Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

7 febbraio 2022

Compito $\mathbb{F}1$ ✓

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità delle tre proposizioni semplici sapendo che la proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ è falsa, mentre è vera la proposizione composta $p \Rightarrow (q\ e\ r)$.
2) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 25\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}: log_2 x > 2\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$; e per tali insiemi calcolare i loro insiemi frontiera: $\delta(A \cup B)$ e $\delta(A \cap B)$.
3) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{2x + 5}$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che la funzione presenta asintoto obliquo destro di equazione $y = x - 1$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arcsen(1 - cos\, x)}{x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2^x}\right)^{4^x}$.
5) (10 punti) Relativamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, determinare l'andamento del grafico della funzione $y = log(2 - cosx)$
6) (8 punti) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - x) \cdot sen\, x\, dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^{-x}$. Determinare il punto x_0 nel quale la tangente al grafico della funzione forma con l'asse delle ascisse un angolo di ampiezza pari a $45°$. Dopo aver determinato il punto x_0, calcolare l'equazione della retta tangente.
8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie $z(x. y) = e^{x+y} + 2\, e^{x-y}$ nel punto di coordinate $O(0, 0)$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

7 febbraio 2022

Compito $\mathbb{F}2$✓

1) (6 punti) Siano p, q e r tre proposizioni semplici. Determinare la verità o falsità delle tre proposizioni semplici sapendo che la proposizione composta $p \Rightarrow (q \; e \; r)$ è falsa, mentre è vera la proposizione composta $\neg p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$.
2) (6 punti) Siano dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{R}\colon |x| \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}\colon log_4 x > 0\}$. Determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$; e per tali insiemi calcolare i loro insiemi derivato: $\mathcal{D}(A \cup B)$ e $\mathcal{D}(A \cap B)$.
3) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = \dfrac{ax^2 + bx + 3}{3x - 1}$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che la funzione presenta asintoto obliquo destro di equazione $y = 2x$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(sen(2x))}{2x^2}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{4^x}\right)^{2^x}$.
5) (10 punti) Relativamente all'intervallo $[0, 2\pi]$, determinare l'andamento del grafico della funzione $y = log(2 + cosx)$
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\pi} (x + 2) \cdot sen\, x \, dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^x$. Determinare il punto x_0 nel quale la tangente al grafico della funzione forma con l'asse delle ascisse un angolo di ampiezza pari a $45°$. Dopo aver determinato il punto x_0, calcolare l'equazione della retta tangente.
8) (8 punti) Determinare l'espressione del piano tangente alla superficie $z(x.y) = 3\, e^{x+y} - e^{x-y}$ nel punto di coordinate $O(0, 0)$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

7 febbraio 2022

Compito $\mathbb{F}3$✓

1) (6 punti) Siano date le due proposizioni semplici p e q, nell'ipotesi che la proposizione composta $p\ e\ q$ sia falsa, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p\ o\ q)$.
2) (6 punti) Sia f una funzione con dominio $[-2,2]$, codominio $[0,4]$ e $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } -2 \le x \le 0 \\ log(x+1) & \text{per } 0 < x \le 2 \end{cases}$, e sia $g(x) = f(-x)$. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e determinare l'insieme $g([-1,1])$.
3) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = \dfrac{ax^2+3x+3}{bx-1}$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che la funzione presenta asintoto obliquo destro di equazione $y = -2x+1$.
4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-sen^2x}-1}{1-cos\,x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot sen^2 \dfrac{1}{x}$.
5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = log(x-1)^2 - log\,x$.
6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} (3-x)\cdot sen(2x)\,dx$.
7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^x$. Determinare il punto x_0 nel quale la tangente al grafico della funzione forma, insieme all'asse delle ascisse ed alla retta di equazione $x = x_0$, un triangolo di area pari a 1. Dopo aver determinato il punto x_0, calcolare l'equazione della retta tangente.
8) (8 punti) Si determini la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = 2x^3 - y^2 + 6xy$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.

Università degli Studi di Siena

Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

7 febbraio 2022

Compito $\mathbb{F}4$[✓]

1) (6 punti) Siano date le due funzioni $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 1$; dopo aver determinato l'espressione della funzione composta $h(x) = f\left(\frac{1 + g(x)}{1 - f(x)}\right)$, si risolva la disequazione $h(x) \le f(x)$.

2) (6 punti) Sia f una funzione con dominio $[-2, 2]$, codominio $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{4} & \text{per } -2 \le x \le 0 \\ \frac{x^2}{8} & \text{per } 0 < x \le 2 \end{cases}$, e sia $g(x) = -f(-x)$. Disegnare i grafici delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ e determinare l'insieme $g([-1, 1])$.

3) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{ax + b}$. Determinare i valori dei parametri a e b sapendo che la funzione presenta asintoto obliquo destro di equazione $y = 4x - 1$.

4) (8 punti) Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{log(\cos x)}{1 - \cos x}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot sen\left(sen\dfrac{1}{x}\right)$.

5) (10 punti) Determinare l'andamento del grafico della funzione $y = -\dfrac{log^2 x}{x}$.

6) (8 punti) Calcolare $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cdot sen(\pi - x)\, dx$.

7) (7 punti) Sia data la funzione di equazione $y = e^{-x}$. Determinare il punto x_0 nel quale la tangente al grafico della funzione forma, insieme all'asse delle ascisse ed alla retta di equazione $x = x_0$, un triangolo di area pari a 10. Dopo aver determinato il punto x_0, calcolare l'equazione della retta tangente.

8) (8 punti) Calcolare il vettore gradiente della funzione $f(x, y, z, w) = \left(x^2 + y^2\right)^w - \sqrt{\dfrac{y + z^3}{w}}$.

✓ Il compito è diviso in 8 esercizi che presentano valutazioni diverse, il massimo punteggio raggiungibile è pari a 60; gli studenti che ottengono nella prova una votazione non inferiore a 24 vengono ammessi alla prova orale.