# Università degli Studi di Siena

Correzione Prova scritta di Matematica Generale (A.A. 2021-22)

10 gennaio 2022

Compito $\mathbb{G}1$

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ è falsa, $p \Rightarrow r$ è vera e $q$ è falsa, veniamo ora alla proposizione $\neg(p \Leftrightarrow r)$, se essa è vera, $p \Leftrightarrow r$ è falsa, quindi $p$ e $r$ non possono essere entrambe vere oppure entrambe false, ma se $p \Rightarrow r$ è vera ne consegue che $p$ è falsa e $r$ è vera. Riassumendo, sotto le ipotesi poste risulta che $p$ e $q$ sono false, mentre $r$ è vera.

*SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ*:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow r$ | $\neg(p \Leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | | |
| $\boldsymbol{F}$ | $\boldsymbol{F}$ | $\boldsymbol{V}$ | $V$ | $\boldsymbol{F}$ | $F$ | $\boldsymbol{V}$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |

Consideriamo nella tavola di verità solo le righe dove $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$ è falsa, come evidenziato in grassetto, l'unico caso in cui sono verificate le ipotesi poste è quello in cui $p$ e $q$ sono false e $r$ è vera.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 3x\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x-3) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 3\} = [0,3]$, $\mathcal{C}(B) = ]-\infty, 1[ \cup [3\pi, +\infty[$, $C = A \cup \mathcal{C}(B) = [0,3] \cup (]-\infty, 1[ \cup [3\pi, +\infty[) = ]-\infty, 3] \cup [3\pi, +\infty[$. $\delta(C) = \{3, 3\pi\}$. L'insieme $C$ è unione di due intervalli chiusi, quindi è un insieme chiuso.

3) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+8}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 3 + \dfrac{8}{x^2} = 3 + (\to 0) = 3.$

*VERIFICA*: $\forall \epsilon > 0$, posto $\left|\dfrac{3x^2+8}{x^2} - 3\right| < \epsilon$ si ottiene $\left|\dfrac{8}{x^2}\right| < \epsilon$ che è equivalente a $x^2 > \dfrac{8}{\epsilon} \Leftrightarrow x < -\sqrt{\dfrac{8}{\epsilon}} \vee x > \sqrt{\dfrac{8}{\epsilon}}$; dato che $x$ tende a $-\infty$, $\delta_\epsilon = -\sqrt{\dfrac{8}{\epsilon}}$ ed il limite è verificato.

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(arcsen\, x)}{x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - cos(arcsen\, x)}{arcsen^2 x} \cdot \dfrac{arcsen^2 x}{x^2} \cdot x = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0.$

$\lim_{x \to -\infty} 2^{-3x} - 3^{4x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{8}\right)^x - 81^x = (\to +\infty) - (\to 0) = +\infty.$

5) $C.E.: x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$;
$C.E. = ]-\infty, -1[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$.

$y(-x) = -\dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{x}{x^2-1} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in [0,1[ \cup ]1, +\infty[$ ed operiamo per simmetria.

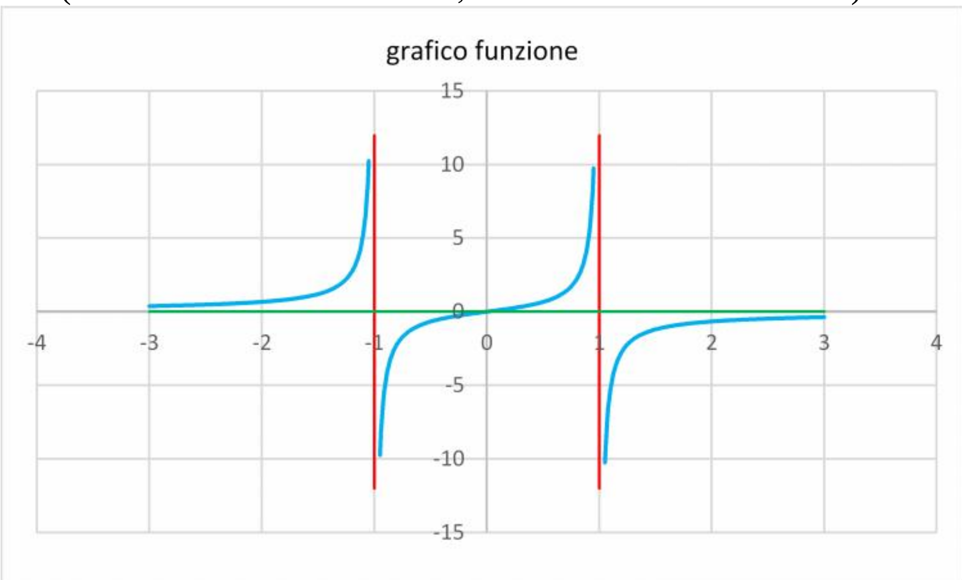
Segno ed intersezioni con gli assi: $y > 0$ se $-\dfrac{x}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2-1} < 0 \Rightarrow$

$x^2-1<0 \Rightarrow x^2<1$, verificata per $0 \le x < 1$. Funzione positiva in $]0,1[$, negativa in $]1,+\infty[$; unico punto di intersezione con gli assi $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} -\frac{x}{x^2-1} = -\frac{(\to 1)}{(\to 0^{\pm})} = \mp\infty;$$ $AV$ di equazione $x=1$.

$$\lim_{x\to +\infty} -\frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{(\to +\infty)} = 0;$$ $AOr$ di equazione $y=0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{1+x^2}{\left(x^2-1\right)^2}$ . $y'>0$, $\forall x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$. Funzione strettamente crescente in $[0,1[\cup]1,+\infty[$.
Concavità e convessità: la stretta monotonia crescente insieme all'esistenza dei due asintoti ed all'assenza di punti di flesso di ascissa positiva portano a concludere che la funzione è convessa in $[0,1[$ e concava in $]1,+\infty[$, unico punto di flesso $O(0,0)$.
Grafico (in rosso i due asintoti verticali, in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1+tg^2x}{1+tg\,x}\right) dx = \left(log|1+tg\,x|\right)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$
$$\left(log\left|1+tg\,\frac{\pi}{3}\right|\right) - \left(log\left|1+tg\,\frac{\pi}{4}\right|\right) = \left(log\left(1+\sqrt{3}\right)\right) - (log\,2) =$$
$$log\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right).$$

7) *PRIMO METODO - CON IL CALCOLO DELLE DERIVATE*: l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0=0$ è $y-f(0)=f'(0)\cdot x$ ovvero $y=f'(0)\cdot x+f(0)$. Se questa deve essere uguale alla $y=-3x$ si ottiene facilmente $f(0)=0$ e $f'(0)=-3$. Veniamo ora alla funzione $g(x)$:
$g(0) = -f\left(\frac{1}{2}\cdot f(0)\right) = -f\left(\frac{1}{2}\cdot 0\right) = -f(0)=0$, per la derivata risulta
$g'(x) = -f'\left(\frac{1}{2}\cdot f(x)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot f'(x)\right) = -\frac{1}{2}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\cdot f(x)\right)\cdot f'(x)$ da cui
$g'(0) = -\frac{1}{2}\cdot f'\left(\frac{1}{2}\cdot f(0)\right)\cdot f'(0) = -\frac{1}{2}\cdot\left(f'(0)\right)^2 = -\frac{9}{2}$.

*SECONDO METODO - CON IL POLINOMIO DI MC LAURIN*: se la retta tangente alla funzione nel punto $x_0=0$ ha equazione $y=-3x$, $f(x)=-3x+o(x)$, da questa uguaglianza si ottiene $f(0)=-3\cdot 0+o(0)=0$ e $f'(0)=-3$; per la $g$ risulta $g(x) = -f\left(\frac{1}{2}\cdot f(x)\right) = -f\left(\frac{1}{2}\cdot(-3x+o(x))\right) =$

$-f\big(-\frac{3}{2}x+o(x)\big) = -\big(-3\big(-\frac{3}{2}x+o(x)\big)+o\big(-\frac{3}{2}x+o(x)\big)\big) =$
$-\big(\frac{9}{2}x+o(x)\big) = -\frac{9}{2}x+o(x)$, da cui facilmente $g(0)=0$ e $g'(0) = -\frac{9}{2}$.

8) Per prima cosa calcoliamo il gradiente della funzione: $\nabla f = (2x-2, 2\alpha y+8)$; posto $\nabla f = (0,0)$ si ottiene il sistema $\begin{cases} 2x-2=0 \\ 2\alpha y+8=0 \end{cases}$ che ha come soluzione $\begin{cases} x=1 \\ y=-4/\alpha \end{cases}$, se l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(1,-1)$ deve necessariamente essere $\alpha=4$. Per studiare la natura del punto critico calcoliamo la matrice Hessiana della funzione: $\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ con $|\mathcal{H}f| = 16 > 0$ e $f''_{xx} = 2 > 0$. $(1,-1)$ è per la funzione $f$ un punto di minimo.

# Compito $\mathbb{G}2$

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ è falsa, $p \Rightarrow q$ è vera e $r$ è falsa, veniamo ora alla proposizione $\neg(p \Leftrightarrow q)$, se essa è vera, $p \Leftrightarrow q$ è falsa, quindi $p$ e $q$ non possono essere entrambe vere oppure entrambe false, ma se $p \Rightarrow q$ è vera ne consegue che $p$ è falsa e $q$ è vera. Riassumendo, sotto le ipotesi poste risulta che $p$ e $r$ sono false, mentre $q$ è vera.

*SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ*:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Rightarrow q$ | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\neg(p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | | |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $\boldsymbol{F}$ | $\boldsymbol{V}$ | $\boldsymbol{F}$ | $V$ | $\boldsymbol{F}$ | $F$ | $\boldsymbol{V}$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | | |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |

Consideriamo nella tavola di verità solo le righe dove $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ è falsa, come evidenziato in grassetto, l'unico caso in cui sono verificate le ipotesi poste è quello in cui $p$ e $r$ sono false e $q$ è vera.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq -3x\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2+3x \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x+3) \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -3 \leq x \leq 0\} = [-3,0]$, $\mathcal{C}(A) = ]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$, $C = \mathcal{C}(A) \cap B = (]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[) \cap ]-e,3[ = ]0,3[$. $\delta(C) = \{0,3\}$. L'insieme $C$ è un intervallo aperto.

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-5}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2} = \frac{1}{2} - (\to 0) = \frac{1}{2}$.

*VERIFICA*: $\forall \epsilon > 0$, posto $\left|\frac{x^2-5}{2x^2} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$ si ottiene $\left|\frac{5}{2x^2}\right| < \epsilon$ che è equivalente a $x^2 > \frac{5}{2\epsilon} \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{5}{2\epsilon}} \vee x > \sqrt{\frac{5}{2\epsilon}}$; dato che $x$ tende a $+\infty$, $\delta_\epsilon = \sqrt{\frac{5}{2\epsilon}}$ ed il limite è verificato.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{sen(1-cos\,x)}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(1-cos\,x)}{1-cos\,x} \cdot \frac{1-cos\,x}{2x^2} = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

$\lim_{x \to -\infty} 2^{3x} - 3^{-2x} = \lim_{x \to -\infty} 8^x - \left(\frac{1}{9}\right)^x = (\to 0) - (\to +\infty) = -\infty$.

5) $C.E.$: $9-x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq \pm 3$;
$C.E. = ]-\infty, -3[\cup]-3,3[\cup]3,+\infty[$.

$y(-x) = -\dfrac{3\cdot(-x)}{9-(-x)^2} = \dfrac{3x}{9-x^2} = -y(x)$. Funzione dispari (simmetrica rispetto all'origine degli assi) la studiamo solo per $x \in [0,3[\cup]3,+\infty[$ ed operiamo per simmetria.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y>0$ se $-\dfrac{3x}{9-x^2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x}{9-x^2} < 0 \Rightarrow$ $9-x^2<0 \Rightarrow x^2>9$, verificata per $x>3$. Funzione positiva in $]3,+\infty[$, negativa in $]0,3[$; unico punto di intersezione con gli assi $O(0,0)$.

Limiti agli estremi del $C.E.$:

$$\lim_{x\to 3^{\pm}} -\frac{3x}{9-x^2} = -\frac{(\to 9)}{(\to 0^{\mp})} = \pm\infty;$$ $AV$ di equazione $x=3$.

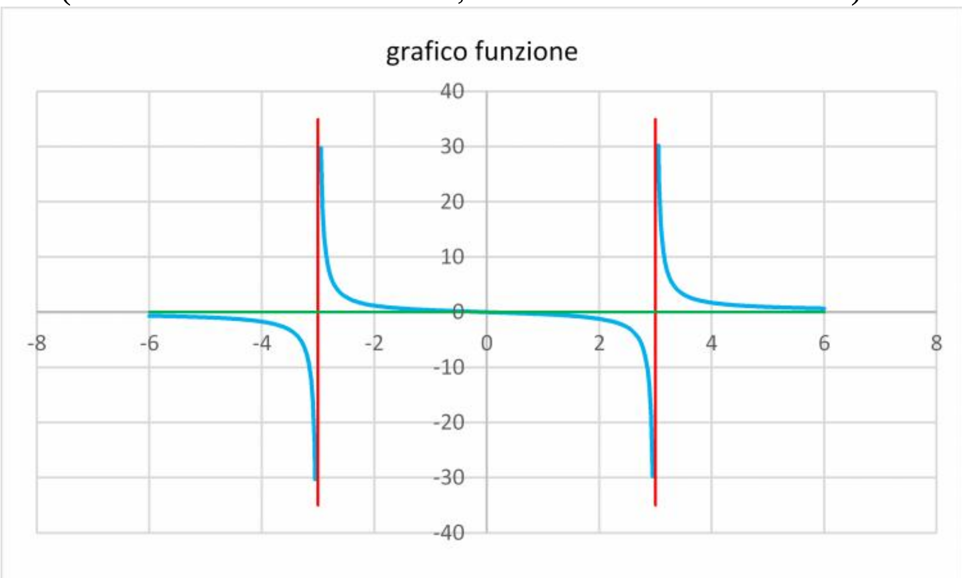
$$\lim_{x\to +\infty} -\frac{3x}{9-x^2} = \lim_{x\to +\infty} -\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}(\frac{9}{x}-x)} = -\frac{3}{(\to -\infty)} = 0;$$ $AOr$ di equazione $y=0$.

Crescenza e decrescenza: $y' = -\dfrac{3\cdot(9-x^2)-3x\cdot(-2x)}{(9-x^2)^2} = -\dfrac{27+3x^2}{(9-x^2)^2}$.

$y'<0, \forall x \in [0,3[\cup]3,+\infty[$. Funzione strettamente decrescente in $[0,3[\cup]3,+\infty[$.

Concavità e convessità: la stretta monotonia decrescente insieme all'esistenza dei due asintoti ed all'assenza di punti di flesso di ascissa positiva portano a concludere che la funzione è concava in $[0,3[$ e convessa in $]3,+\infty[$.

Grafico (in rosso i due asintoti verticali, in verde l'asintoto orizzontale):



.

6) $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1+tg^2 x}{tg\, x}\right) dx = (log|tg\, x|)_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \left(log|tg\,\frac{\pi}{3}|\right) - \left(log|tg\,\frac{\pi}{4}|\right) = \left(log\sqrt{3}\right) - (log\, 1) = \left(log\sqrt{3}\right).$$

7) *PRIMO METODO - CON IL CALCOLO DELLE DERIVATE*: l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0 = 0$ è $y - f(0) = f'(0)\cdot x$ ovvero $y = f'(0)\cdot x + f(0)$. Se questa deve essere uguale alla $y=x$ si ottiene facilmente $f(0)=0$ e $f'(0)=1$. Veniamo ora alla funzione $g(x)$:
$g(0) = f(f(7\cdot 0)) = f(f(0)) = f(0) = 0$, per la derivata risulta

$g'(x) = f'(f(7x)) \cdot f'(7x) \cdot 7 = 7 \cdot f'(f(7x)) \cdot f'(7x)$ da cui
$g'(0) = 7 \cdot f'(f(7 \cdot 0)) \cdot f'(7 \cdot 0) = 7 \cdot (f'(0))^2 = 7.$

*SECONDO METODO - CON IL POLINOMIO DI MC LAURIN*: se la retta tangente alla funzione nel punto $x_0 = 0$ ha equazione $y = x$, $f(x) = x + o(x)$, da questa uguaglianza si ottiene $f(0) = 0 + o(0) = 0$ e $f'(0) = 1$; per la $g$ risulta
$g(x) = f(f(7x)) = f(7x + o(7x))) = f(7x + o(x)) =$
$7x + o(x) + o(7x + o(x)) = 7x + o(x)$, da cui facilmente $g(0) = 0$ e $g'(0) = 7$.

8) Per prima cosa calcoliamo il gradiente della funzione: $\nabla f = (2\alpha x - 6, 2y + 8)$; posto $\nabla f = (0,0)$ si ottiene il sistema $\begin{cases} 2\alpha x - 6 = 0 \\ 2y + 8 = 0 \end{cases}$ che ha come soluzione $\begin{cases} x = 3/\alpha \\ y = -4 \end{cases}$, se l'unico punto critico della funzione ha coordinate $(-3, -4)$ deve necessariamente essere $\alpha = -1$. Per studiare la natura del punto critico calcoliamo la matrice Hessiana della funzione: $\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ con $|\mathcal{H}f| = -16$. $(-3, -4)$ è per la funzione $f$ un punto di sella.

## Compito $\mathbb{G}3$

1) Per la coppia di insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ è sufficiente considerare un intervallo $I$ e scegliere $\mathbb{A}$ uguale all'interno di $I$, $\mathbb{A} = \mathring{I}$, e $\mathbb{B}$ uguale alla chiusura di $I$, $\mathbb{B} = \overline{I}$. Con tale scelta risulta $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ e $\delta(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \delta(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \delta(I)$. Altra coppia di insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ che rispetti le ipotesi poste è quella in cui $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono insiemi non vuoti con $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, in questo caso $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ e $\delta(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = \delta(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \emptyset$.

2) $g(f(x)) = \sqrt{x^4 + 2} - 3x^2 = \sqrt{(x^2)^2 + 2} - 3x^2 = \sqrt{(f(x))^2 + 2} - 3 \cdot f(x)$, da cui segue banalmente $g(x) = \sqrt{x^2 + 2} - 3x$. $f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2 + 2} - 3x\right) = \left(\sqrt{x^2 + 2} - 3x\right)^2$.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - 10x^2 + 25 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - 5\right)^2 = (\to +\infty)^2 = +\infty$.
*VERIFICA*: $\forall \epsilon > 0$, posto $\left(x^2 - 5\right)^2 > \epsilon$ si ottiene $x^2 < 5 - \sqrt{\epsilon} \vee x^2 > 5 + \sqrt{\epsilon}$. Dato che $x$ diverge positivamente, consideriamo solo la disequazione a destra, che è verificata per $x < -\sqrt{5 + \sqrt{\epsilon}} \vee x > \sqrt{5 + \sqrt{\epsilon}}$; ancora per la divergenza di $x$ a $+\infty$ si ottiene $\delta_\epsilon = \sqrt{5 + \sqrt{\epsilon}}$ ed il limite è verificato.

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{sen^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{e^{sen^2 x} - 1}{sen^2 x} \cdot \frac{sen^2 x}{x^2}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \dfrac{(\to 1) \cdot (\to 1)}{\left(\to \frac{1}{2}\right)} = 2.$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3 - x} - 1}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3 - x} - 1}{x - 2} \cdot \dfrac{\sqrt{3 - x} + 1}{\sqrt{3 - x} + 1} =$
$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3 - x - 1}{(x - 2)\left(\sqrt{3 - x} + 1\right)} = \lim\limits_{x \to 2} - \dfrac{\cancel{x - 2}}{\cancel{(x - 2)}\left(\sqrt{3 - x} + 1\right)} = -\dfrac{1}{2}.$

5) $C.E. = \mathbb{R}$.
$y(-x) = (-x)^2 \cdot e^{1 - (-x)} = x^2 \cdot e^{1 + x}$ che ha espressione diversa sia da $y(x)$ che da $-y(x)$. Funzione né pari né dispari.

Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, in quanto prodotto fra un quadrato ed una esponenziale. $y = 0$ se $x^2 \cdot e^{1-x} = 0 \Rightarrow x = 0$; unica intersezione con gli assi nel punto $O(0,0)$.
Limiti agli estremi del $C.E.$:
$\lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot e^{1-x} = (\to +\infty) \cdot (\to +\infty) = +\infty$;
$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^{\cancel{2}} \cdot e^{1-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to -\infty} x \cdot e^{1-x} = (\to -\infty) \cdot (\to +\infty) = -\infty$;
$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = 0$; in quanto $x^2 = o(e^{x-1})$ per $x \to +\infty$; asintoto orizzontale destro di equazione $y = 0$.
Crescenza e decrescenza: $y' = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = \left(2x - x^2\right) \cdot e^{1-x}$.
$y' > 0$ se $2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 0$, vera per $0 < x < 2$. Funzione strettamente monotona crescente in $[0,2]$, strettamente monotona decrescente in $]-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty[$; minimo assoluto pari a 0 nel punto $x_0 = 0$, massimo relativo pari a $y(2) = 4e^{-1}$ nel punto $x_M = 2$.
Concavità e convessità: $y'' = (2 - 2x) \cdot e^{1-x} + \left(2x - x^2\right) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = \left(x^2 - 4x + 2\right) \cdot e^{1-x}$. $y'' > 0$, se $x^2 - 4x + 2 > 0$, disequazione di secondo grado; calcoliamo il discriminante $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 2 = 8 > 0$, $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$, disequazione verificata se $x < 2 - \sqrt{2} \vee x > 2 + \sqrt{2}$.
Funzione strettamente convessa in $]-\infty, 2 - \sqrt{2}]$ e in $[2 + \sqrt{2}, +\infty[$, strettamente concava in $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$. Punti di flesso $F_1\left(2 - \sqrt{2}, y\left(2 - \sqrt{2}\right)\right)$ e $F_2\left(2 + \sqrt{2}, y\left(2 + \sqrt{2}\right)\right)$.
Grafico (in verde l'asintoto orizzontale):

.

6) La primitiva della funzione integranda può essere determinata in tre modi diversi, per integrazione diretta, tramite l'integrazione per parti oppure con l'integrale per sostituzione, vediamo nel dettaglio ognuno dei tre distinti casi:

*I MODO - INTEGRAZIONE DIRETTA*:

$$\int (3 - x)\sqrt{x}\, dx = \int \left(3\sqrt{x} - \sqrt{x^3}\right) dx = 2\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + k\,;$$

*II MODO - INTEGRAZIONE PER PARTI*:

$$\int (3-x)\sqrt{x}\,dx \,=\, (3-x)\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right) - \int (-1)\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)dx \,=$$
$$2\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^5} + \int\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)dx \,=\, 2\sqrt{x^3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^5} + \frac{4}{15}\sqrt{x^5} + k \,=$$
$$2\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + k\,;$$

*III MODO - INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE*:

posto $\sqrt{x} = t$ si ottine $x = t^2$ da cui $dx = 2tdt$ quindi: $\int (3-x)\sqrt{x}\,dx \,=$
$$\int (3-t^2)\cdot t\,\cdot 2tdt \,=\, \int (6t^2 - 2t^4)dt \,=\, 2t^3 - \frac{2}{5}t^5 + k \,=$$
$$2\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + k\,;$$

come si può notare il risultato finale è necessariamente uguale, indipendentemente dal metodo di integrazione usato. Veniamo ora all'integrale definito:
$$\int_0^3 (3-x)\sqrt{x}\,dx \,=\, \left(2\sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)_0^3 \,=\, 2\sqrt{27} - \frac{2}{5}\sqrt{243} \,=$$
$$6\sqrt{3} - \frac{18}{5}\sqrt{3} \,=\, \frac{12}{5}\sqrt{3}\,.$$

7) $\mathbb{M}\cdot\mathbb{N} \,=\, \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k^2 \\ k^2 & k \end{bmatrix}$, se $\mathbb{M}\cdot\mathbb{N} \,=\, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ allora $\begin{bmatrix} k & k^2 \\ k^2 & k \end{bmatrix} \,=\, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ da cui $k = \,-1$.

8)
$$f'_x = \,(y^2+w)\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^2z^3}}\,;$$
$$f'_y = \,2y\cdot\sqrt{x^3+y^2z^3} + (y^2+w)\cdot\frac{yz^3}{\sqrt{x^3+y^2z^3}}\,;$$
$$f'_z = \,(y^2+w)\cdot\frac{3y^2z^2}{2\sqrt{x^3+y^2z^3}}\,; \qquad f'_w = \,\sqrt{x^3+y^2z^3}\,.$$

## Compito $\mathbb{G}4$

1) *PRIMO METODO - CON IL RAGIONAMENTO LOGICO*: se la proposizione $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r$ è falsa, $p \Leftrightarrow q$ è vera e $\neg r$ è falsa quindi $r$ è vera, veniamo ora alla proposizione $\neg(r \Rightarrow p)$, se essa è falsa, $r \Rightarrow p$ è vera, quindi $p$ è vera dato che $r$ è vera, ma se $p \Leftrightarrow q$ è vera ne consegue che $q$ è vera (per la verità di $p$). Riassumendo, sotto le ipotesi poste risulta che le tre proposizioni semplici sono tutte vere.

*SECONDO METODO - CON LA TAVOLA DI VERITÁ*:

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \Leftrightarrow q$ | $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r$ | $r \Rightarrow p$ | $\neg(r \Rightarrow p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{V}$ | $\boldsymbol{V}$ | $\boldsymbol{V}$ | $V$ | $\boldsymbol{F}$ | $V$ | $\boldsymbol{F}$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | | |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | | |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | | |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | | |

Consideriamo nella tavola di verità solo le righe dove $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \neg r$ è falsa, come evidenziato in grassetto, l'unico caso in cui sono verificate le ipotesi poste è quello in cui $p$, $q$ e $r$ sono vere.

2) $A = \{x \in \mathbb{R}: x^2 > 3\} = \{x \in \mathbb{R}: x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}\} = ]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$, $D = (A \cap B) \cup C = \left(\left(]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[\right) \cap [1, +\infty[\right) \cup \{-2, -1, 0, 1, 2\} = ]\sqrt{3}, +\infty[ \cup \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{-2, -1, 0, 1\} \cup ]\sqrt{3}, +\infty[$.
$\delta(D) = \{-2, -1, 0, 1, \sqrt{3}\}$. L'insieme $D$ è né aperto né chiuso.

3) $\lim_{x \to -\infty} 1 + 6x + 9x^2 = \lim_{x \to -\infty} (1+3x)^2 = (\to -\infty)^2 = +\infty$.
*VERIFICA*: $\forall \epsilon > 0$, posto $(1+3x)^2 > \epsilon$ si ottiene $3x < -1 - \sqrt{\epsilon} \vee 3x > \sqrt{\epsilon} - 1$. Dato che $x$ diverge negativamente, consideriamo solo la disequazione a sinistra, che è verificata per $x < -\dfrac{1+\sqrt{\epsilon}}{3}$ da cui $\delta_\epsilon = -\dfrac{1+\sqrt{\epsilon}}{3}$ ed il limite è verificato.

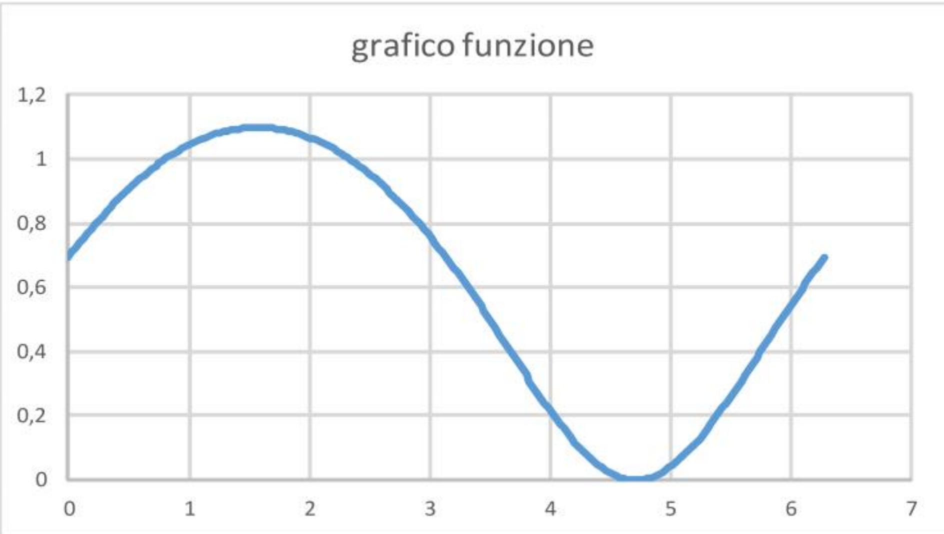
4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{log(1 - sen(2x^2))}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{log(1 - sen(2x^2))}{sen(2x^2)} \cdot \dfrac{sen(2x^2)}{2x^2} \cdot 2 = (\to -1) \cdot (\to 1) \cdot 2 = -2$.
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2^{3x} - 3^{2x}}{3^{3x} + 3^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{8^x - 9^x}{27^x + 9^x}$, per $x \to +\infty$ risulta $8^x = o(9^x)$ e $9^x = o(27^x)$ quindi $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2^{3x} - 3^{2x}}{3^{3x} + 3^{2x}} = \lim_{x \to +\infty} -\dfrac{9^x}{27^x} = \lim_{x \to +\infty} -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 0$.

5) $C.E.$: $2 + senx > 0 \Rightarrow senx > -2$, vera $\forall x \in [0, 2\pi]$; $D = [0, 2\pi]$.
Segno ed intersezioni con gli assi: $y \geq 0$ se $log(2 + senx) \geq 0 \Rightarrow 2 + senx \geq 1 \Rightarrow senx \geq -1$, vera $\forall x \in [0, 2\pi]$. Funzione non negativa nel suo dominio. $y = 0$ se $log(2 + senx) = 0$ che è soddisfatta nel punto $x = \dfrac{3}{2}\pi$, unica intersezione con l'asse delle ascisse nel punto $A\left(\dfrac{3}{2}\pi, 0\right)$, $y(0) = log\,2$.
La funzione è continua in tutto il suo dominio limitato e chiuso in quanto combinazione di funzioni continue, quindi i limiti non sono necessari.
Crescenza e decrescenza: $y' = \dfrac{1}{2 + senx} \cdot cosx = \dfrac{cosx}{2 + senx}$. $y' > 0$, se $cosx > 0 \Rightarrow 0 \leq x < \dfrac{1}{2}\pi \vee \dfrac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$. Funzione strettamente crescente in $\left[0, \dfrac{1}{2}\pi\right]$ e in $\left[\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$, strettamente decrescente in $\left[\dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right]$; punto di massimo

assoluto $x = \frac{1}{2}\pi$, di ordinata $y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = log\,3$, punto di minimo assoluto $x = \frac{3}{2}\pi$, di ordinata $y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$.

Concavità e convessità: $y'' = \dfrac{-\,senx \cdot (2 + senx) - cosx \cdot cosx}{(2 + senx)^2} = -\dfrac{1 + 2senx}{(2 + senx)^2}$. $y'' > 0,$ se $1 + 2senx < 0 \Rightarrow senx < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$. Funzione strettamente convessa in $\left[\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right]$, strettamente concava in $\left[0, \frac{7}{6}\pi\right]$ e in $\left[\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right]$. Punti di flesso $F_1\left(\frac{7}{6}\pi, log\,\frac{3}{2}\right)$ e $F_2\left(\frac{11}{6}\pi, log\,\frac{3}{2}\right)$.

Grafico:



.

6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos\,x \cdot \left(1 + sen^2 x\right)\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + sen^2 x\right) dsenx = \left(senx + \frac{1}{3} sen^3 x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

7) Il coefficiente angolare della retta tangente è la derivata della funzione nel punto, in questo caso $y' = 2x$ quindi $x_0 = -\frac{1}{10}$; la generica equazione della retta tangente nel punto è $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$, nel caso specifico $y(x_0) = \frac{1}{100}$ è $y'(x_0) = -\frac{1}{5}$. La retta richiesta ha quindi equazione $y - \frac{1}{100} = -\frac{1}{5}\left(x + \frac{1}{10}\right)$ che può essere riscritta come $y = -\frac{1}{5}x - \frac{1}{100}$.

8) $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z, f'_w)$:

$$f'_x = 3x^2 z\,; \qquad f'_y = -\,e^{y-3z}\,;$$
$$f'_z = x^3 + 3e^{y-3z} - w^z \cdot logw\,; \qquad f'_w = -\,zw^{z-1}\,.$$