei punti $O(0,0)$ e $A(2\pi, 0)$.

La funzione è continua in tutto il suo dominio limitato e chiuso in quanto combinazione di funzioni continue, quindi i limiti non sono necessari.

Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{2 - cosx} \cdot senx = \dfrac{senx}{2 - cosx}$. $y' > 0$, se $senx > 0 \Rightarrow 0 \leq x < \pi$. Funzione strettamente crescente in $[0, \pi]$, strettamente decrescente in $[\pi, 2\pi]$; punto di massimo assoluto $x = \pi$, di ordinata $y(\pi) = log\,3$, punti di minimo assoluto $x = 0$ o $x = 2\pi$, di ordinata $y(0) = y(2\pi) = 0$.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{cosx \cdot (2 - cosx) - senx \cdot senx}{(2 - cosx)^2} = \dfrac{2\,cosx - 1}{(2 - cosx)^2}$.

$y'' > 0$, se $2\,cosx - 1 > 0 \Rightarrow cosx > \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq x < \dfrac{\pi}{3} \vee \dfrac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi$.

Funzione strettamente convessa in $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ e in $\left[\dfrac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$, strettamente concava in $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi\right]$. Punti di flesso $F_1\left(\dfrac{\pi}{3}, log\,\dfrac{3}{2}\right)$ e $F_2\left(\dfrac{5}{3}\pi, log\,\dfrac{3}{2}\right)$.

Grafico:

.

6) Determiniamo tramite l'integrazione per parti la primitiva della funzione integranda:

$$\int (1 - x) \cdot sen\,x\,dx = (1 - x) \cdot (-cosx) - \int (-1) \cdot (-cosx)\,dx =$$
$$-(1 - x) \cdot cosx - sen\,x + k.$$

Per l'integrale definito si ottiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x) \cdot sen\,x\,dx = (-(1 - x) \cdot cosx - sen\,x)_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$\left(-\left(1 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot cos\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{\pi}{2}\right) - (-cos0 - sen\,0) = 0.$$

7) Una retta forma con l'asse delle ascisse un angolo di ampiezza pari a $45°$ se e solo se il suo coefficiente angolare è 1 oppure -1, inoltre il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nel punto, di conseguenza per determinare il punto x_0 dovremo risolvere l'equazione $y' = \pm 1$ con $y' = -e^{-x}$ da cui $-e^{-x} = \pm 1$ che ha come unica soluzione $x_0 = 0$. La retta tangente richiesta presenta equazione $y - y(0) = y'(0) \cdot x$ ovvero $y - 1 = -1 \cdot x$ che può essere riscritta come $y = -x + 1$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(O) = \nabla z(O) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
$z(O) = e^0 + 2\,e^0 = 3$, $\nabla z = (e^{x+y} + 2\,e^{x-y}, e^{x+y} - 2\,e^{x-y})$,
$\nabla z(O) = (e^0 + 2\,e^0, e^0 - 2\,e^0) = (3, -1)$. Equazione del piano tangente:
$z - 3 = 3 \cdot x - y$, oppure $3x - y - z = -3$.

Compito $\mathbb{F}2$

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ è falsa, p è vera e $q\ e\ r$ è falsa, quindi q e r non possono essere entrambe vere; veniamo ora alla proposizione $\neg p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$, se essa è vera, $q \Rightarrow r$ è falsa, perché $\neg p$ è falsa, quindi q è vera mentre r è falsa. Riassumendo, sotto le ipotesi poste risulta che p e q sono entrambe vere e r è falsa.

SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ:

p	q	r	$q\ e\ r$	$p \Rightarrow (q\ e\ r)$	$q \Rightarrow r$	$\neg p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V		
$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{F}$	F	$\boldsymbol{V}$
V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V		
F	V	F	F	V		
F	F	V	F	V		
F	F	F	F	V		

Consideriamo nella tavola di verità solo le righe dove $p \Rightarrow (q\ e\ r)$ è falsa, come evidenziato in grassetto, l'unico caso in cui sono verificate le ipotesi poste è quello in cui p e q sono entrambe vere e r è falsa.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$,
$B = \{x \in \mathbb{R}: log_4 x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x > 1\} =]1, +\infty[$,
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 3 \vee x > 1\} = [-3, +\infty[$,
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 3 \wedge x > 1\} =]1, 3]$; $A \cup B$ è un intervallo chiuso di conseguenza $\mathcal{D}(A \cup B) = A \cup B$, $\mathcal{D}(A \cap B) = [1, 3]$.

3) La funzione di equazione data presenta asintoto obliquo destro di equazione $y = 2x$ se: $i.$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 2$ e $ii.$ $\lim_{x \to +\infty} y - 2x = 0$.

Per il primo limite risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{3x - 1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ax^2 + bx + 3}{3x^2 - x} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(a + \frac{b}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{a + (\to 0)}{3 - (\to 0)} = \frac{a}{3}\text{; posto } \frac{a}{3} = 2 \text{ si ottiene } a = 6.$$

Veniamo ora al secondo limite:

$$\lim_{x \to +\infty} y - 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2 + bx + 3}{3x - 1} - 2x = \lim_{x \to +\infty} \frac{(b+2)x + 3}{3x - 1} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(b + 2 + \frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(3 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{b + 2 + (\to 0)}{3 - (\to 0)} = \frac{b+2}{3}$$; posto $\frac{b+2}{3} = 0$ si ottiene $b = -2$.

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(sen(2x))}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(sen(2x))}{sen^2(2x)} \cdot \frac{sen^2(2x)}{4x^2} \cdot 2 =$$

$$\left(\to \frac{1}{2}\right) \cdot (\to 1) \cdot 2 = 1 .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{4^x}\right)^{2^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{4^x}\right)^{4^x}\right)^{\frac{1}{2^x}} = (\to e)^{(\to 0)} = 1.$$

5) $C.E.$: $2 + cosx > 0 \Rightarrow cosx > -2$, vera $\forall x \in [0, 2\pi]$; $D = [0, 2\pi]$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $log(2 + cosx) \geq 0 \Rightarrow$ $2 + cosx \geq 1 \Rightarrow cosx \geq -1$, vera $\forall x \in [0, 2\pi]$. Funzione non negativa nel suo dominio. $y = 0$ se $log(2 + cosx) = 0$ che è soddisfatta nel punto $x = \pi$, intersezioni con l'asse delle ascisse nel punto $A(\pi, 0)$.

La funzione è continua in tutto il suo dominio limitato e chiuso in quanto combinazione di funzioni continue, quindi i limiti non sono necessari.

Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{2 + cosx} \cdot (-senx) = \frac{-senx}{2 + cosx}$. $y' > 0$, se $-senx > 0 \Rightarrow senx < 0 \Rightarrow \pi < x < 2\pi$. Funzione strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$, strettamente decrescente in $[0, \pi]$; punto di minimo assoluto $x = \pi$, di ordinata $y(\pi) = 0$, punti di massimo assoluto $x = 0$ o $x = 2\pi$, di ordinata $y(0) = y(2\pi) = log\,3$.

Concavità e convessità: $$y'' = \frac{-cosx \cdot (2 + cosx) + senx \cdot (-senx)}{(2 + cosx)^2} =$$

$-\frac{2\,cosx + 1}{(2 + cosx)^2}$. $y'' > 0$, se $2\,cosx + 1 < 0 \Rightarrow cosx < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$.

Funzione strettamente convessa in $\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$, strettamente concava in $\left[0, \frac{2}{3}\pi\right]$ e in $\left[\frac{4}{3}\pi, 2\pi\right]$. Punti di flesso $F_1\left(\frac{2}{3}\pi, log\,\frac{3}{2}\right)$ e $F_2\left(\frac{4}{3}\pi, log\,\frac{3}{2}\right)$.

Grafico:

.

6) Determiniamo tramite l'integrazione per parti la primitiva della funzione integranda:

$$\int (x+2) \cdot sen\, x\, dx \ = \ (x+2) \cdot (-cosx) - \int 1 \cdot (-cosx)\, dx \ =$$

$$-(x+2) \cdot cosx + sen\, x + k\,.$$

Per l'integrale definito si ottiene:

$$\int_0^{\pi} (x+2) \cdot sen\, x\, dx \ = \ (-(x+2) \cdot cosx + sen\, x)_0^{\pi} \ =$$

$$(-(\pi+2) \cdot cos\pi + sen\, \pi) \ - \ (-2\, cos 0 + sen\, 0) \ = 4 + \pi.$$

7) Una retta forma con l'asse delle ascisse un angolo di ampiezza pari a $45°$ se e solo se il suo coefficiente angolare è 1 oppure -1, inoltre il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nel punto, di conseguenza per determinare il punto x_0 dovremo risolvere l'equazione $y' = \pm 1$ con $y' = e^x$ da cui $e^x = \pm 1$ che ha come unica soluzione $x_0 = 0$. La retta tangente richiesta presenta equazione $y - y(0) = y'(0) \cdot x$ ovvero $y - 1 = 1 \cdot x$ che può essere riscritta come $y = x + 1$.

8) Il piano tangente alla superficie ha equazione $z - z(O) = \nabla z(O) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$z(O) = 3\, e^0 - e^0 = 2$, $\nabla z = (3\, e^{x+y} - e^{x-y}, 3\, e^{x+y} + e^{x-y})$,
$\nabla z(O) = (3\, e^0 - e^0, 3\, e^0 + e^0) = (2, 4)$. Equazione del piano tangente:
$z - 2 = 2 \cdot x + 4 \cdot y$, oppure $2x + 4y - z = -2$.

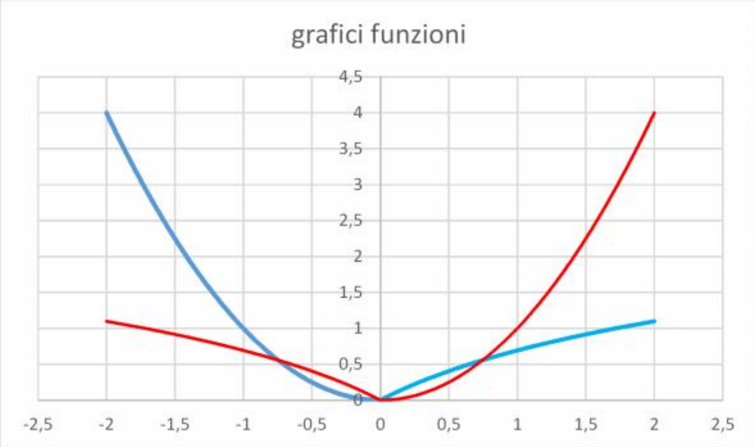
Compito $\mathbb{F}3$

1) Costruiamo la tavola di verità della proposizione $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p\ o\ q)$ sotto l'ipotesi che la proposizione composta $p\ e\ q$ sia falsa ovvero p e q non possono essere entrambe vere.

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p\ o\ q$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p\ o\ q)$
F	F	V	F	F
F	V	F	V	V
V	F	F	V	V

.

2) Di seguito i grafici delle funzioni $f(x)$ (in blu) e $g(x)$ (in rosso); come è facile notare il grafico della $g(x)$ si ottiene attraverso una rotazione di $180°$ del grafico della $f(x)$ attorno all'asse delle ordinate.



Per determinare l'insieme $g([-1,1])$, possiamo notare che $g(x)$ è strettamente monotona decrescente in $[-1,0]$, crescente in $[0,1]$, con $g(-1)=log\,2<1=g(1)$ e $g(0)=0$; pertanto $g([-1,1])=[0,1]$.

3) La funzione di equazione data presenta asintoto obliquo destro di equazione $y=-2x+1$ se: $i.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=-2$ e $ii.\ \lim_{x\to+\infty}y+2x=1$.

Per il primo limite risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+3x+3}{bx-1}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+3x+3}{bx^2-x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(a+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(b-\frac{1}{x}\right)}=\frac{a+(\to 0)}{b-(\to 0)}=\frac{a}{b}\text{; posto }\frac{a}{b}=-2\text{ si ottiene}$$

$a=-2b$.

Veniamo ora al secondo limite:

$$\lim_{x\to+\infty}y+2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2bx^2+3x+3}{bx-1}+2x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{bx-1}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(b-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+(\to 0)}{b-(\to 0)}=\frac{1}{b}\text{; posto }\frac{1}{b}=1\text{ si ottiene }b=1\text{ e }a=-2.$$

4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-sen^2x}-1}{1-cos\,x}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sqrt{1-sen^2x}-1}{-sen^2x}\cdot\frac{\frac{sen^2x}{x^2}}{\frac{1-cos\,x}{x^2}}=$$

$$-\left(\to\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(\to 1)}{\left(\to\frac{1}{2}\right)}=-1\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\cdot sen^2\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot sen\frac{1}{x}=(\to 1)\cdot(\to 0)=0\,.$$

5) $C.E.$: $\left((x-1)^2>0\wedge x>0\right)\Rightarrow(x-1\neq 0\wedge x>0)\Rightarrow(x\neq 1\wedge x>0)$,
$C.E.=\,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y\geq 0$ se $log(x-1)^2-log\,x\geq 0\Rightarrow$

$$log\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{x}\geq 1\Rightarrow\frac{(x-1)^2}{x}-1\geq 0\Rightarrow\frac{x^2-3x+1}{x}\geq 0\,.$$

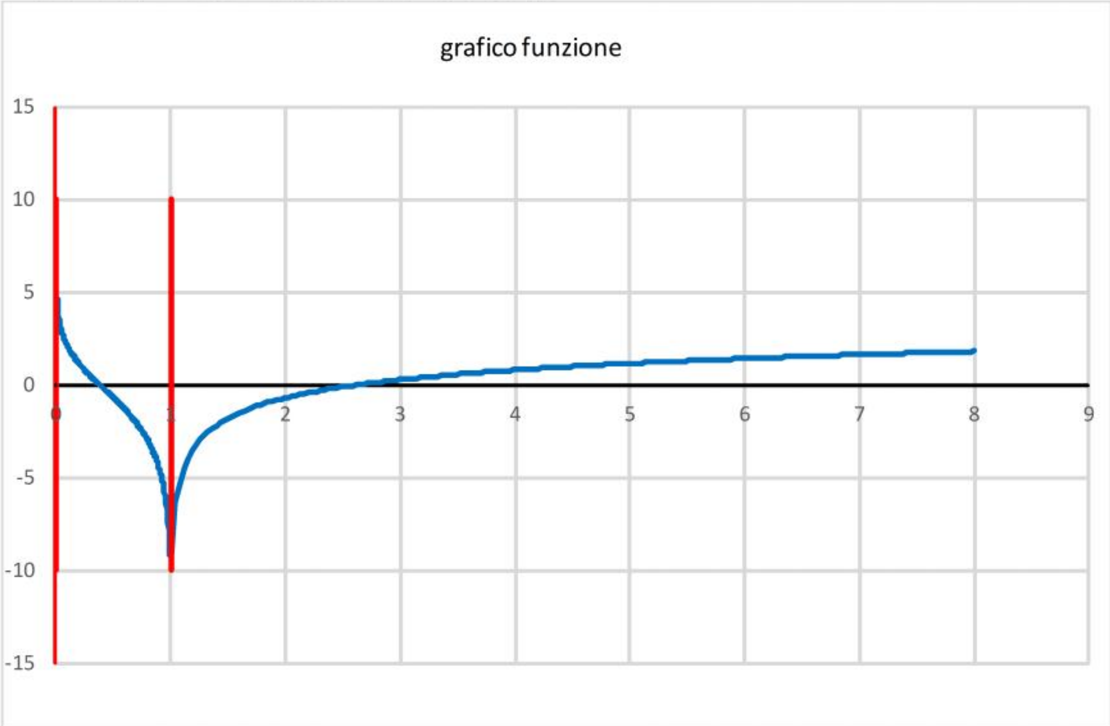
Notiamo che il denominatore è certamente positivo, quindi $y\geq 0$ se $x^2-3x+1\geq 0$; calcoliamo il discriminante $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1=5>0$,

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, soluzioni esterne alle radici, notiamo inoltre che

$0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1 < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, di conseguenza la funzione è positiva in $\left]0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$, negativa in $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right[\cup \left]1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$ con intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $A_{1,2}\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to 0^+} log(x-1)^2 - log\, x = (\to 0) - (\to -\infty) = +\infty$; AV di equazione $x = 0$;
$\lim_{x \to 1^\pm} log(x-1)^2 - log\, x = (\to -\infty) - (\to 0) = -\infty$; AV di equazione $x = 1$;
$\lim_{x \to +\infty} log(x-1)^2 - log\, x = \lim_{x \to +\infty} log\frac{(x-1)^2}{x} = log(\to +\infty) = +\infty$; in quanto $x = o\left((x-1)^2\right)$ per $x \to +\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} \frac{log(x-1)^2 - log\, x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\, log|x-1|}{x} - \frac{log\, x}{x} = 0$, in quanto sia $2\, log|x-1|$ che $log\, x$ sono $o(x)$ per $x \to +\infty$.
Crescenza e decrescenza: $y' = \frac{1}{(x-1)^{\cancel{2}}} \cdot 2\,\cancel{(x-1)} - \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x(x-1)}$. $y' > 0$ se $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ (notiamo che sia $x+1$ che x sono quantità positive nel $C.E.$.
Funzione strettamente monotona decrescente in $]0, 1[$, strettamente monotona crescente in $]1, +\infty[$.
Concavità e convessità: $y'' = \frac{1 \cdot (x^2 - x) - (x+1) \cdot (2x-1)}{(x^2-x)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{(x^2-x)^2}$. $y'' > 0$, se $x^2 + 2x - 1 < 0$, disequazione di secondo grado; calcoliamo il discriminante $\Delta = (2)^2 + 4 \cdot 2 = 12 > 0$, $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$, soluzioni interne alle radici, notiamo anche in questo caso che $-1-\sqrt{3} < 0 < -1+\sqrt{3} < 1$, di conseguenza la funzione è strettamente convessa in $\left]0, -1+\sqrt{3}\right]$, strettamente concava in $\left[-1+\sqrt{3}, 1\right[$ e in $]1, +\infty[$; $y\left(-1+\sqrt{3}\right) = log\frac{3\sqrt{3}-5}{2}$. Unico punto di inflessione $F\left(-1+\sqrt{3}, log\frac{3\sqrt{3}-5}{2}\right)$.

Grafico (in rosso i due asintoti verticali):



6) Determiniamo tramite l'integrazione per parti la primitiva della funzione integranda:

$$\int (3-x)\cdot sen(2x)\,dx\;=$$

$$(3-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\,cos(2x)\right)-\int(-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\,cos(2x)\right)dx\;=$$

$$-\frac{1}{2}(3-x)\cdot cos(2x)-\frac{1}{4}\,sen(2x)+k\,.$$

Per l'integrale definito si ottiene:

$$\int_0^{2\pi}(3-x)\cdot sen(2x)\,dx\;=\left(-\frac{1}{2}(3-x)\cdot cos(2x)-\frac{1}{4}\,sen(2x)\right)_0^{2\pi}\;=$$

$$\left(-\frac{1}{2}(3-2\pi)\cdot cos(4\pi)-\frac{1}{4}\,sen(4\pi)\right)-\left(-\frac{3}{2}\cdot cos\,0-\frac{1}{4}\,sen\,0\right)\;=\pi.$$

7) La generica equazione della retta tangente alla funzione è $y-y(x_0)=y'(x_0)(x-x_0)$ che incontra l'asse delle ascisse se $y=0$ ovvero se $x=x_0-\dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}$, quindi il triangolo considerato ha i tre vertici di coordinate $A\left(x_0-\dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)},0\right)$, $B(x_0,0)$ e $C(x_0,y(x_0))$ con base $\overline{AB}=\dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}$, altezza $\overline{BC}=y(x_0)$ e area $\mathcal{A}=\dfrac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)}$. Per la funzione considerata $y'=y$ quindi $\mathcal{A}=\dfrac{y(x_0)}{2}$ da cui x_0 si ottiene risolvendo $\dfrac{y(x_0)}{2}=1$ ovvero $y(x_0)=2$ e $x_0=log\,2$. L'equazione della retta tangente è $y-2=2(x-log\,2)$.

8) $\nabla f=(6x^2+6y,\,-2y+6x)$.

$$FOC\colon \begin{cases} 6x^2+6y=0 \\ -2y+6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+3x=0 \\ y=3x \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \searrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-9 \end{cases} \end{array}$$, punti critici

$O(0,0)$ e $A(-3,-9)$.

$\mathcal{H}f=\begin{bmatrix} 12x & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$; $|\mathcal{H}f|=-24x-36$.

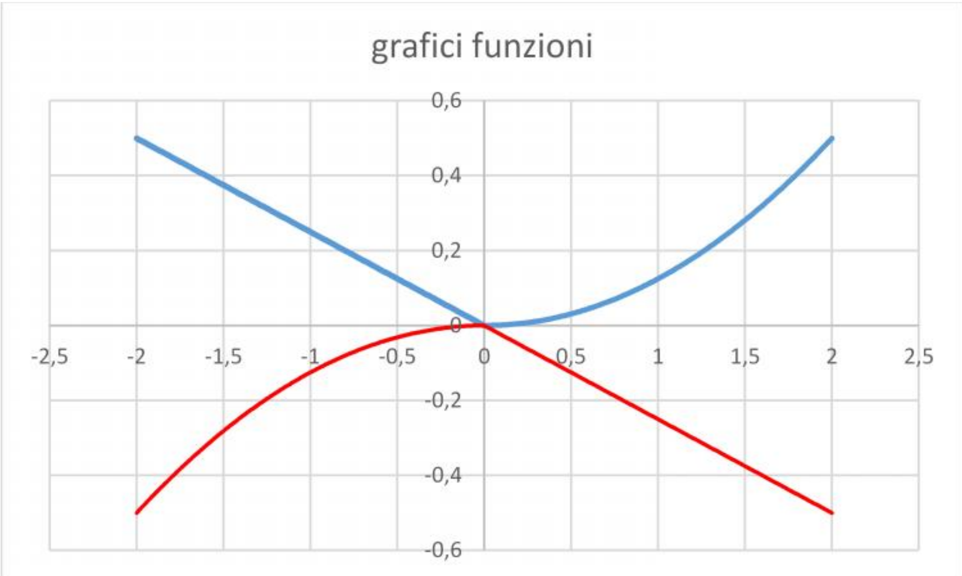
SOC: $|\mathcal{H}f(O)|=-36<0$. O punto di sella.

$|\mathcal{H}f(A)|=36>0$, $f''_{yy}(A)=-2<0$. A punto di massimo.

Compito $\mathbb{F}4$

1) $h(x)=f\left(\dfrac{1+g(x)}{1-f(x)}\right)=f\left(\dfrac{1+x-1}{1-(x+2)}\right)=f\left(-\dfrac{x}{1+x}\right)=$
$-\dfrac{x}{1+x}+2=\dfrac{2+x}{1+x}$. Per la disequazione abbiamo: $\dfrac{2+x}{1+x}\le x+2 \Leftrightarrow$
$\dfrac{2+x}{1+x}-(x+2)\le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2+2x}{1+x}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x+2)}{1+x}\ge 0$; studiamo separatamente i tre fattori della frazione: $x\ge 0$, $x+2\ge 0 \Rightarrow x\ge -2$ e $1+x>0 \Rightarrow x>-1$. Dallo studio dei segni dei tre fattori otteniamo che la disequazione risolta per $-2\le x<-1 \vee x\ge 0$.

2) Di seguito i grafici delle funzioni $f(x)$ (in blu) e $g(x)$ (in rosso); come è facile notare il grafico della $g(x)$ si ottiene attraverso una rotazione di 180° del grafico della $f(x)$ sia attorno all'asse delle ascisse, sia attorno all'asse delle ordinate.



Per determinare l'insieme $g([-1,1])$, possiamo notare che $g(x)$ è strettamente monotona crescente in $[-1,0]$, decrescente in $[0,1]$, con
$g(-1)=-\dfrac{1}{8}>-\dfrac{1}{4}=g(1)$ e $g(0)=0$; pertanto $g([-1,1])=\left[-\dfrac{1}{4},0\right]$.

3) La funzione di equazione data presenta asintoto obliquo destro di equazione $y=4x-1$ se: $i.$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=4$ e $ii.$ $\lim\limits_{x\to+\infty}y-4x=-1$.

Per il primo limite risulta:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{ax + b} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{ax^2 + bx} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(a + \frac{b}{x}\right)} = \frac{1 + (\to 0)}{a + (\to 0)} = \frac{1}{a}$; posto $\frac{1}{a} = 4$ si ottiene $a = \frac{1}{4}$.

Veniamo ora al secondo limite:

$\lim_{x \to +\infty} y - 4x = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 3}{\frac{1}{4}x + b} - 4x = \lim_{x \to +\infty} \frac{-(3 + 4b)x + 3}{\frac{1}{4}x + b} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(-(3 + 4b) + \frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{4} + \frac{b}{x}\right)} = \frac{-(3 + 4b) + (\to 0)}{\frac{1}{4} + (\to 0)} = -4(3 + 4b)$; posto

$-4(3 + 4b) = -1$ si ottiene $b = -\frac{11}{16}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{log(cos\, x)}{1 - cos\, x} = \lim_{x \to 0} -\frac{log(1 + cos\, x - 1)}{cos\, x - 1} = -(\to 1) = -1$.

$\lim_{x \to +\infty} x \cdot sen\left(sen\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{sen\left(sen\frac{1}{x}\right)}{sen\frac{1}{x}} \cdot \frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = (\to 1) \cdot (\to 1) =$
1 .

5) $C.E.$: $(x > 0 \wedge x \neq 0) \Rightarrow x > 0, C.E. = \mathbb{R}_{++} =]0, +\infty[$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \leq 0, \forall x \in C.E.$ perché opposto di un rapporto fra una quantità non negativa ed una quantità positiva. $y = 0$ se $log^2 x = 0 \Rightarrow log x = 0 \Rightarrow x = 1$; unico punto di intersezione con gli assi $A(1, 0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$\lim_{x \to 0^+} -\frac{log^2 x}{x} = -\frac{(\to +\infty)}{(\to 0^+)} = -\infty$; AV di equazione $x = 0$;

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{log^2 x}{x} = 0$; in quanto $log^2 x = o(x)$ per $x \to +\infty$; AOR dx di equazione $y = 0$.

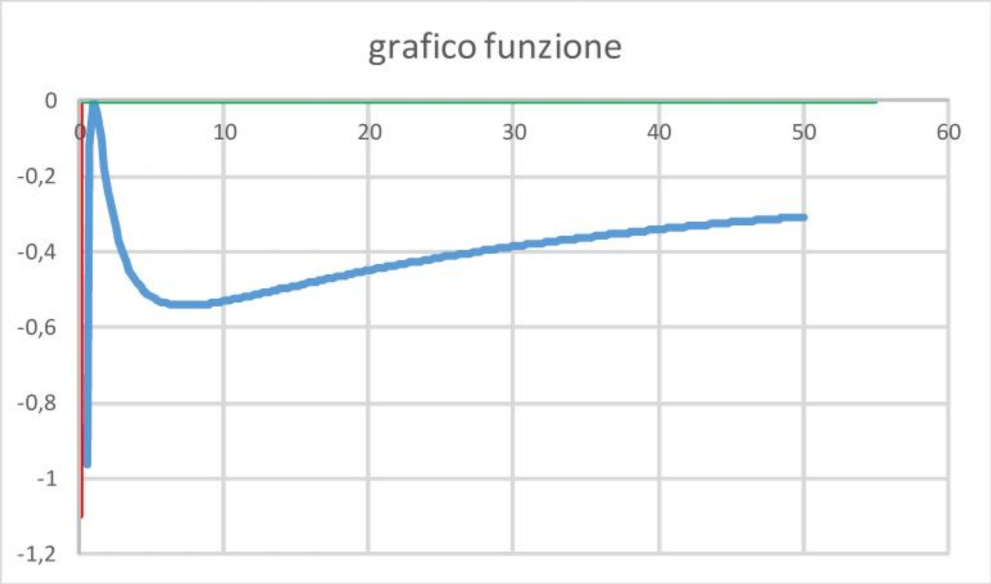
Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{2log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} - log^2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{log^2 x - 2log x}{x^2}$.
$y' > 0$ se $log^2 x - 2log x > 0 \Leftrightarrow log x(log x - 2) > 0$; studiamo separatamente i due fattori: $log x > 0 \Rightarrow x > 1$ e $log x - 2 > 0 \Rightarrow log x > 2 \Rightarrow x > e^2$. $y' > 0$ se $0 < x < 1 \vee x > e^2$. Funzione strettamente monotona crescente in $]0, 1]$ e in $[e^2, +\infty[$, strettamente monotona decrescente in $[1, e^2]$. Massimo assoluto nel punto $A(1, 0)$, minimo relativo nel punto $B\left(e^2, -\frac{4}{e^2}\right)$.

Concavità e convessità: $y'' = \frac{\left(2log x \cdot \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{x}\right) \cdot x^2 - (log^2 x - 2log x) \cdot 2x}{x^4} =$

$2\cancel{x} \cdot \frac{(log x - 1) - (log^2 x - 2log x)}{\cancel{x^4}^{3}} = -2 \cdot \frac{log^2 x - 3log x + 1}{x^3}$. $y'' > 0$, se

$log^2 x - 3log x + 1 < 0$, disequazione di secondo grado nella variabile $log x$; calcoliamo il discriminante $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 = 5 > 0$, $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, soluzioni interne alle radici, $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} < log x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} < x < e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, funzione strettamente convessa in $\left[e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right]$, strettamente concava in $\left]0, e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right]$ e in $\left[e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, +\infty\right[$. Due punti di inflessione $F_{1,2}\left(e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}, y\left(e^{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}\right)\right)$.

Grafico (in rosso l'asintoto verticale, in verde quello orizzontale):



.

6) Determiniamo tramite l'integrazione per parti la primitiva della funzione integranda:

$$\int 2x \cdot sen(\pi - x)\,dx \;=\; 2x \cdot cos(\pi - x) - \int 2 \cdot cos(\pi - x)\,dx \;=$$
$$2x \cdot cos(\pi - x) + 2sen(\pi - x) + k\,.$$

Per l'integrale definito si ottiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot sen(\pi - x)\,dx \;=\; (2x \cdot cos(\pi - x) + 2sen(\pi - x))_{-\pi}^{\pi} \;=$$
$$(2\pi \cdot cos0 + 2sen0) \;-\; (\,-2\pi \cdot cos2\pi + 2sen2\pi) \;=\, 4\pi.$$

7) La generica equazione della retta tangente alla funzione è $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$ che incontra l'asse delle ascisse se $y = 0$ ovvero se $x = x_0 - \dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}$, quindi il triangolo considerato ha i tre vertici di coordinate $A(x_0, 0)$, $B\left(x_0 - \dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}, 0\right)$ e $C(x_0, y(x_0))$ con base $\overline{AB} = -\dfrac{y(x_0)}{y'(x_0)}$, altezza $\overline{BC} = y(x_0)$ e area $\mathcal{A} = -\dfrac{y^2(x_0)}{2y'(x_0)}$. Per la funzione considerata $y' = -y$ quindi $\mathcal{A} = \dfrac{y(x_0)}{2}$ da cui x_0 si ottiene risolvendo $\dfrac{y(x_0)}{2} = 1$ ovvero $y(x_0) = 2$ e $x_0 = -log\,2$. L'equazione della retta tangente è $y - 2 = -2(x + log\,2)$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$.

$$f'_x = w \cdot (x^2 + y^2)^{w-1} \cdot 2x\,; \qquad f'_y = w \cdot (x^2 + y^2)^{w-1} \cdot 2y - \frac{1/w}{2\sqrt{\frac{y+z^3}{w}}}\,;$$

$$f'_z = -\frac{3z^2/w}{2\sqrt{\frac{y+z^3}{w}}}\,; \qquad f'_w = (x^2 + y^2)^{w} \cdot log(x^2 + y^2) + \frac{(y + z^3)/w^2}{2\sqrt{\frac{y+z^3}{w}}}\,.$$